BULLETIN

DES

SCIENCES MATHÉMATIQUES.

COMMISSION DES HAUTES ÉTUDES.

MM. G. DARBOUX, *président*.
H. POINCARÉ.
J. TANNERY.
E. PICARD.
P. APPELL.
GUILLET, *secrétaire*.

AVIS.

Toutes les communications doivent être adressées à M. *Darboux*, Secrétaire perpétuel de l'Académie des Sciences, rue Gay-Lussac, 36, Paris.

37835 Paris. — Imprimerie GAUTHIER-VILLARS, quai des Grands-Augustins, 55.

BIBLIOTHÈQUE DE L'ÉCOLE DES HAUTES ÉTUDES
PUBLIÉE SOUS LES AUSPICES DU MINISTÈRE DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE.

BULLETIN

DES

SCIENCES MATHÉMATIQUES,

RÉDIGÉ PAR MM. G. DARBOUX, É. PICARD ET J. TANNERY,

AVEC LA COLLABORATION DE

MM. BROCARD, GOURSAT, G. KŒNIGS,
LAISANT, LAMPE, MANSION, MOLK, RADAU, RAFFY, S. RINDI, SAUVAGE,
SCHOUTE, ZEUTHEN, ETC.,

Sous la direction de la Commission des Hautes Études

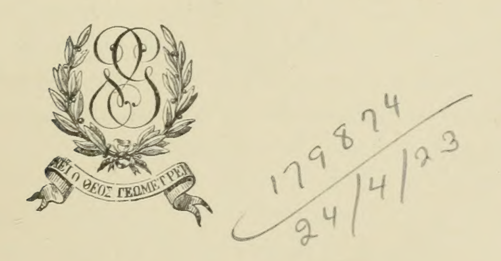
PUBLICATION FONDÉE EN 1870 PAR MM. G. DARBOUX ET J. HOÜEL
CONTINUÉE DE 1876 A 1886 PAR MM. G. DARBOUX, J. HOÜEL ET J. TANNERY
ET DE 1886 A 1905 PAR MM. G. DARBOUX ET J. TANNERY.

DEUXIÈME SÉRIE.

TOME XXX. — ANNÉE 1906.

(XLI[e] VOLUME DE LA COLLECTION.)

PREMIÈRE PARTIE.



PARIS,
GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
Quai des Grands-Augustins, 55.

1906

BULLETIN

DES

SCIENCES MATHÉMATIQUES.

PREMIÈRE PARTIE.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

BACHET (Claude-Gaspar), Sieur de Méziriac. — *Problèmes plaisants et délectables qui se font par les nombres.* Quatrième édition, revue et augmentée. 1 vol. in-12, II-161 pages. Paris, Gauthier-Villars, 1905.

Les Ouvrages de récréations mathématiques sont devenus nombreux dans ces derniers temps. Le regretté Édouard Lucas avait beaucoup contribué à étendre le champ et la portée de ces jeux difficiles qui exigent souvent beaucoup d'invention et de recherche et ne sont méprisés que de ceux qui ont la vue courte et l'esprit limité. Le vieil Ouvrage de Bachet de Méziriac qui parut à Lyon en 1612 et dont le succès retentissant suscita bien des essais, bien des travaux du même genre, garde encore, après trois siècles, une part notable d'intérêt et de fraîcheur. Il faut souhaiter à la nouvelle et quatrième édition, qui a été un peu simplifiée et allégée par une main experte, de trouver le succès qui n'a pas fait défaut à celles qui l'ont précédée. D. J.

GOMES TEIXEIRA. — TRATADO DE LAS CURVAS SPECIALES NOTABLES. 1 vol. in-4°, IX-632 pages, Madrid, imprenta de la *Gaceta de Madrid*, 1906.

Dans le Tome I de l'*Intermédiaire des Mathématiciens* M. Haton de la Goupillière attirait l'attention des mathématiciens sur les avantages qu'il y aurait à réunir dans un traité spécial l'étude des courbes remarquables qui, depuis des milliers d'années, ont été l'objet des recherches des géomètres et des analystes, anciens et modernes. Dès 1892, l'Académie des Sciences de Madrid avait proposé comme sujet de prix de former un catalogue ordonné de toutes les courbes remarquables, accompagné de leurs équations et de leurs propriétés essentielles ainsi que d'une Notice bibliographique indiquant les livres et les auteurs par qui leur étude a été inaugurée.

Le travail dont l'exécution était ainsi proposée de différents côtés aux géomètres comme une œuvre utile et digne de leurs efforts répondait, il faut le reconnaître, à un besoin généralement reconnu. Notre collaborateur, M. Brocard, avait publié sur ce sujet des *Notes de Bibliographie des courbes géométriques*, qui contenaient déjà un ensemble fort respectable de courbes particulières. En 1901, M. Basset avait publié son *Elementary Treatise on cubic and quartic Curves* dans lequel sont étudiées plus particulièrement les cubiques circulaires et les anallagmatiques du quatrième ordre. En 1902, M. Gino Loria avait fait paraître son œuvre importante *Spezielle algebraiche und transcendente ebene Curven* qui contient les plus précieuses informations historiques et bibliographiques. Le travail que fait paraître aujourd'hui M. Gomes Teixeira et qui avait été présenté, en 1897, à l'Académie de Madrid, figurera très dignement à côté de tous ces Ouvrages et devra être consulté à l'avenir par tous ceux qui auront à s'occuper de l'étude des courbes spéciales.

Celles de ces courbes qui figurent dans son Ouvrage sont au nombre de plus de 150. On y voit figurer les anallagmatiques, les astroïdes, les cartésiennes, les cassiniennes, la cycloïde, les cissoïdes, les conchoïdes, les cubiques de Chasles, d'Agnesi, la

courbe du Diable, les courbes de Bertrand et de Lamé, les diverses spirales, la sinusoïde, la strophoïde, les développées, les hélices, le folium de Descartes; les hyper-, épi- et hypocycloïdes; les lemniscates, les logarithmiques, la logocyclique; les paraboles de Descartes, de Neill, de Wallis; les tractrices, la roulette de Delaunay, les rosaces, les serpentines, les tétracuspides, la trisectrice de Maclaurin, la courbe à longue inflexion, la polhodie, etc. Nous devons renoncer à les énumérer complètement. Bornons-nous donc à indiquer comment se trouve distribuée la riche matière utilisée par l'auteur.

Les deux premiers Chapitres, comprenant 90 pages, traitent des courbes remarquables du troisième ordre. C'est là que l'on trouvera la cissoïde, les cubiques de Rolle, d'Agnesi, de Chasles, de Newton, ainsi qu'une Notice succincte sur les cubiques en général. Près de 150 pages et trois Chapitres traitent des courbes spéciales du quatrième ordre : les spiriques de Perseus, les cassiniennes, la lemniscate, la cardioïde, les ovales de Descartes, la conchoïde de Nicomède, les bicirculaires, etc. Cette partie, comme la précédente, se termine par quelques renseignements généraux qui visent cette fois la théorie des courbes du quatrième ordre.

Le sixième Chapitre contient quelques courbes du sixième ordre ou d'un ordre supérieur : la courbe de Watt, l'astroïde et ses courbes parallèles, etc. Il contient quelques pages sur la théorie des courbes algébriques.

Avec le septième Chapitre et les suivants, nous abordons les courbes transcendantes, la logarithmique, la chaînette, la quadratrice de Dinostrate, les spirales, etc.

M. Teixeira ne se borne pas aux courbes planes et ses trois derniers Chapitres sont consacrés aux courbes les plus remarquables à double courbure, la fenêtre de Viviani, les biquadratiques sphériques, les épicycloïdes sphériques, les hélices, la polhodie et l'herpolhodie de Poinsot.

Ce rapide résumé suffira pour donner à nos lecteurs le désir de connaître la Publication que M. Gomes Teixeira a consacrée à un sujet dont l'étude est à la fois si attrayante et si répandue. Ces courbes qui ont été l'objet de tant de recherches, qui ont été créées par les esprits inventeurs de tous les temps, ont pris dans la Science une place qui ne leur sera plus enlevée.

Hermite, qui n'étudiait guère la Géométrie, pensait que les nombres et les figures de l'Analyse ne sont pas le produit arbitraire de notre esprit, qu'ils existent en dehors de nous, avec le même caractère de nécessité que les choses de la réalité objective, que nous nous bornons à les rencontrer ou à les étudier de la même manière que les physiciens ou les naturalistes mis en présence des phénomènes du monde matériel. Il était convaincu qu'aux spéculations les plus abstraites de l'Analyse correspondent des réalités qui existent en dehors de nous. Cette doctrine, il l'aurait appliquée *a fortiori* aux faits géométriques et aux éléments dont nos recherches ont doté la Science mathématique. Que la surface de Kummer existe en dehors de nous, ou qu'elle soit, si l'on veut, un produit de notre imagination et de notre faculté créatrice, elle montre combien est fausse l'opinion de ceux qui vont répétant qu'il n'y a, dans les Mathématiques, que ce qu'on y a mis. Comme si le peintre ne mettait sur sa toile que les couleurs qu'il s'est procurées chez le marchand. Que l'on repousse, si l'on veut, la doctrine d'Hermite, alors on sera conduit à admettre que le mathématicien, dans son domaine, est créateur comme l'artiste dans le sien. Nous regrettons que, sur ce point, Buffon (1), le grand natu-

---

(1) Voici le passage de Buffon auquel nous faisons allusion :

« Il y a plusieurs espèces de vérités et l'on a coutume de mettre dans le premier ordre les vérités mathématiques; ce ne sont cependant que des vérités de définitions; ces définitions portent sur des suppositions simples mais abstraites, et toutes les vérités en ce genre ne sont que des conséquences composées, mais toujours abstraites, de ces définitions. Nous avons fait des définitions; nous les avons composées de toutes les façons : ce corps de combinaisons est la Science mathématique; il n'y a donc rien dans cette science que ce que nous y avons mis; et les vérités qu'on en tire ne peuvent être que des expressions différentes sous lesquelles se présentent les suppositions que nous avons employées; ainsi, les vérités mathématiques ne sont que les répétitions exactes des définitions ou suppositions.... Ce que l'on appelle mathématiques se réduit donc à des identités d'idées et n'a aucune réalité; nous supposons, nous raisonnons sur nos suppositions, nous en tirons des conséquences, nous concluons; la conclusion ou dernière conséquence est une proposition vraie, relativement à notre supposition; mais cette vérité n'est pas plus réelle que la supposition elle-même. Ce n'est ni le lieu de nous étendre sur les usages des sciences mathématiques, non plus que sur l'abus qu'on peut en faire; il nous suffit d'avoir prouvé que les vérités mathématiques ne sont que des vérités de définition ou, si l'on veut, des expressions différentes de la même chose, et qu'elles ne sont vérités que relativement à ces définitions que nous avons faites : c'est pour cette raison qu'elles ont l'avantage d'être toujours exactes et démons-

raliste, ait contribué à propager des idées étroites dont se sont emparés ensuite les détracteurs de la plus belle des Sciences.

J. G.

HUDSON (R.-W.-H.-T.). — KUMMER'S QUARTIC SURFACE. 1 vol. in-8°, XI-222 pages. Cambridge, University Press, 1905.

Cette monographie de la surface de Kummer à seize points singuliers est l'œuvre d'un jeune géomètre qui est mort à l'âge de 29 ans, victime d'un accident de montagne. L'Ouvrage était en cours d'impression, au moment de la mort de l'auteur qui a lui-même corrigé les premières feuilles, assisté de MM. Bromwich et Bateman. Il a été terminé par MM. Bateman et Baker, qui n'ont eu qu'à suivre le manuscrit laissé par l'auteur et ils se sont attachés à le suivre avec tout le dévouement possible. Grâce à eux, quelque trace restera dans le développement de la Science d'un jeune homme qui paraissait heureusement doué et qu'un destin cruel a empêché de donner toute sa mesure.

Dans nos *Leçons sur la Théorie des Surfaces,* nous avons consacré une Note à la surface des ondes et exprimé le vœu que cette surface, objet de tant de travaux poursuivis sous les points de vue et dans les directions les plus variés, devînt l'objet d'une monographie où toutes ses propriétés se trouveraient rapprochées et coordonnées. Ce vœu a été, en partie, réalisé depuis; mais combien aurait-il eu plus de raison d'être et plus de portée si nous avions eu l'occasion de le formuler pour une Surface aussi intéres-

---

tratives, mais abstraites, intellectuelles et arbitraires. » — (*Discours préliminaire sur l'Histoire naturelle.*)

Chateaubriand, qui n'aimait guère la recherche scientifique, s'est emparé de ce passage de Buffon dans son *Génie du Christianisme :*

« Si nous en croyons Buffon, écrit-il, ce qu'on appelle *verites mathématiques* se réduit à des identités d'idées et n'a aucune réalité. »

sante que celle à laquelle le nom de Kummer demeurera attaché. La découverte d'êtres géométriques, ainsi doués des propriétés les plus merveilleuses, honore, en même temps que son auteur, la Science mathématique tout entière. Il faut sans doute, pour en sentir toute l'importance et la beauté, être soi-même géomètre. Mais qu'importe, et, du reste, ne faut-il pas que la Science confère quelques privilèges à ses adeptes et leur procure des plaisirs qui échappent au commun des mortels. Dans l'étude de cette admirable Surface, toutes les disciplines viennent converger : l'Algèbre et la Géométrie analytique moderne, la Géométrie infinitésimale, la Théorie des fonctions dans ce qu'elle a de plus élevé. En prenant pour centre la surface elle-même, on pourrait faire le cours le plus suggestif et le plus élevé.

En choisissant ce beau sujet pour sa première publication, M. Hudson en avait compris tout l'intérêt et lui avait donné tous ses soins. Il s'était mis au courant de tout ce que les géomètres avaient publié sur la surface, et l'on constate, en plusieurs passages, combien son érudition était devenue déjà très sûre et très étendue. La division de l'Ouvrage est excellente. Les matières y sont disposées dans l'ordre le plus propre à intéresser le lecteur. Nous avons affaire à un travail qui pourra rendre des services aux géomètres les plus exercés et sera de nature à inspirer le goût de la Géométrie à ceux qui entrent dans la carrière. G. D.

BLYTHE (W.-H.). — ON MODELS OF CUBIC SURFACES. 1 vol. in-8°, XII-106 pages. Cambridge, University Press, 1905.

L'auteur de ce petit Ouvrage avait commencé à construire des modèles de surfaces du troisième degré lorsqu'il apprit qu'une série très complète avait été exécutée en Allemagne et présentée par M. Klein à l'Université de Chicago. Renonçant à travailler dans cette voie, il a voulu du moins publier un Ouvrage donnant un aperçu des méthodes analytiques et géométriques que l'on a

employées dans l'étude des surfaces cubiques, en ayant égard tout particulièrement à celles de ces méthodes qui permettent de prendre une idée de la forme de la surface et même d'en construire des modèles.

Une introduction fait connaître l'équation générale de la surface, les différents espèces de points singuliers qu'elle peut contenir et le nombre de ces singularités.

Le Chapitre premier contient l'étude des plans tangents triples, des lignes droites et les équations des différentes surfaces particulières d'après les travaux de Schläfli.

Le Chapitre II traite des réseaux projectifs et des méthodes géométriques employées par M. Reye.

Les Chapitres suivants sont consacrés surtout à l'étude détaillée des différents modèles.

Les renseignements et les indications donnés au cours de l'Ouvrage seront consultés avec fruit par tous ceux qu'intéresse l'étude si attrayante des surfaces cubiques. J. G.

ANNUAIRE pour l'an 1906, publié par le Bureau des Longitudes avec des Notices scientifiques. 1 vol. in-18, IV-712 A-161 B-18 C-8 D-41 pages, Paris, Gauthier-Villars.

Conformément aux dispositions inaugurées dans l'*Annuaire* de 1904, le présent Volume contient des Tableaux détaillés relatifs à la Physique et à la Chimie et ne contient pas de données géographiques et statistiques. Ce sera le contraire pour l'*Annuaire* de 1907 qui ne donnera pas les Tableaux physiques et chimiques et où seront, au contraire, développés tous ceux qui se rapportent à la Métrologie, aux Monnaies, à la Géographie et à la Statistique. La même alternative sera observée à l'avenir.

En vertu du même principe, on a inséré dans le présent *Annuaire* le Tableau complet des éléments des petites planètes, mais on a supprimé le calcul des altitudes par le baromètre, les paral-

laxes stellaires, les mouvements propres, la spectroscopie stellaire.

La partie physique contient les éléments magnétiques en divers points du globe, des Tableaux permettant la correction et la comparaison des baromètres et des thermomètres, la dilatation des divers liquides, les tensions de vapeur de certains liquides et, en particulier, du mercure; le Tableau des densités de nombreux liquides et mélanges de liquides; des données relatives à la compressibilité des liquides, à l'élasticité des solides, au frottement des solides, à la viscosité des liquides et des gaz; un Tableau de longueurs d'ondes, la solubilité de divers corps dans l'eau à 0° et à 100° et dans l'alcool, le pouvoir diélectrique de plusieurs isolants; des Tableaux d'indices de réfraction des liquides, des points critiques, des températures d'ébullition, des résistances électriques, soigneusement revus et complétés. La partie physique se termine enfin par un Tableau des pouvoirs rotatoires, qui sera certainement très apprécié par les chimistes.

La partie chimique a été complétée par un Tableau des principaux alliages. Enfin on a publié de nouveau les données thermochimiques, soigneusement revues par M. Berthelot.

Les Notices de cette année sont tout entières consacrées aux éclipses. Il y a d'abord une Notice étendue de M. Bigourdan contenant les *Instructions sommaires sur les observations que l'on peut faire pendant une éclipse,* puis deux comptes rendus de M. Bigourdan et de M. Janssen se rapportant à l'éclipse totale du 30 août 1905.

Ces indications rapides suffiront à montrer à nos lecteurs que l'*Annuaire du Bureau des Longitudes,* toujours à la hauteur de son ancienne réputation, suit pas à pas le développement croissant de la production scientifique et continuera, sous sa forme nouvelle, à rendre les précieux services qu'on attend de lui chaque année.

J. G.

BUCHERER (A.-H.). — Elemente der Vector-Analysis. Mit Beispielen aus der theoretischen Physik. 2e éd. 1 vol. in-8°, VIII-103 pages. Leipzig, Teubner, 1905.

La première édition de ces *Eléments d'Analyse vectorielle* a paru en 1903; la rapidité avec laquelle elle a été épuisée montre qu'ils répondaient à un besoin. Dans la seconde édition, M. Bucherer a adopté les notations de l'*Encyclopédie des Sciences mathématiques*. Je crois utile de traduire (librement) les dernières pages, où ces notations sont expliquées et où sont reproduites les formules essentielles établies dans le cours du livre, dont le contenu apparaîtra ainsi nettement au lecteur. Je dois ajouter que l'auteur, toutes les fois qu'il en a eu l'occasion, a eu soin de faire ressortir la signification physique des théories qu'il a développées.

L'auteur représente systématiquement les vecteurs par des caractères allemands; j'emploierai dans ce qui suit des caractères (romains) gras, majuscules ou non; les caractères ordinaires désigneront des nombres positifs ou négatifs; les vecteurs fondamentaux **i**, **j**, **k**, de longueur égale à l'unité, portés par les axes coordonnés, forment un trièdre trirectangle à disposition directe. La juxtaposition d'un nombre et d'un vecteur représente le vecteur multiplié par le nombre; dans une somme où figurent des vecteurs, les signes +, — ont la signification d'addition ou de soustraction géométrique. Pour désigner les équivalents algébriques des projections d'un vecteur, on emploie la même lettre que pour indiquer le vecteur, mais en caractères ordinaires, et en l'affectant des indices 1, 2, 3; ainsi A_1, A_2, A_3 désignent les équivalents algébriques des projections sur les axes du vecteur **A**. Au contraire, le symbole $\mathbf{A}_1$ désigne un *axe*, un vecteur égal à l'unité porté sur la même droite que le vecteur **A**, dont l'équivalent algébrique se désigne alors par A. On a

$$(1) \qquad \mathbf{A} = \mathbf{i}A_1 + \mathbf{j}A_2 + \mathbf{k}A_3.$$

$$(2) \qquad \mathbf{A} = A\mathbf{A}_1.$$

Le produit scalaire (ou intérieur) de deux vecteurs se repré-

sente en enfermant les symboles entre des parenthèses rondes, et le produit extérieur en les enfermant entre des crochets; on a donc

(3) $$(\mathbf{AB}) = \mathrm{AB}\cos(\mathbf{AB}),$$

en désignant par cos(**AB**) l'angle des deux directions positives sur les axes qui portent les vecteurs **A**, **B**; puis

(4) $$[\mathbf{AB}] = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix}.$$

(5) $$\Big[\mathbf{A}[\mathbf{BC}]\Big] = \mathbf{B}(\mathbf{AC}) - \mathbf{C}(\mathbf{AB}).$$

(6) $$(\mathbf{A}[\mathbf{BC}]) = \begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix}.$$

L'opération ∇ s'énonce *nabla* et est définie par la formule

(7) $$\nabla = \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z};$$

un peu plus loin **r** désignera un vecteur d'origine fixe, en sorte qu'on pourra écrire, en désignant par x, y, z les équivalents algébriques des projections de ce vecteur sur les axes et par U un vecteur fixe, partant de l'origine des coordonnées,

$$\mathbf{r} = \mathbf{i}x + \mathbf{j}y + \mathbf{k}z + \mathrm{U};$$

on a

(8) $$\nabla\mathbf{A} = \frac{\partial A_1}{\partial x} + \frac{\partial A_2}{\partial y} + \frac{\partial A_3}{\partial z} = \mathrm{div}\,\mathbf{A} \text{ (divergence de } \mathbf{A}\text{)},$$

(9) $$\nabla A = \mathbf{i}\frac{\partial A}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial A}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial A}{\partial z} = \text{gradient de A},$$

(10) $$[\nabla\mathbf{A}] = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_1 & A_2 & A_3 \end{vmatrix} = \mathrm{rot}\,\mathbf{A} \text{ (rotation ou tourbillon de } \mathbf{A}\text{)},$$

(11) $$\frac{\partial A}{\partial r} = (\mathbf{r}_1\nabla)A = \mathbf{r}_1(\nabla A),$$

(12) $$\mathbf{A}\,d\mathbf{A}_1 = 0,$$

(13) $$\nabla r = \mathbf{r}_1, \qquad \nabla \mathbf{r}_1 = \frac{2}{r}, \qquad \nabla \mathbf{r} = 3;$$

(14) $$\nabla \frac{1}{r} = -\frac{\mathbf{r}_1}{r^2},$$

(15) $$\operatorname{rot} \nabla A = 0,$$

(16) $$\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{A} = 0,$$

(17) $$\nabla \mathbf{AB} = \mathbf{A}(\nabla \mathbf{B}) + (\mathbf{B}.\nabla \mathbf{A}),$$

(18) $$\nabla [\mathbf{AB}] = \mathbf{B} \operatorname{rot} \mathbf{A} - \mathbf{A} \operatorname{rot} \mathbf{B},$$

(19) $$\operatorname{rot} A\mathbf{B} = A \operatorname{rot} \mathbf{B} - [\nabla A.\mathbf{B}],$$

(20) $$\operatorname{rot}^2 \mathbf{A} = \nabla \operatorname{div} \mathbf{A} - \nabla^2 \mathbf{A},$$

(21) $$\operatorname{rot} \mathbf{AB} = \mathbf{A}\nabla\mathbf{B} - \mathbf{B}\nabla\mathbf{A} + (\mathbf{B}\nabla)\mathbf{A} - (\mathbf{A}\nabla)\mathbf{B},$$

(22) $$(\mathbf{A}\nabla)\mathbf{B} = \nabla_{\mathbf{A}}(\mathbf{AB}) + [\operatorname{rot} \mathbf{BA}].$$

L'indice **A** signifie que le vecteur A doit être regardé comme constant.

(23) $$\nabla^2 \mathbf{A} = \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial z^2},$$

(24) $$\nabla^2 A = \operatorname{div} \nabla A = \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial z^2}.$$

L'élément vectoriel de surface $d\mathbf{g}$ désigne un vecteur normal à l'élément de surface, dont la longueur est mesurée par le même nombre que la surface élémentaire et dont la direction est déterminée par le sens dans lequel est décrit le petit contour, de telle sorte que le mobile décrivant ce contour paraisse tourner dans le sens direct autour de l'observateur traversé des pieds à la tête par le vecteur. Les éléments vectoriels d'une surface fermée sont toujours dirigés vers l'extérieur, et leur direction détermine par conséquent le sens dans lequel sont décrits les petits contours. En désignant par $d\mathbf{r}$ un élément de courbe et par $d\tau$ un élément de volume, on a

(25) $$\int \mathbf{A}\, d\mathbf{r} = \int \operatorname{rot} \mathbf{A}\, d\mathbf{g} \qquad \text{(Stokes)},$$

$$\int \mathbf{A}\, d\mathbf{g} = \int \operatorname{div} \mathbf{A}\, d\tau \qquad \text{(Gauss)},$$

$$\int A\, d\mathbf{g} = \int \nabla A\, d\tau,$$

$$\int [\mathbf{A}\, d\mathbf{g}] = -\int \operatorname{rot} \mathbf{A}\, d\tau \qquad \text{(Föppl)}.$$

Soient U, V des fonctions continues de point dans l'espace, les trois équations (26) expriment les théorèmes de Green, l'équation (27) le théorème de Beltrami, et l'équation (28) le principe de Huygens :

$$(26)\quad \left\{\begin{aligned} &\int (\nabla U\, \nabla V)\, d\tau = \int U(\nabla V)\, d\mathbf{g} - \int U\nabla^2 V\, d\tau, \\ &4\pi V_0 = -\int \nabla^2 V \frac{d\tau}{r} + \int \left(\frac{1}{r}\nabla V - V\nabla\frac{1}{r}\right) d\mathbf{g}, \\ &4\pi V_0 = \int G\nabla^2 V\, d\tau + \int V\nabla G\, d\mathbf{g}; \end{aligned}\right.$$

$$4\pi V_0 = \int \nabla_r \frac{V}{r}\, d\mathbf{g} - \int (\mathbf{r}_1\nabla)\frac{V}{r}\mathbf{r}_1\, d\mathbf{g} + \int \left((\mathbf{r}_1\nabla)^2 V - \nabla_r^2 V\right)\frac{d\tau}{r},$$

$$4\pi V_0 = \int V_r \frac{V}{r}\, d\mathbf{g} - \int (\mathbf{r}_1\nabla)\frac{V}{r}\mathbf{r}_1\, d\mathbf{g}.$$

J. T.

THOMAE (J.). — Sammlung von Formeln und Saetzen aus dem Gebiete der elliptischen Funktionen nebst Anwendungen. 1 vol. in-4°. 44 pages. Teubner, 1905.

Le temps où l'on discutait sur les mérites respectifs des fonctions et des notations de Jacobi et de Weierstrass est sans doute passé; la notation de Weierstrass n'a pas relégué dans l'histoire celle de Jacobi. Les fonctions $\wp$, σ, . . . sont venues s'adjoindre aux fonctions sn, cn, dn, $\mathfrak{S}$; elles vivent et vivront, à côté, de leur vie propre. Qu'importera, pour les générations qui viennent, le demi-siècle qui les sépare? Personne n'y pensera et les mathématiciens emploieront les unes ou les autres, quelquefois peut-être d'après leurs préférences et leurs habitudes personnelles, mais surtout d'après la façon dont ces fonctions s'adapteront aux problèmes qu'ils auront en vue. L'admirable Recueil de *Formules et propositions pour l'emploi des fonctions elliptiques*, de M. Schwarz, reste malheureusement inachevé; il continuera, tel quel, d'être

utilisé par tous ceux qui se serviront de ces fonctions, ou qui voudront les étudier pour elles-mêmes.

Dans ce Recueil, M. Schwarz n'avait fait qu'une petite place aux fonctions de Jacobi : on peut le regretter; on est d'autant moins en droit de le lui reprocher qu'il avait essentiellement en vue la vulgarisation des notations de Weierstrass et qu'il n'a pas achevé son œuvre; mais la place même qu'il a dû leur faire, pour ce qui concerne le calcul numérique, montre assez combien ces fonctions sont dans la nature des choses et, pour ainsi dire, inévitables.

Si le Recueil de M. Schwarz n'existait pas, il est vraisemblable que M. Thomae aurait voulu faire une place plus large aux fonctions de Weierstrass, qui ne figurent guère, dans celui qu'il publie, que par leur définition. Il a pensé avec raison qu'un Recueil, analogue à celui de M. Schwarz, mais consacré aux fonctions de Jacobi, pourrait rendre de grands services. Son travail ne manquera pas d'être accueilli avec faveur et reconnaissance par tous ceux qui sont bien aises de pouvoir retrouver rapidement soit une formule dont ils ont besoin, soit l'ensemble d'une théorie que le rapprochement des formules et des propositions fondamentales permet de voir d'un coup d'œil quand on l'a étudiée un peu à fond. Le Recueil de M. Thomae prendra place dans les bibliothèques mathématiques, à côté de celui de M. Schwarz.

Il est divisé en deux parties consacrées l'une à la théorie, l'autre à diverses applications. La première comporte vingt-six pages et contient, sous une forme très condensée, les formules et les propositions les plus essentielles. Relativement aux notations, je signale quelques changements avec les habitudes : au lieu d'écrire sn, cn, dn, M. Thomae écrit *sa*, *ca*, *da*; il aura voulu sans doute, par la lettre *a*, rappeler l'*amplitude;* l'emploi de caractères romains, pour les signes fonctionnels, et non de lettres italiques, est bien consacré par l'usage, dans les livres imprimés; je ne vois pas de raison pour s'en écarter, puisqu'il peut éviter quelques confusions : il est vrai que ces confusions ne sont pas très à craindre, puisqu'elles ne se produisent guère dans l'écriture courante. Notons aussi l'introduction des fonctions

$$tga\,u = \frac{sa\,u}{ca\,u}, \qquad ja\,u = k'\,\frac{sa\,u}{da\,u}.$$

M. Glaisher, si je ne me trompe, a proposé jadis une assez ingénieuse notation pour désigner les inverses des fonctions sn, cn, dn, qu'il écrivait ns, nc, nd et leurs quotients mutuels, qu'il écrivait $sc = \frac{sn}{cn}$, $cs = \frac{cn}{sn}$, ...

M. Thomae part des quatre fonctions $\mathfrak{S}$ à deux indices, comme séries et comme produits; il écrit les formules relatives à la périodicité, les formules d'addition, les formules qui relient les fonctions $\mathfrak{S}(z, \tau)$ aux fonctions $\mathfrak{S}(2z, 4\tau)$, $\mathfrak{S}(z, 4\tau)$, la définition et les propriétés relatives à la périodicité des fonctions sn, cn, ..., la série qui donne q au moyen de k', les formules pour le calcul de K, K', les dérivées et les développements en séries entières des fonctions elliptiques, les théorèmes de Liouville, les formules fondamentales de la transformation linéaire des fonctions $\mathfrak{S}$; il s'arrête un instant sur la façon dont varient les fonctions sn, cn, dn pour des valeurs réelles ou purement imaginaires de u, soit lorsqu'on a $0 < k < 1$, soit dans le cas où $\frac{k}{i}$ est réel et positif; il passe ensuite aux formules de transformation qui, pour les fonctions elliptiques, proviennent du changement de τ en 4τ; donne des indications pratiques sur le calcul de q, K, u quand les valeurs des fonctions elliptiques et du module sont données, écrit les formules de Landen. Il introduit ensuite les fonctions Z (les dérivées logarithmiques des fonctions Θ) et les intégrales elliptiques de deuxième et de troisième espèce, les trois formes normales du radical (Riemann, Legendre, Weierstrass); montre le passage de l'une à l'autre, écrit les équations différentielles pour K et K', dit un mot de la moyenne arithmético-géométrique, indique les notations de Legendre, donne les propriétés les plus importantes des intégrales de première et de troisième espèce et termine cette première Partie en écrivant les développements en série trigonométrique des logarithmes des fonctions elliptiques.

Les applications concernent les différents pendules, la rectification de l'ellipse, la quadrature et la rectification de l'ellipse sphérique; la construction, d'après Jacobi, du théorème d'addition; le problème de fermeture de Poncelet-Steiner, l'addition et la division des arcs de lemniscate, diverses applications à la représentation conforme, le potentiel logarithmique, la surface minima

de M. Schwarz, la forme d'un fil attiré par l'axe des x proportionnellement à la distance, les lignes géodésiques de l'ellipsoïde de révolution, les courbes du troisième ordre. J. T.

MÉLANGES.

SUR LA TRANSFORMATION PAR DIRECTIONS RÉCIPROQUES.

Note de M. BUTIN.

La transformation par directions réciproques se rattache à la symétrie par rapport à un plan dans un espace à quatre dimensions. On peut, en effet, énoncer la proposition suivante :

Les axes de coordonnées étant rectangulaires, soient x, y, z les coordonnées du centre d'une semi-sphère, R *la valeur algébrique de son rayon; si, à chaque semi-sphère* (x, y, z, R) *de l'espace ordinaire* E_3, *on fait correspondre le point qui a pour coordonnées* x, y, z, $t = i$R *dans l'espace à quatre dimensions* E_4, *la transformation par directions réciproques représente, en général, sur* E_3, *la symétrie par rapport à un plan dans* E_4.

L'exactitude de cette proposition se vérifie aisément sur les formules suivantes, données par M. Darboux,

$$x' = x, \qquad z' = 2\,\frac{1+k^2}{1-k^2} - \frac{2k\mathrm{R}}{1-k^2},$$

$$y' = y, \qquad \mathrm{R}' = \frac{2kz}{1-k^2} - \frac{1+k^2}{1-k^2}\mathrm{R}.$$

Si l'on y remplace R par $-it$ et R′ par $-it'$, les valeurs

obtenues pour x', y', z', t' sont les coordonnées du symétrique du point (x, y, z, t) par rapport au plan représenté par l'équation

$$kz + it = 0.$$

Cas particulier. — Dans le cas particulier où le plan E_4, par rapport auquel on fait la symétrie, est parallèle au plan $t = 0$ (qui représente l'espace E_3), la transformation par directions réciproques devient la dilatation.

Conséquences. — I. Construction des transformées par directions réciproques d'une semi-surface Σ.

Les semi-sphères, tangentes à Σ en ses différents points, ont pour images sur E_4 les points d'une variété V formée de droites isotropes et dont la trace sur E_3 est Σ : *toute transformée de Σ par directions réciproques est la trace sur E_3 d'une variété V' déduite de V par symétrie par rapport à un plan de E_4.*

II. La condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une transformation par directions réciproques laissant invariable une semi-surface Σ, c'est que Σ soit une anticaustique par réfraction d'une surface S, les rayons lumineux étant perpendiculaires à un plan fixe.

SUR UNE PROPRIÉTÉ DE LA SÉRIE HYPERGÉOMÉTRIQUE ;

PAR M. C. CAILLER.

Dans une Note insérée au *Bulletin de la Société Mathématique de France* (t. XXXI, 1903) (¹), M. J. Hadamard a obtenu, comme conséquence de ses recherches sur les équations aux dérivées partielles, une intégrale définie remarquable, relative aux

(¹) *Voir* aussi : *Verhandlungen des Math.-Kongr. Heidelberg*, 1904, p. 270-271.

fonctions de Bessel, que j'avais moi-même étudiée antérieurement dans deux publications (¹). La méthode employée par M. Hadamard, indirecte mais très puissante, lui a fourni en outre une relation analogue où interviennent certaines fonctions hypergéométriques particulières.

Bien que l'équation dont il s'agit ne soit qu'un résultat, pour ainsi dire isolé, sans connexion avec la théorie générale de la fonction hypergéométrique, elle n'en constitue pas moins une propriété caractéristique de cette fonction et, à ce titre, mérite d'attirer l'attention.

Or, il est possible de retrouver la relation de M. Hadamard par une voie directe, élémentaire et singulièrement rapide, et qui permet, en outre, de la généraliser d'une manière appréciable.

Soient $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ et $F(\alpha', \beta', \gamma', x)$ deux séries hypergéométriques telles que les sommes des paramètres de même rang soient égales deux à deux, ou

$$(1) \qquad \alpha + \alpha' = \beta + \beta' = \gamma + \gamma',$$

je dis qu'on aura l'identité

$$(2) \quad \left\{ \begin{aligned} &\int_0^1 z^{\gamma-1}(1-z)^{\gamma'-1} F(\alpha, \beta, \gamma, xz) F[\alpha', \beta', \gamma', y(1-z)]\, dz \\ &\quad = \frac{(\gamma-1)!\,(\gamma'-1)!}{(\gamma+\gamma'-1)!}(1-y)^{\alpha-\beta'} F(\alpha, \beta, \gamma+\gamma', x+y-xy). \end{aligned} \right.$$

En effet, si l'on différentie cette équation par rapport à x, en tenant compte des identités

$$\frac{d}{dx} F(\alpha, \beta, \gamma, xz) = \frac{\alpha\beta}{\gamma} z\, F(\alpha+1, \beta+1, \gamma+1, xz)$$

et

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dx} F(\alpha, \beta, \gamma+\gamma', x+y-xy) \\ &\quad = \frac{\alpha\beta}{\gamma+\gamma'}(1-y) F(\alpha+1, \beta+1, \gamma+\gamma'+1, x+y-xy), \end{aligned}$$

on la voit se reproduire avec ce seul changement que α, β, γ sont

(¹) *Bulletin des Sciences Mathématiques*, 1899 et *Mémoires de la Société de Physique de Genève*, 1904.

devenus $\alpha+1$, $\beta+1$, $\gamma+1$, ce qui n'affecte pas les conditions (1).

D'autre part, la propriété connue

$$F(\alpha, \beta, \gamma, x) = (1-x)^{\gamma-\alpha-\beta} F(\gamma-\alpha, \gamma-\beta, \gamma, x),$$

jointe aux mêmes conditions (1), permet d'écrire le second membre de l'équation (2) sous la forme

$$\frac{(\gamma-1)!\,(\gamma'-1)!}{(\gamma+\gamma'-1)!}(1-x)^{\alpha'-\beta} F(\alpha', \beta', \gamma+\gamma', x+y-xy),$$

symétrique de la précédente. Ainsi l'identité à démontrer se comporte également d'une manière invariante vis-à-vis de la dérivation par rapport à la variable y. Si donc la différence φ des deux membres de (2) s'annule pour les valeurs particulières $x=0$ et $y=0$, on aura pour ces mêmes valeurs $\dfrac{\partial^{m+n}\varphi}{\partial x^m\,\partial y^n}=0$, et la fonction φ, qui est analytique en x et en y, sera identiquement nulle.

En résumé, il suffit de contrôler l'équation dans le seul cas $x=0$ et $y=0$; elle se réduit alors à

$$\int_0^1 z^{\gamma-1}(1-z)^{\gamma'-1}\,dz = \frac{(\gamma-1)!\,(\gamma'-1)!}{(\gamma+\gamma'-1)!},$$

ce qui est exact.

Si les constantes γ et γ' n'ont pas, toutes les deux, leur partie réelle positive, l'intégrale (2) est divergente et le résultat précédent devient illusoire. On doit alors le formuler comme suit; en intégrant la fonction

$$f(z) = z^{\gamma-1}(1-z)^{\gamma'-1} F(\alpha, \beta, \gamma, xz)\, F[\alpha', \beta', \gamma', y(1-z)]$$

sur un double lacet L enveloppant les points $z=0$ et $z=1$ et tel qu'en le suivant la valeur finale du facteur $z^{\gamma-1}(1-z)^{\gamma'-1}$ soit égale à la valeur initiale, on a identiquement

$$\int_L f(z)\,dz = (1-y)^{\alpha-\beta'} F(\alpha, \beta, \gamma+\gamma', x+y-xy)\int_L z^{\gamma-1}(1-z)^{\gamma'-1}\,dz.$$

La démonstration est toute pareille à celle qu'on vient de lire.

Le principe même de notre démonstration montre qu'on ne saurait généraliser la relation (2) par simple différentiation; on atteint ce résultat en invoquant les propriétés connues des séries

hypergéométriques contiguës. Partons, à cet effet, des relations

$$\frac{d}{dx} x^{\alpha} \mathrm{F}(\alpha, \beta, \gamma, x) = \alpha x^{\alpha-1} \mathrm{F}(\alpha+1, \beta, \gamma, x),$$

$$\frac{d}{dx} x^{\beta} \mathrm{F}(\alpha, \beta, \gamma, x) = \beta x^{\beta-1} \mathrm{F}(\alpha, \beta+1, \gamma, x),$$

$$\frac{d}{dx} x^{\gamma-1} \mathrm{F}(\alpha, \beta, \gamma, x) = (\gamma-1) x^{\gamma-2} \mathrm{F}(\alpha, \beta, \gamma-1, x),$$

puis représentons par e, e', f, f' quatre entiers positifs quelconques. Faisons encore, pour abréger,

$$\mathrm{F}_1 = \mathrm{F}(\alpha, \beta, \gamma, xz) \quad \text{et} \quad \mathrm{F}_2 = \mathrm{F}[\alpha', \beta', \gamma', y(1-z)],$$

enfin, désignons par C_1, C_2, ... certaines constantes dont il serait facile d'assigner la valeur dans chaque cas. Nous aurons alors

$$x^{f-\gamma+1}\left(\frac{d}{dx}\right)^{f} x^{\gamma-\alpha-e-1}\left(x^2\frac{d}{dx}\right)^{e} x^{\alpha}\mathrm{F}_1 = \mathrm{C}_1\mathrm{F}(\alpha+e, \beta, \gamma-f, xz).$$

et

$$y^{f'-\gamma'+1}\left(\frac{d}{dy}\right)^{f'} y^{\gamma'-\beta'-e'-1}\left(y^2\frac{d}{dy}\right)^{e'} y^{\beta'}\mathrm{F}_2 = \mathrm{C}_2\mathrm{F}[\alpha', \beta'+e', \gamma'-f', y(1-z)].$$

Ainsi, en appliquant à l'intégrale (2) l'opérateur complexe

$$\Delta = x^{f-\gamma+1}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{f} \cdots x^{\alpha} \times y^{f'-\gamma'+1}\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^{f'} \cdots y^{\beta'}$$

formé de la combinaison des deux précédents, on trouvera

$$(3) \quad \begin{cases} \displaystyle\int_0^1 z^{\gamma-1}(1-z)^{\gamma'-1}\mathrm{F}(\alpha+e, \beta, \gamma-f, xz)\,\mathrm{F}[\alpha', \beta'+e', \gamma'-f', y(1-z)]\,dz \\ \quad = \mathrm{C}\,\Delta(1-y)^{\alpha-\beta'}\mathrm{F}(\alpha, \beta, \gamma+\gamma', x+y-xy). \end{cases}$$

Ou bien encore, en changeant quelque peu les notations, l'intégrale

$$(4) \quad \int_0^1 z^{\gamma+f-1}(1-z)^{\gamma'+f'-1}\mathrm{F}(\alpha, \beta, \gamma, xz)\,\mathrm{F}[\alpha', \beta', \gamma', y(1-z)]\,dz$$

s'exprime en fonction linéaire de la série

$$\mathrm{F}(\alpha-e, \beta, \gamma+\gamma'+f+f', x+y-xy)$$

et de ses dérivées jusqu'à un certain ordre, toutes les fois que les paramètres vérifient la double condition

$$\alpha + \alpha' = \gamma + \gamma' + f + f' + e,$$
$$\beta + \beta' = \gamma + \gamma' + f + f' + e'.$$

les e et f étant supposés entiers et positifs.

Si l'un de ces entiers devenait négatif, la recherche de (3) ou (4) constitue un problème du même genre mais plus complexe; les dérivations sont alors remplacées par des intégrations et celles-ci ne seront pas toujours possibles en termes finis. L'énumération complète des cas d'intégrabilité serait facile, mais d'une longueur rebutante. Bornons-nous donc à l'exemple suivant.

Dans (3), faisons $\gamma = 1$, $\gamma' = 1$, $e = e' = f = 0$, $f' = -1$. L'opérateur Δ se réduit à $\frac{1}{y}\left(\frac{d}{dy}\right)^{-1}$, tandis que les conditions (1) donnent

$$\alpha + \alpha' = \beta + \beta' = 2 \qquad \text{ou} \qquad \alpha' = 2 - \alpha, \qquad \beta' = 2 - \beta.$$

En intégrant le second membre de (4) et divisant par y, nous avons

$$\frac{C(1-x)^{1-\alpha-\beta}}{y}\left[F(\alpha'-1, \beta'-1, 1, x+y-xy) - \varphi(x)\right],$$

expression qui doit rester holomorphe pour $y = 0$; on aura donc

$$\varphi(x) = F(\alpha'-1, \beta'-1, 1, x)$$

et, la constante se trouvant égale au quotient $\frac{1}{(1-\alpha)(1-\beta)}$, on obtient finalement

$$\int_0^1 F(\alpha, \beta, 1, xz)\, F[2-\alpha, 2-\beta, 2, y(1-z)]\, dz$$
$$= \frac{(1-x)^{1-\alpha-\beta}}{y(1-\alpha)(1-\beta)}\left[F(1-\alpha, 1-\beta, 1, x+y-xy) - F(1-\alpha, 1-\beta, 1, x)\right].$$

C'est, sous une forme légèrement plus simple, le résultat même dû à M. Hadamard.

Je terminerai cette courte Note en observant que le mode de démonstration si simple employé plus haut pour établir l'équation (2) n'est nullement spécial à cet exemple, mais qu'on pourra

s'en servir utilement dans nombre de recherches plus ou moins semblables.

Ainsi supposons qu'il s'agisse de trouver les cas où l'intégrale, supposée convergente et dans laquelle p et q désignent deux entiers positifs

$$\int_0^1 z^{\lambda}(1-z)^{\mu}\,\mathrm{F}[\alpha,\beta,\gamma,xz^p(1-z)^q]\,dz,$$

s'exprime sous la forme

$$\mathrm{C}\,\mathrm{F}(a,b,c,mx).$$

Si l'on admet que cette représentation doit être invariante par rapport à la dérivation, on conclut immédiatement

$$\mathrm{C}=\frac{\lambda!\,\mu!}{(\lambda+\mu+1)!},$$

puis

$$\begin{array}{llll}
\lambda=p\alpha+p', & \beta=\alpha+\beta', & a=\alpha+a', & m=\dfrac{p^p q^q}{(p+q)^{p+q}}.\\
\mu=q\alpha+q', & \gamma=\alpha+\gamma', & b=\alpha+b', & \\
 & & c=\alpha+c', &
\end{array}$$

La lettre α reste indéterminée tandis que p, q, p', q', β', γ', a', b', c' sont des nombres constants indépendants du paramètre α. Ceci posé, la dérivation change α en $\alpha+1$, et le second membre acquiert le facteur $m\dfrac{ab\gamma}{\alpha\beta c}$; pour l'exactitude de la représentation, il faut et il suffit que C acquière ce même facteur $m\dfrac{ab\gamma}{\alpha\beta c}$ par le changement de α en $\alpha+1$. De là résulte d'abord la valeur de m inscrite au tableau précédent; il faut de plus que l'expression

$$(5)\qquad \frac{\left(\alpha+\frac{p'+1}{p}\right)\left(\alpha+\frac{p'+2}{p}\right)\cdots\left(\alpha+\frac{p'+p}{p}\right)\left(\alpha+\frac{q'+1}{q}\right)\cdots\left(\alpha+\frac{q'+q}{q}\right)}{\left(\alpha+\frac{p'+q'+2}{p+q}\right)\left(\alpha+\frac{p'+q'+3}{p+q}\right)\cdots\left(\alpha+\frac{p'+q'+p+q+1}{p+q}\right)}$$

se réduise par suppression des facteurs communs à

$$(6)\qquad \frac{(\alpha+a')(\alpha+b')(\alpha+\gamma')}{\alpha(\alpha+\beta')(\alpha+c')}.$$

Dans le cas où l'une ou l'autre des lettres p ou q devient nulle,

on a $m = 1$; il faut en même temps supprimer dans (5) les binomes $\alpha + \frac{p'+m}{p}$, $\alpha + \frac{q'+n}{q}$, qui deviennent infinis, mais cette fraction doit toujours se réduire à la forme (6). Le problème admet un nombre de solutions fini mais fort grand et l'on pourrait en dresser le tableau complet. Nous nous contenterons de rassembler ici quelques-unes de ces formules choisies parmi les plus remarquables.

$$\int_0^1 z^{\beta-1}(1-z)^{\gamma-\beta-1}(1-xz)^{-\alpha}\,dz = \frac{(\beta-1)!\,(\gamma-\beta-1)!}{(\gamma-1)!}\,F(\alpha, \beta, \gamma, x),$$

$$\int_0^1 z^{\alpha'-1}(1-z)^{\alpha-\alpha'-1}\,F(\alpha, \beta, \gamma, xz)\,dz$$
$$= \frac{(\alpha'-1)!\,(\alpha-\alpha'-1)!}{(\alpha-1)!}\,F(\alpha', \beta, \gamma, x),$$

$$\int_0^1 z^{\beta'-1}(1-z)^{\beta-\beta'-1}\,F(\alpha, \beta, \gamma, xz)\,dz$$
$$= \frac{(\beta'-1)!\,(\beta-\beta'-1)!}{(\beta-1)!}\,F(\alpha, \beta', \gamma, x),$$

$$\int_0^1 z^{\gamma-1}(1-z)^{\gamma'-\gamma-1}\,F(\alpha, \beta, \gamma, xz)\,dz$$
$$= \frac{(\gamma-1)!\,(\gamma'-\gamma-1)!}{(\gamma'-1)!}\,F(\alpha, \beta, \gamma', x),$$

$$\int_0^1 z^{2\gamma-2}(1-z)^{2\alpha-2\gamma-1}\,F(\alpha, \beta, \gamma, xz^2)\,dz$$
$$= \frac{(2\gamma-2)!\,(2\alpha-2\gamma-1)!}{(2\alpha-2)!}\,F\left(\beta, \gamma-\frac{1}{2}, \alpha-\frac{1}{2}, x\right),$$

$$\int_0^1 z^{2\gamma-1}(1-z)^{2\alpha-2\gamma-2}\,F(\alpha, \beta, \gamma, xz^2)\,dz$$
$$= \frac{(2\gamma-1)!\,(2\alpha-2\gamma-2)!}{(2\alpha-2)!}\,F\left(\beta, \gamma+\frac{1}{2}, \alpha-\frac{1}{2}, x\right),$$

$$\int_0^1 z^{2\gamma-1}(1-z)^{2\alpha-2\gamma-1}\,F(\alpha, \beta, \gamma, xz^2)\,dz$$
$$= \frac{(2\gamma-1)!\,(2\alpha-2\gamma-1)!}{(2\alpha-1)!}\,F\left(\beta, \gamma+\frac{1}{2}, \alpha+\frac{1}{2}, x\right),$$

$$\int_0^1 z^{2\gamma-2}(1-z)^{2\alpha-2\gamma}\,F(\alpha, \beta, \gamma, xz^2)\,dz$$
$$= \frac{(2\gamma-2)!\,(2\alpha-2\gamma)!}{(2\alpha-1)!}\,F\left(\beta, \gamma-\frac{1}{2}, \alpha+\frac{1}{2}, x\right),$$

$$\int_0^1 z^{2\delta-1}(1-z)^{2\alpha-2\delta-1}\,\mathrm{F}\left[\alpha+\frac{1}{2},\ \alpha,\ \gamma,\ xz^2\right]dz$$

$$=\frac{(2\delta-1)!\,(2\alpha-2\delta-1)!}{(2\alpha-1)!}\,\mathrm{F}\left(\delta+\frac{1}{2},\ \delta,\ \gamma,\ x\right),$$

$$\int_0^1 z^{\alpha-\frac{1}{2}}(1-z)^{\alpha-\frac{3}{2}}\,\mathrm{F}[\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ xz(1-z)]\,dz$$

$$=\frac{\left(\alpha-\frac{1}{2}\right)!\left(\alpha-\frac{3}{2}\right)!}{(2\alpha-1)!}\,\mathrm{F}\left(\alpha-\frac{1}{2},\ \beta,\ \gamma,\ \frac{x}{4}\right),$$

$$\int_0^1 z^{\gamma-1}(1-z)^{2\alpha-\gamma-1}\,\mathrm{F}[\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ xz(1-z)]\,dz$$

$$=\frac{(\gamma-1)!\,(2\alpha-\gamma-1)!}{(2\alpha-1)!}\,\mathrm{F}\left(\beta,\ 2\alpha-\gamma,\ \alpha+\frac{1}{2},\ \frac{x}{4}\right),$$

$$\int_0^1 z^{\delta-1}(1-z)^{2\alpha-\delta-1}\,\mathrm{F}\left[\alpha,\ \alpha+\frac{1}{2},\ \gamma,\ xz(1-z)\right]dz$$

$$=\frac{(\delta-1)!\,(2\alpha-\delta-1)!}{(2\alpha-1)!}\,\mathrm{F}\left(\delta,\ 2\alpha-\delta,\ \gamma,\ \frac{x}{4}\right),$$

$$\int_0^1 z^{3\alpha-1}(1-z)^{3\gamma-3\alpha-1}\,\mathrm{F}\left[\gamma+\frac{1}{3},\ \gamma+\frac{2}{3},\ \alpha+\frac{2}{3},\ xz^3\right]dz$$

$$=\frac{(3\alpha-1)!\,(3\gamma-3\alpha-1)!}{(3\gamma-1)!}\,\mathrm{F}\left(\alpha,\ \alpha+\frac{1}{3},\ \gamma,\ x\right),$$

$$\int_0^1 z^{3\delta-1}(1-z)^{3\alpha-3\delta-1}\,\mathrm{F}\left[\alpha,\ \alpha+\frac{1}{3},\ \delta+\frac{2}{3},\ xz^3\right]dz$$

$$=\frac{(3\delta-1)!\,(3\alpha-3\delta-1)!}{(3\alpha-1)!}\,\mathrm{F}\left(\delta,\ \delta+\frac{1}{3},\ \alpha+\frac{2}{3},\ x\right).$$

$$\int_0^1 z^{2\alpha-\frac{4}{3}}(1-z)^{\alpha-\frac{5}{3}}\,\mathrm{F}\left[\alpha,\ \beta,\ \alpha-\frac{2}{3},\ xz^2(1-z)\right]dz$$

$$=\frac{\left(2\alpha-\frac{4}{3}\right)!\left(\alpha-\frac{5}{3}\right)!}{(3\alpha-2)!}\,\mathrm{F}\left(\alpha-\frac{1}{6},\ \beta,\ \alpha-\frac{1}{3},\ \frac{4x}{27}\right),$$

$$\int_0^1 z^{2\alpha-\frac{4}{3}}(1-z)^{\alpha-\frac{5}{3}}\,\mathrm{F}\left[\alpha,\ \beta,\ \alpha-\frac{1}{6},\ xz^2(1-z)\right]dz$$

$$=\frac{\left(2\alpha-\frac{4}{3}\right)!\left(\alpha-\frac{5}{3}\right)!}{(3\alpha-2)!}\,\mathrm{F}\left(\alpha-\frac{2}{3},\ \beta,\ \alpha-\frac{1}{3},\ \frac{4x}{27}\right),$$

$$\int_0^1 z^{2\delta-1}(1-z)^{3\alpha-2\delta-1}\,\mathrm{F}\left[\alpha,\ \alpha+\frac{1}{3},\ \gamma,\ xz^2(1-z)\right] dz$$
$$= \frac{(2\delta-1)!\,(3\alpha-2\delta-1)!}{(3\alpha-1)!}\,\mathrm{F}\left(\delta,\ \delta+\frac{1}{2},\ \alpha+\frac{2}{3},\ \frac{4x}{27}\right);$$

dans cette dernière formule, $\gamma = 3\alpha - 2\delta$.

$$\int_0^1 z^{2\alpha}(1-z)^{2\alpha-2}\,\mathrm{F}\left[\alpha,\ \alpha+\frac{1}{4},\ \alpha+1,\ xz^2(1-z)^2\right] dz$$
$$= \frac{(2\alpha)!\,(2\alpha-2)!}{(4\alpha-1)!}\,\mathrm{F}\left(\alpha,\ \alpha-\frac{1}{2},\ \alpha+\frac{3}{4},\ \frac{x}{16}\right),$$

$$\int_0^1 z^{2\alpha}(1-z)^{2\alpha-2}\left[1-xz^2(1-z)^2\right]^{-\left(\alpha+\frac{3}{4}\right)} dz$$
$$= \frac{(2\alpha)!\,(2\alpha-2)!}{(4\alpha-1)!}\,\mathrm{F}\left(\alpha+1,\ \alpha-\frac{1}{2},\ \alpha+\frac{1}{4},\ \frac{x}{16}\right),$$

$$\int_0^1 z^{2\alpha}(1-z)^{2\alpha-2}\left[1-xz^2(1-z)^2\right]^{-\left(\alpha+\frac{1}{4}\right)} dz$$
$$= \frac{(2\alpha)!\,(2\alpha-2)!}{(4\alpha-1)!}\,\mathrm{F}\left(\alpha+1,\ \alpha-\frac{1}{2},\ \alpha+\frac{3}{4},\ \frac{x}{16}\right),$$

$$\int_0^1 z^{3\alpha-\frac{1}{2}}(1-z)^{3\alpha-\frac{3}{2}}\,\mathrm{F}\left[\alpha,\ \alpha+\frac{1}{3},\ \alpha-\frac{1}{6},\ xz^3(1-z)^3\right] dz$$
$$= \frac{\left(3\alpha-\frac{1}{2}\right)!\,\left(3\alpha-\frac{3}{2}\right)!}{(6\alpha-1)!}\,\mathrm{F}\left(\alpha+\frac{1}{6},\ \alpha+\frac{1}{2},\ \alpha+\frac{2}{3},\ \frac{x}{64}\right),$$

$$\int_0^1 z^{3\alpha-\frac{1}{2}}(1-z)^{3\alpha-\frac{3}{2}}\,\mathrm{F}\left[\alpha,\ \alpha+\frac{1}{3},\ \alpha+\frac{1}{6},\ xz^3(1-z)^3\right] dz$$
$$= \frac{\left(3\alpha-\frac{1}{2}\right)!\,\left(3\alpha-\frac{3}{2}\right)!}{(6\alpha-1)!}\,\mathrm{F}\left(\alpha-\frac{1}{6},\ \alpha+\frac{1}{2},\ \alpha+\frac{2}{3},\ \frac{x}{64}\right).$$

Les diverses formules que nous venons de passer en revue offrent un certain intérêt, non seulement à cause de la méthode qui nous les a fournies, mais aussi pour les conséquences qu'on en peut tirer.

C'est ainsi qu'en rapprochant la valeur

$$\mathrm{C}(1+\sqrt{x})^{-2\gamma}\,\mathrm{F}\left(\alpha,\ 2\gamma,\ 2\alpha,\ \frac{2\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\right)$$

de l'intégrale hypergéométrique

$$\int_0^1 z^{2\gamma-1}(1-z)^{2\alpha-2\gamma-1}(1-z\sqrt{x})^{-\alpha}(1+z\sqrt{x})^{-\alpha}\,dx,$$

de celle que donne, dans le cas $\beta=\gamma$, la septième formule du tableau ci-dessus, à savoir

$$C'\,F\left(\gamma,\gamma+\frac{1}{2},\alpha+\frac{1}{2},x\right),$$

on a l'identité

$$(1+x)^{-2\gamma}F\left(\alpha,2\gamma,2\alpha,\frac{2x}{1+x}\right)=F\left(\gamma,\gamma+\frac{1}{2},\alpha+\frac{1}{2},x^2\right);$$

cette formule n'est pas au nombre de celles données par Gauss dans son Mémoire posthume sur la série hypergéométrique.

Comme dernier exemple de la même méthode, partons de l'intégrale définie, facile à démontrer,

$$\int_0^1 \frac{x^{\beta-1}(1-x)^{\beta-1}}{(ax^2+bx+c)^{\beta+\frac{1}{2}}}\,dx=\sqrt{\pi}\,\frac{(\beta-1)!}{\left(\beta-\frac{1}{2}\right)!}\left[\frac{1}{\sqrt{c}}+\frac{1}{\sqrt{a+b+c}}\right]A\beta,$$

dans laquelle a, b, c sont trois nombres positifs, tandis que A représente, pour abréger, la quantité

$$A=\frac{1}{b+2c+2\sqrt{c(a+b+c)}}.$$

On en tire immédiatement, par la différentiation relative à λ,

$$\int_0^1 x^{\beta-1}(1-x)^{\beta-1}f_1^{\alpha-\beta-\frac{1}{2}}f_2^{-\alpha}\,dx$$
$$=\sqrt{\pi}\,\frac{(\beta-1)!}{\left(\beta-\frac{1}{2}\right)!}\left[\frac{1}{\sqrt{c}}+\frac{1}{\sqrt{a+b+c}}\right]A^\beta F\left(\alpha,\beta,\beta+\frac{1}{2},\lambda A\right);$$

dans ce résultat f_1 et f_2 représentent les deux polynomes

$$f_1=ax^2+bx+c,\qquad f_2=ax^2+bx+c+\lambda x(1-x).$$

Cette propriété s'étend manifestement à un cas plus général et l'on est conduit à la proposition suivante :

Si f_1, f_2, f_3 sont trois polynomes quadratiques en involution

et α_1, α_2, α_3 *trois exposants tels que* $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = -\frac{3}{2}$; *si* L *représente un lacet double entourant les racines de l'un des polynomes donnés,* f_1 *par exemple, de sorte qu'en parcourant le lacet* $f_1^{\alpha_1}$ *reprenne sa valeur initiale, l'intégrale*

$$\int_L f_1^{\alpha_1} f_2^{\alpha_2} f_3^{\alpha_3}\, dx$$

est hypergéométrique.

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE.

Bath (Wilh.). — *Zur Theorie der gleichseitig-hyperbolischen Schnitte der Oberflächen 2. Ordng.* (Dissert.). In-8°, 190 p. Rostock, Leopold. 1 m. 50 pf.

Böhler (H.). — *Beschreibung des Basismessverfahrens mittels horizontaler Distanzlatte.* Gr. in-8°, 62 p. avec 24 fig. Berlin, Mittler und Sohn. 2 m. 50 pf.

Burnside (W.-S.) and A. Panton. — *Theory of equations. Introduction to the theory of binary algebraic forms.* Vol. I. New edit. In-8°. London, Longmans. 10 sh. 6 d.

Flammarion (C.). — *Astronomy for Amateurs.* Trad. par Fr.-A. Welby. In-8°, 340 p. avec illustr. London, Unwin. 6 sh.

Gans (Rich.). — *Einführung in die Vektoranalysis. Mit Anwendgn. auf die mathemat. Physik.* Gr. in-8°, x-99 p. avec 31 fig. Leipzig. Teubner. Relié, 2 m. 80 pf.

Garbieri (G.). — *Teoria dei determinanti.* In-8°. Torino, Paravia et C°. 2 l.

Gewecke (Herm.). — *Neue Karte des Sternhimmels m. abnehmbarem*

Horizont. 2. Aufl. 50,5 : 50,5 cm. Mit Text auf der Rückseite. Berlin. G. Reimer. Auf Pappe mit Gradmesser. 2 m. 50 pf.

GRIMALDI (A.-R.). — *Catalogue of Zodiacs and Planispheres, ancient and im modern*. In-8°. London, Gall et J. 2 sh.

GRIMSEHL (E.). — *Angewandte Potentialtheorie in elementarer Behandlung*. I. Bd. In-8°, VII-219 p. avec 94 fig. Leipzig, Göschen. Relié. 6 m. (Sammlung Schubert. 38e vol.)

JOLY (C.-J.). — *Manual of Quaternions*. In-8°, 348 p. London, Macmillan. 10 sh.

KUSTER (F.-W.). — *Logarithmische Rechentafeln für Chemiker*. 5e édit. In-8°, 99 p. Leipzig, Veit et Co. Relié, 2 m.

MACPHERSON (H.). — *Astronomers of to-day, their work*. In-8°, 272 p. avec 27 portraits. London, Gall et J. 7 sh. 6 d.

Œuvres de Laguerre, publiées sous les auspices de l'Académie des Sciences. T. II : *Géométrie*. In-8°, 720 p. Paris, Gauthier-Villars. 22 fr.

SCHUSSLER (RUD.). — *Orthogonale Axonometrie. Ein Lehrbuch zum Selbststudium*. Gr. in-8°, VIII-170 p. avec 29 planches de figures dans un fascicule séparé. Leipzig, Teubner. Relié, 7 m.

WEGENER (ALFR.). — *Die Alfonsischen Tafeln für den Gebrauch eines modernen Rechners* (Dissert.). — Gr. in-8°, 63 p. avec 1 planche. Berlin, Ebering. 3 m.

YOUNG (W.-H.). — *On general theory of integration*. In-4°, 32 p. London, Dulau. 1 sh.

MERRIMAN (M.). — *Elements of Mechanics. First lessons for beginners*. In-8°. London, Chapman. 4 sh. 6 d.

DEDEKIND (RICH.). — *Stetigkeit und irrationale Zahlen*. 3e édition. Gr. in-8°, VII-24 p. Braunschweig, Vieweg. 1 m.

LINDELÖF (E.). — *Le calcul des résidus et ses applications à la théorie des fonctions*. Gr. in-8°, VII-144 p. Paris, Gauthier-Villars. 3 fr. 50 c.

PIZZETTI (P.). — *Trattato di Geodesia teoretica*. In-8°. Bologna, Zanichelli. 12 l.

POMPEIU (D.). — *Sur la continuité des fonctions de variables complexes* (thèse). In-4°, 50 p. Paris, Gauthier-Villars.

VAHLEN (K.-THEOD.). — *Abstrakte Geometrie. Untersuchungen über die Grundlagen der euklidischen u. nicht-euklidischen Geometrie.* Gr. in-8°, XII-302 p. avec fig. Leipzig, Teubner. Relié, 12 m.

BRUNN (ALB. V.). — *Die Säkularbeschleunigung des Mondes.* In-8°, 102 p. Göttingen, Vandenhoeck et Ruprecht.

HUDSON (R.-W.-H.-T.). — *Kummer's quartic surface.* In-8°, 234 p. London, Cambridge University Press.

Astronomischer Jahresbericht. Mit Unterstützung der astronom. Gesellschaft herausgeg. von Walt.-F. Wislicenus. 6. Bd. enth. die Literatur d. J. 1904. Grand in-8°, XXXVIII-615 p. Berlin, G. Reimer.

STOKES (Sir G.-G.). — *Mathematical and physical Papers.* Vol. V. In-8°, 396 p. London, Cambridge University Press.

STÖRMER (CARL). — *Verzeichnis über den wissenschaftlichen Nachlass von Sophus Lie.* 1. Mittlg. In-8°, 31 p. Christiania, Dybwad.

Verhandlungen der vom 1. *bis* 13. *VIII.* 1903 *in Kopenhagen abgehalt.* 14. *allgemeinen Conferenz der internationalen Erdmessung.* Red. von H.-G. van de Sande Bakhuyzen. 2. Tl. Spezialberichte. In-8°, 472 p. avec 30 planches et cartes. Berlin, G. Reimer.

WIERNSBERGER (PAUL). — *Recherches diverses sur les polygones réguliers et les radicaux superposés* (thèse). In-8°, 132 p. Lyon, Rey et Cie. 3 fr. 50 c.

WISLICENUS (WALT.-F.). — *Der Kalender in gemeinverständlicher Darstellung.* In-8°, IV-118 p. Leipzig, Teubner.

APPELL (P.) et CHAPPUIS (J.). — *Leçons de Mécanique élémentaire* (Classe de Mathém.). In-16, 310 p. avec fig. Paris, Gauthier-Villars.

BIRVEN (HEINR.). — *Grundzüge der mechanischen Wärmetheorie.* In-8°, VII-128 p. avec 41 fig. Stuttgart, Grub.

CARLIER (J.-G.). — *Les méthodes et appareils de mesures du temps, des distances, des vitesses et des accélérations.* T. II. In-8°. Bruxelles, Ramlot.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

POINCARÉ (H.), professeur à la Sorbonne. — LEÇONS DE MÉCANIQUE CÉLESTE. T. I : THÉORIE GÉNÉRALE DES PERTURBATIONS PLANÉTAIRES. In-8, VI-368 pages. Paris, chez Gauthier-Villars, 1905.

M. Poincaré commence aujourd'hui la publication des Leçons de Mécanique céleste qu'il professe à la Faculté des Sciences de Paris depuis 1896. Comme l'explique l'auteur dans son Avant-Propos, « ce Livre ne doit faire double emploi ni avec son Ouvrage sur les *Méthodes nouvelles de la Mécanique céleste,* ni avec le *Traité de Mécanique céleste* de Tisserand.

Ici, il ne se place plus au point de vue du géomètre, et il laisse complètement de côté, par exemple, la question de convergence, dont l'étude rigoureuse est le but principal des *Méthodes nouvelles;* mais, prenant à son début le problème fondamental de la Mécanique céleste, il n'emprunte aux méthodes nouvelles que leurs résultats essentiels, ceux qui sont susceptibles d'une application immédiate, et les rattache à la méthode classique de la variation des constantes. Toutefois, et c'est ce qui le distingue encore de Tisserand, il va droit au but, sans s'occuper de suivre les fondateurs de la Mécanique céleste, et de commenter leur pensée.

C'est donc un Ouvrage véritablement nouveau que nous donne M. Poincaré, ouvrage accessible au débutant, propre à l'initier aux méthodes de la Mécanique céleste, mais qui ne le dispense en aucune façon d'étudier, au point de vue théorique, les *Méthodes nouvelles,* au point de vue pratique le Traité de Tisserand, qui résume les travaux de ses prédécesseurs.

Pénétré plus que personne de l'importance du service que nous rend M. Poincaré en entreprenant cette publication, je m'efforcerai de rendre compte le plus complètement possible de sa pensée dans une courte analyse.

Ce premier Volume est consacré à l'exposition de la théorie

générale des perturbations planétaires. Son but est d'établir le plus rapidement possible, mais d'une façon rigoureuse, la *forme* des développements employés en Mécanique céleste : aussi les formules qu'on y rencontre ne sont-elles pas toujours les plus favorables aux calculs numériques; l'objet principal du Volume suivant sera de les transformer pour les adapter aux applications numériques.

La forme des développements de la Mécanique céleste est bien connue; on peut les rapporter à deux types principaux : ou bien on développe les inconnues à la fois suivant les puissances du temps, et suivant les sinus ou cosinus de certains arguments, en partant des valeurs initiales, qui servent de constantes d'intégration; ou bien on cherche à obtenir les expressions des inconnues sous forme purement trigonométrique, ainsi qu'on l'a toujours fait pour la théorie de la Lune, en partant des valeurs moyennes des inconnues, comme constantes.

Il n'est pas difficile de prévoir la possibilité et les propriétés particulières de ces divers développements : mais leur étude rigoureuse n'avait pas encore été complètement faite, et c'est cette étude qui est le but du premier Volume de M. Poincaré. Si, comme le dit l'auteur, les questions de convergence sont laissées de côté, c'est parce que la fonction perturbatrice est réduite à un nombre limité de termes, ainsi qu'on est amené à le faire nécessairement dans la pratique; mais, ce point admis, la rigueur des raisonnements reste entière, et l'on peut dire que les formules générales de la Mécanique céleste sont établies enfin sur une base analytique inébranlable.

L'Ouvrage est divisé en treize Chapitres; au Chapitre I, se trouvent rappelés et démontrés les *principes de la Dynamique* dont il sera fait un usage constant par la suite. Ces principes se rapportent aux systèmes d'équations différentielles canoniques, dont M. Poincaré se sert d'une façon exclusive; aux changements canoniques de variables, et aux crochets de Lagrange.

Le Chapitre II est consacré à la première exposition du *problème des trois corps*. L'énergie potentielle étant une fonction indépendante du temps et du choix des axes, on tombe immédiatement tout d'abord sur les intégrales du mouvement du centre de gravité, des aires et des forces.

La propriété du centre de gravité permet alors de réduire le nombre des degrés de liberté que comporte le problème; en faisant sur les coordonnées et les variables conjuguées des substitutions linéaires convenables, ce nombre se réduit en effet de 9 à 6, en même temps que la forme des intégrales des aires est conservée, ce qui conduit à la propriété bien connue sous le nom d'*élimination des nœuds*.

M. Poincaré étudie deux de ces substitutions. La première conduit à prendre comme variables les coordonnées relatives de deux des corps par rapport au troisième, et les projections des quantités de mouvement de ces deux corps dans leur mouvement absolu; la seconde conduit aux coordonnées bien connues de Jacobi.

Enfin, supposant que l'un des corps ait une action prépondérante, l'auteur définit la fonction perturbatrice, et en donne un premier développement; puis il étudie quelques cas particuliers; en dernier lieu, il cite pour mémoire la méthode usuelle, dont il ne fera aucun usage, puisqu'elle ne conserve pas la forme canonique des équations.

L'étude du *mouvement elliptique* constitue le Chapitre III. Le problème des deux corps se ramène à celui du mouvement d'une masse m, attirée par une masse fixe M.

L'application de la méthode de Jacobi conduit au mouvement elliptique. Si l'on désigne par l, θ, $g+\theta$, a, e, i l'anomalie moyenne, la longitude du nœud, la longitude du périhélie, le demi-grand axe, l'excentricité et l'inclinaison, et si l'on fait

$$L = m\sqrt{Ma}, \qquad G = L\sqrt{1-e^2}, \qquad \Theta = G\cos i,$$

les quantités L, G, Θ, l, g, θ forment un premier système d'éléments canoniques : l seul varie avec le temps, et l'on a

$$\frac{dl}{dt} = n = \frac{m^3 M^2}{L^3}.$$

Un second système d'éléments canoniques est obtenu en conservant L, et faisant $\rho_1 = L - G$, $\rho_2 = G - \Theta$, $\lambda = l + g + \theta$, $\omega_1 = -g - \theta$, $\omega_2 = -\theta$; λ est ici la longitude moyenne.

Enfin un troisième système d'éléments canoniques est formé par L, λ d'une part, puis les variables *excentriques* ξ_1, η_1, enfin

par les variables *obliques* ξ_2, η_2, telles que

$$\xi_i = \sqrt{2\rho_i}\cos\omega_i, \qquad \eta_i = \sqrt{2\rho_i}\sin\omega_i.$$

Les coordonnées sont développables soit sous la forme

$$\sum A\cos(p_0\lambda + h)\,\mathfrak{M},$$

A et h dépendant de L et $\mathfrak{M}$ étant un monome entier par rapport aux ξ et aux η; soit sous la forme

$$\sum B\rho_1^{q_1}\rho_2^{q_2}\cos(p_0\lambda + p_1\omega_1 + p_2\omega_2 + h),$$

B et h dépendant de L.

Des raisons de symétrie et d'homogénéité achèvent de renseigner sur la forme précise de ces développements.

Le Chapitre IV contient l'exposition des *principes de la méthode de Lagrange*. M. Poincaré définit d'abord les *orbites osculatrices*, et montre que celles-ci ne sont pas toujours tangentes aux orbites réelles : cela n'a lieu que si l'on emploie des variables convenables. Puis, revenant au Problème des trois corps, il prend pour variables les éléments canoniques des orbites osculatrices des deux planètes fictives, au mouvement desquelles on peut ramener le problème. Les équations restent canoniques; la fonction caractéristique F est de la forme $F_0 + \mu F_1$, μ étant de l'ordre des masses perturbatrices. Le point important est que F_0 ne dépend que des L. Quant à la fonction perturbatrice μF_1 elle est développable sous l'une des formes

$$\sum A\cos(k_1\lambda_1 + k_2\lambda_2 + h)\,\mathfrak{M},$$

$$\sum A\rho_1^{q_1}\rho_2^{q_2}\rho_3^{q_3}\rho_4^{q_4}\cos\left(\sum k_i\lambda_i + \sum p_i\omega_i + h\right),$$

A, h dépendant de L, $\mathfrak{M}$ étant un monome entier par rapport aux ξ et η. Ces développements jouissent d'ailleurs de propriétés particulières que mettent en évidence la symétrie et l'homogénéité.

Les équations étant du type

$$\frac{dL}{dt} = -\mu \frac{\partial F_1}{\partial \lambda}, \qquad \frac{d\eta}{dt} = \mu \frac{\partial F_1}{\partial \xi}, \qquad \frac{d\xi}{dt} = -\mu \frac{\partial F_1}{\partial \eta},$$
$$\frac{d\lambda}{dt} = \frac{\partial F_0}{\partial L} + \mu \frac{\partial F_1}{\partial L},$$

il est facile d'instituer une méthode d'approximations successives : de simples quadratures permettent d'obtenir les valeurs des inconnues développées suivant les puissances de μ; après la $n^{\text{ième}}$ approximation, l'erreur est de l'ordre de μ^n.

L'*application de la méthode de Lagrange* forme l'objet du Chapitre V. Tous les termes des développements obtenus sont de la forme

$$\mu^\alpha A \mathfrak{M}_0 t^m \cos(\nu t + h)$$

ou de la forme

$$\sum \mu^\alpha A(\rho_1^0)^{q_1}(\rho_2^0)^{q_2}(\rho_3^0)^{q_3}(\rho_4^0)^{q_4} t^m \cos\left(\nu t + \sum p_i \omega_i^0 + h\right);$$

on a mis en évidence la puissance de μ, et dénoté par l'exposant o les valeurs initiales des inconnues pour $t = 0$; A et h dépendent des L^0 et λ^0; $\mathfrak{M}_0$ est un monome entier par rapport aux ξ^0 et η^0; enfin ν est de la forme $k_1 n_1 + k_2 n_2$, k_1 et k_2 étant des entiers, n_1 et n_2 étant les moyens mouvements initiaux.

En excluant le cas de $k_1 = k_2 = 0$, ν ne peut s'annuler que si $\frac{n_1}{n_2}$ est commensurable, hypothèse que l'on peut rejeter comme tout à fait improbable. Mais ν peut devenir petit; les termes correspondants sont alors grands, par suite de la présence d'un *petit diviseur*. M. Poincaré montre que, pratiquement, on devra se limiter à la considération d'un seul petit diviseur, au plus.

Les termes se classent en termes *périodiques, séculaires purs,* ou *séculaires mixtes.* L'*ordre* et le *degré* d'un terme sont le nombre α, et le degré du monome $\mathfrak{M}_0$. De plus, M. Poincaré appelle *rang* d'un terme la différence $\alpha - m$; si enfin m' est l'exposant d'un petit diviseur ou la somme des exposants des petits diviseurs qui figurent au dénominateur d'un terme, la *classe* de ce terme est $\alpha - \frac{m}{2} - \frac{m'}{2}$.

Le théorème de Lagrange sur l'invariabilité des grands axes

n'est alors qu'un cas particulier de l'important théorème sur le rang que l'auteur énonce ainsi :

1° Dans les développements des ξ, η, λ, L, il n'y a pas de terme de rang négatif (sauf $n_i t$ dans λ_i) ;

2° Il n'y a pas de terme séculaire mixte de rang nul.

3° Dans le développement des L, il n'y a pas de terme de rang nul.

Le Chapitre VI est intitulé *Transformations diverses des développements*. Si dans les développements obtenus jusqu'ici, sauf dans le terme $n_i t$ de λ_i, on remplace t en dehors des signes sin et cos par τ, puis $n_1 t$ par ϖ_1 et $n_2 t$ par ϖ_2, les inconnues se présentent sous la forme de fonctions de trois variables, développables suivant les puissances de τ et suivant les cosinus et les sinus des multiples des ϖ. Ces nouveaux développements peuvent d'ailleurs être obtenus directement à l'aide d'équations telles que

$$\frac{\partial L_i}{\partial \tau} + n_1 \frac{\partial L_i}{\partial \varpi_1} + n_2 \frac{\partial L_i}{\partial \varpi_2} = - \frac{\partial F}{\partial \lambda_i}, \qquad \dots ;$$

ils satisfont aux équations du mouvement quand on y fait

$$\tau = t + c, \qquad \varpi_1 = n_1 t + \varepsilon_1, \qquad \varpi_2 = n_2 t + \varepsilon_2,$$

c, ε_1, ε_2 *étant des constantes quelconques.*

On peut d'ailleurs prendre des constantes d'intégration autres que les valeurs initiales des inconnues pour $t = 0$, et obtenir des développements analogues. Si, en particulier, on choisit comme constante les *valeurs moyennes* pour $\tau = 0$ des inconnues L_i, $\lambda_i - \varpi_i$, ξ_i, η_i, valeurs que nous dénoterons par l'exposant 1, les développements obtenus jouissent de propriétés remarquables ; les quantités ϖ_i et λ'_i n'y figurant que par la combinaison $\varpi_i + \lambda'_i$. La comparaison de ces nouveaux développements avec les précédents permet de démontrer d'une façon précise qu'il n'est presque jamais nécessaire d'avoir égard à plusieurs petits diviseurs différents.

Le Chapitre VII renferme l'étude du *Problème restreint*, c'est-à-dire du problème dans lequel on suppose en présence le Soleil, une grosse planète d'orbite keplérienne circulaire et une petite planète de masse négligeable restant dans le plan de l'orbite de la grosse planète.

Les équations de ce problème se ramènent au type général

$$\frac{dL_i}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial \lambda_i}, \qquad \frac{d\lambda_i}{dt} = \frac{\partial F}{\partial L_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

où

$$F = F_0 + \mu F_1,$$

F_0 dépendant seulement des L_i et de telle façon qu'il n'y ait aucune relation linéaire à coefficients entiers entre les dérivées partielles $\frac{\partial F_0}{\partial L_i}$; de plus, F_1 est une fonction périodique des λ_i, les coefficients dépendant des L_i.

L'étude d'un tel système est fondamentale en *Mécanique céleste*. La méthode de Lagrange conduit à des développements beaucoup plus simples que dans le cas général, et ceci tient à l'absence de variables analogues à ξ, η, de sorte que F_0 dépend de n variables sur $2n$. Dans les développements, il n'y a pas de termes séculaires purs, sauf des termes en t pour les λ_i; si de plus on connaît ces termes en t et les termes périodiques, l'ensemble des termes séculaires mixtes s'en déduit immédiatement.

Ceci résulte de ce que, si l'on met comme précédemment les inconnues sous la forme de fonctions développables suivant les puissances d'une variable τ et périodiques par rapport à des variables w_i, ces fonctions vérifieront les équations du mouvement non seulement quand on y fera

$$\tau = t - c, \qquad w_i = n_i t + \varepsilon_i,$$

mais encore quand on y fera

$$\tau = 0, \qquad w_i = n'_i t + \varpi_i,$$

les ϖ_i étant des constantes quelconques. Ici n_i désigne la valeur constante de $\frac{d\lambda_i}{dt}$ en première approximation, et n'_i diffère de n_i, mais est développable suivant les puissances de μ et se réduit à n_i pour $\mu = 0$.

Ce théorème est fondamental, puisqu'il permet de faire disparaître les termes séculaires.

Dans le cas du problème restreint, il y a plus : les inconnues, qui sont au nombre de quatre, sont développables suivant les puissances de $E \cos w_2$ et $E \sin w_2$, E étant une constante arbitraire

d'intégration; les autres constantes d'intégration sont, si l'on veut, ϖ_1, ϖ_2 et la valeur moyenne de L_1. Si l'on fait $E = 0$, on obtient la solution périodique bien connue du problème restreint, dite *de la première sorte*.

Les Chapitres VIII et IX sont consacrés à la *Théorie élémentaire* et à la *Théorie complète des perturbations séculaires*. La recherche des perturbations séculaires, c'est la recherche des termes de rang nul. M. Poincaré montre d'abord qu'on obtient tous les termes de rang nul de ξ et des η en intégrant les équations canoniques

$$\frac{d\xi_i}{dt} = -\mu\frac{\partial R}{\partial \eta_i}, \qquad \frac{d\eta_i}{dt} = \mu\frac{\partial R}{\partial \xi_i},$$

où R désigne la partie séculaire de F_1, où l'on considère les L_i comme des constantes. Les termes de rang nul de λ_i sont ensuite donnés par l'intégrale $\mu\int\frac{\partial R}{\partial L_i}dt$, d'après le théorème de Poisson.

Dans la théorie élémentaire, on néglige avec Lagrange les quatrièmes puissances des excentricités et des inclinaisons; les équations précédentes se réduisent alors à des équations linéaires à coefficients constants, dont l'étude est simplifiée par la forme particulière de R.

Dans la théorie complète, les équations qui définissent les perturbations séculaires sont ramenées par M. Poincaré au type fondamental étudié au Chapitre VII; on peut donc faire disparaître les termes séculaires des inconnues, ce qui est très important pour la stabilité.

La forme particulière de R conduit à des conséquences toutes pareilles à celles que l'on rencontre dans le problème restreint : en exprimant les inconnues en fonction de variables τ et w_i, on voit que leurs valeurs sont développables suivant les puissances de τ, $E_i \cos w_i$, $E_i \sin w_i$, les E_i étant des constantes convenablement choisies; les autres constantes d'intégration sont des angles ϖ_i. En faisant $\tau = 0$, $w_i = -\gamma'_i t + \varpi_i$, on obtient les valeurs des inconnues débarrassées des termes séculaires : les γ'_i diffèrent légèrement des racines γ_i des équations algébriques bien connues qui servent à intégrer les équations linéaires de la théorie élémentaire.

Les équations possèdent par suite des intégrales développables

suivant les puissances des ξ et des η, ainsi que l'avait déjà remarqué M. Cellérier, en ne tenant compte que des termes du quatrième degré de R.

Il faut observer toutefois que, quand on tient compte des inclinaisons, les équations étudiées ne sont pas exactement dans le cas de celles du Chapitre VII, parce que l'une des quantités γ_i est nulle. M. Poincaré montre comment on peut éviter cette difficulté à l'aide d'artifices très simples; il suffit par exemple de rapporter le mouvement non pas à des axes fixes, mais à des axes mobiles tournant uniformément autour de l'axe de coordonnées perpendiculaire au plan par rapport auquel on mesure les inclinaisons.

En terminant, M. Poincaré généralise les résultats obtenus, en supposant que les propriétés particulières de R cessent d'exister.

Au Chapitre X, intitulé *Cas général du Problème des trois corps,* l'auteur revient aux développements les plus généraux du Chapitre VI et montre qu'on peut y faire disparaître les termes séculaires par des procédés analogues à ceux du Chapitre VII. Les inconnues L_i, λ_i ξ_i, η_i étant exprimées à l'aide de τ, d'arguments w_i, et des constantes initiales L_i^0, ξ_i^0, η_i^0, on y fait d'abord $\tau = 0$, et l'on remplace les L_i^0 par des quantités W_i, fonctions des L_i^0, ξ_i^0, η_i^0; les valeurs ainsi obtenues vérifient les équations du mouvement si l'on a

$$\frac{dW_i}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial w_i}, \qquad \frac{dw_i}{dt} = \frac{\partial F}{\partial W_i},$$
$$\frac{d\xi_i^0}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial \eta_i^0}, \qquad \frac{d\eta_i^0}{dt} = \frac{\partial F}{\partial \xi_i^0}.$$

Les W_i sont des constantes, car F ne dépend pas des w_i.

Les équations de la seconde ligne sont alors du type étudié au Chapitre précédent et les w_i sont déterminés par des quadratures. On a finalement par suite pour les inconnues des développements de la forme

$$\sum \mu^\alpha B E_1^{q_1} E_2^{q_2} \ldots \frac{\cos}{\sin}\left(\sum k_i w_i'' + \sum p_i w_i'\right),$$

les B dépendant des W_i, les E_h étant des constantes convenablement choisies (au nombre de $2n$ pour le problème des $n+1$ corps),

les w''_i et w'_i étant des arguments de la forme

$$w'_i = -\gamma'_i t + \varpi'_i, \qquad w''_i = n_i t + \varpi_i,$$

les premiers au nombre de $2n$, les seconds au nombre de n.

Les moyens mouvements n' et γ' sont développables suivant les puissances de μ et des E_h^2; mais les γ' contiennent μ en facteur, tandis que les n'_i se réduisent aux n_i pour $\mu = 0$; enfin, l'une des quantités γ'_i est nulle, de sorte que les coordonnées et les distances mutuelles dépendent respectivement de $3n-1$ et $3n-2$ arguments.

La comparaison des développements obtenus en dernier lieu avec ceux dont on est parti, conduit au *Théorème de Poisson,* qui fait l'objet du Chapitre XI. Généralisant le résultat de Poisson, M. Poincaré fait voir que, *dans le développement des* L_i, *il n'y a pas de termes séculaires purs de rang un.*

Dans le Chapitre XII, intitulé *Symétrie des développements. Solutions périodiques,* on étudie les propriétés spéciales des développements obtenus précédemment pour les éléments canoniques et aussi pour les coordonnées héliocentriques; les solutions périodiques de la première sorte, dans le cas du problème des trois corps, sont obtenues en annulant les E_h. Enfin M. Poincaré indique le meilleur choix de constantes à faire et montre comment l'on pourrait effectuer le calcul direct des séries.

Le Chapitre XIII renferme l'exposition du *Principe de la méthode de Delaunay*. Si les moyens mouvements sont voisins d'être commensurables, les intégrations introduisent un petit diviseur, et l'on est amené à considérer la *classe* des termes. M. Poincaré démontre d'abord un important théorème sur la classe : *il n'y a pas de terme de classe négative; de plus, la classe de tous les termes de* δL, $\delta\xi$, $\delta\eta$ *est au moins égale à* $\frac{1}{2}$.

Il s'agit alors de former les équations qui fourniront les termes de classe minima dans les inconnues, c'est-à-dire les termes de classe nulle dans les $\delta\lambda$, les termes de classe $\frac{1}{2}$ dans les δL, $\delta\xi$, $\delta\eta$: il est nécessaire, en effet, de connaître ces termes si l'on veut prévoir à assez longue échéance, de même que la connaissance des termes de rang minimum permet de prévoir à très longue échéance.

Soit $\theta = \sum k_j \lambda_j$ l'argument qui correspond au petit diviseur, et appelons Ψ ce que devient F_1 quand on n'y conserve que les termes constants et ceux qui dépendent de θ; marquons de l'indice zéro ce que deviennent Ψ et ses dérivées partielles quand on y fait $L_i = L_i^0$, $\xi_i = \xi_i^0$, $\eta_i = \eta_i^0$; désignant enfin par C_0 une constante quelconque, par C_{ik} la dérivée partielle $\frac{\partial^2 F_0}{\partial L_i \partial L_k}$ (quand on y fait $L_h = L_h^0$) et posant

$$\Phi_0 = C_0 + \sum n_i (L_i - L_i^0) + \frac{1}{2} \sum C_{ik} (L_i - L_i^0)(L_k - L_k^0);$$

les équations

$$\frac{d\xi_i}{dt} = -\mu \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \eta_i}\right)_0, \qquad \frac{d\eta_i}{dt} = \mu \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \xi_i}\right)_0,$$
$$\frac{dL_i}{dt} = -\frac{\partial (\Phi_0 + \mu \Psi_0)}{-\partial \lambda_i}, \qquad \frac{d\lambda_i}{dt} = \frac{\partial (\Phi_0 + \mu \Psi_0)}{\partial L_i}$$

fournissent tous les termes de classe minima, et *ceux-là seulement*.

Ces équations sont faciles à intégrer. Les équations canoniques de la seconde ligne permettent d'écrire

$$L_i - k_i U = L_i^0,$$

U étant une variable auxiliaire; la relation entre t et θ est ensuite donnée par une quadrature, et les ξ_i et η_i s'obtiennent ensuite par de nouvelles quadratures. Tel est le principe de la méthode de Delaunay que l'on peut d'ailleurs appliquer dans des cas beaucoup plus généraux.

Pour terminer, M. Poincaré applique la méthode de Delaunay au cas de la planète Hécube, dont le moyen mouvement est sensiblement le double de celui de Jupiter. H. Andoyer.

JAMES (G.-O.). — Elements of the Kinematics of a point and the rational mechanics of a particle. 1 vol. in-8°; XII-171 pages. New-York, J. Wiley and Sons, 1905.

Ce petit livre est une excellente introduction à la Mécanique rationnelle; on ne peut qu'en louer la clarté et la précision. Les définitions, les réductions de formules en nombres sont expliquées avec toute la netteté désirable. Pour ce qui est des principes de la Mécanique, l'auteur se place au point de vue suivant : ces principes sont vrais par rapport à un système d'axes absolus (fixes par rapport aux étoiles); le premier est le principe de l'inertie, le second et le troisième s'énoncent ainsi : l'accélération que prend un point matériel dans un champ de force résultant de la superposition de deux champs de force est la somme géométrique des accélérations que produiraient les champs composants; elle ne dépend ni de la nature du point matériel, ni de son mouvement. Deux points matériels isolés prennent, sous leurs actions mutuelles, des accélérations dirigées, dans des sens opposés, suivant la droite qui les joint et ces accélérations sont dans un rapport constant. De ces deux derniers principes et de la considération de trois points matériels, on déduit la définition des masses, comme coefficients numériques ne dépendant que des points matériels. J. T.

VIDAL (L.). — Manuel pratique de Cinématique navale et maritime à l'usage de la marine de guerre et de la marine de commerce. 1 vol. in-8°; XVII-222 pages. Paris, Gauthier-Villars, 1905.

M. le capitaine de vaisseau Léon Vidal a condensé, dans ce *Manuel pratique*, les travaux épars d'un grand nombre de ses confrères, et les siens propres, sur la Tactique navale mathéma-

tique : il y a joint plusieurs tables numériques, qui rendent aisé l'usage des formules; de nombreuses figures illustrent le texte. Les titres des six Chapitres qui composent le livre et qui sont reproduits ci-dessous montreront assez quel est l'intérêt pour les navigateurs du travail de M. Vidal; ajoutons que ceux qui enseignent les Mathématiques peuvent y trouver des applications intéressantes.

I. Spirale logarithmique simple. II. Mouvement de deux mobiles qui viennent simultanément de quantités égales du même bord. III. Concentration de bâtiments dispersés. IV. Problèmes dans les courants des fleuves. V. Rencontre de deux mobiles. Plus courte distance sur trajectoires déterminées. Distance de croisement de la route rectiligne d'un mobile A par la trajectoire d'un autre B. VI. Barrage rectiligne ou droite infranchissable. Influence du courant et de la dérive vent-houle sur les théorèmes de cinématique navale.

J. T.

CONGRÈS INTERNATIONAL DE PHILOSOPHIE. IIe session, tenue à Genève du 4 au 8 septembre 1904. Rapports et comptes rendus publiés par les soins du D^r *Ed. Claparède*. 1 vol. in-8°; VII-974 pages, 17 figures et 5 portraits. Genève, H. Kündig, 1905.

La quatrième section du dernier Congrès international de Philosophie se rapportait à la logique et à la philosophie des Sciences.

Diverses communications intéressent les Mathématiques. M. Fehr a parlé *Sur la fusion progressive de la Logique et des Mathématiques;* c'est un sujet sur lequel est revenu M. Couturat, soit dans diverses discussions, soit dans sa communication *Sur l'utilité de la Logique algorithmique*. M. de Montessus de Ballore fonde sur des principes expérimentaux *Une définition logique du hasard et de la probabilité*. Les considérations développées par M. A. Naville (*La notion de loi historique*) et par

M. Milhaud (*Note sur l'idée de Science*) ont un caractère trop général pour qu'on puisse les analyser ici. M. A. Reymond (*Note sur le jugement géométrique*) critique, au point de vue de la Géométrie projective, la théorie de Kant sur les jugements géométriques, considérés comme des jugements synthétiques *a priori*. M. J. Andrade (*La Géométrie mécanique*) montre comment certaines considérations mécaniques, dans l'espace euclidien ou riemannien, peuvent conduire à des propositions de Géométrie. M. le lieutenant-colonel Hartmann (*Définition physique de la force*), M. R. Pictet (*Le potentiel dans la Science contemporaine*), M. R. de Saussure (*Les fondements de la Mécanique*) s'attaquent aux principes de la Mécanique. M. P. Boutroux (*Sur la notion de correspondance en Mathématiques*) cherche à montrer que la notion de correspondance ne se ramène ni à la notion de combinaisons quantitatives, ni aux notions logiques élémentaires.

La cinquième Section du Congrès international de Philosophie était réservée à l'Histoire des Sciences et pouvait, aussi bien, être regardée comme le troisième Congrès de l'Histoire des Sciences; elle était présidée et avait été organisée par Paul Tannery. Le compte rendu des travaux de cette cinquième Section est précédé du portrait de Paul Tannery et d'une Notice biographique sur le savant dont l'activité scientifique s'est manifestée là, pour la dernière fois. Il n'y a pas lieu de parler ici de la communication qu'il a faite au Congrès sur *les Cyranides*.

Le *Théorème de Pythagore, origine de la Géométrie scientifique*, est le titre d'une très intéressante communication de M. H.-G. Zeuthen. L'auteur débute par d'importantes remarques sur la distinction entre la période où l'on se contente d'intuitions et la période scientifique : les remarques de M. Zeuthen, fondamentales pour l'Histoire, n'ont pas moins de portée dans la Pédagogie scientifique. Quoi qu'il en soit, « la première découverte que l'intuition ne pouvait pas fournir immédiatement fut, d'après M. Zeuthen, celle du *théorème de Pythagore*, appliqué à des triangles rectangles et de côtés inégaux. Cela résulte du fait que les géométries qui ont été capables de se développer ultérieurement ont pris cette découverte pour point de départ ». La connaissance générale de la relation entre les côtés d'un triangle rectangle

est « attribuée par les Grecs à Pythagore; mais le développement rapide qu'a subi ensuite la Géométrie grecque, fondée par ce grand homme, nous a dérobé les moyens de bien connaître la portée de ses connaissances et de ses découvertes. Il en est autrement pour les Indiens; les *Sulbasutras* (1) nous font connaître un état de leur Géométrie presque identique à celui auquel, d'après les meilleures sources, Pythagore l'aurait élevée. Nous apprenons donc à la fois par là à connaître le niveau géométrique où s'est faite la découverte du *théorème de Pythagore* et les progrès ultérieurs que cette découverte allait provoquer immédiatement ». L'*Apastamba Sulbasutra* contient en particulier, d'une part, des constructions géométriques d'autels qui remontent sans doute à une époque bien antérieure à celle où écrivait Apastamba, et qui montrent une connaissance très ancienne du triangle rectangle de côtés 5, 12, 13, d'autre part, l'énoncé général du théorème de Pythagore, une bonne approximation de $\sqrt{2}$, à savoir $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3.4}-\frac{1}{34.3.4}$, et diverses constructions géométriques, entre autres une transformation du rectangle ab en un carré, pareille à celle d'Euclide, et résultant de l'identité

$$ab=\left(\frac{a+b}{2}\right)^2-\left(\frac{a-b}{2}\right)^2.$$

Après une analyse détaillée de la *Sulbasutra* d'Apastamba, M. Zeuthen, dans cette manière où l'on sait qu'il excelle, et en restant dans l'état d'esprit et l'ordre de connaissances que révèle le vieux livre hindou, s'efforce de reconstruire la façon dont les vérités géométriques qu'il contient ont pu être découvertes et démontrées; si l'observation seule a pu conduire à la connaissance du triangle rectangle aux côtés 3, 4, 5, par exemple, il a bien fallu quelque intelligence géométrique pour arriver à la connaissance générale; c'est cette *intelligence géométrique* que M. Zeuthen retrouve sur la figure formée du carré de côté 7, décomposé en

(1) D'après M. Bürk, qui a donné, dans les Tomes LV et LVI de la *Zeitschrift der deutschen morgenländischen Gesellschaft*, une traduction, précédée d'une introduction, de l'*Apastamba Sulbasutra*, celle-ci doit dater, au plus tard, du IVe ou Ve siècle avant notre ère.

7^2 petits carrés. Je dois signaler aussi l'hypothèse d'une démonstration grecque du théorème de Pythagore, fondée sur la similitude, et antérieure à celle d'Euclide, démonstration à laquelle Euclide aurait substitué sa démonstration propre, parce que la première se fondait sur cette théorie des proportions, qui n'a été établie rigoureusement que par Eudoxe, et dont Euclide a rejeté l'exposition au Ve et au VIe Livres des *Éléments*. C'est là l'occasion pour M. Zeuthen de revenir sur le rôle que la découverte des grandeurs incommensurables a tenu dans la constitution de la Géométrie grecque.

Sous ce titre *De l'accélération produite par une force constante, notes pour servir à l'histoire de la Dynamique,* M. Duhem nous raconte, d'Aristote à Gassendi, la lente et difficile évolution qui a abouti à la loi fondamentale de la Dynamique. Pour Aristote et ses commentateurs, une force constante produit un mouvement uniforme dont la vitesse est proportionnelle à la force qui l'engendre. Dès lors, pour expliquer la variation de vitesse d'un corps qui tombe, il faut admettre la variation de la force. Les hypothèses relatives à cette variation donnent lieu à de longues discussions. Le milieu tient d'abord le rôle essentiel; la notion d'impulsion acquise (*impetus*) finit par s'introduire : Léonard de Vinci commence à la préciser et devine la loi des vitesses pour un corps qui tombe; il ne lui a manqué que de savoir faire une intégration pour en déduire la loi des espaces. Il admet d'ailleurs encore, comme Aristote, que la plus grande vitesse d'un projectile est atteinte au milieu de la course. Piccolomini esquisse la théorie qui explique l'accélération par la génération continuelle de nouvelles impulsions dues à la perpétuité de la pesanteur et à l'accumulation de ces impulsions. Scaliger et Benedetti affirment que la force constante détermine, non pas une vitesse constante, mais une vitesse qui va s'accélérant.

Mais cette proposition est loin d'être admise immédiatement. M. Duhem nous montre Galilée restant fidèle à la doctrine aristotélicienne de la proportionnalité de la vitesse à la force, jusqu'à la fin de sa vie. « Dans les considérations qui ont conduit Galilée à regarder la chute des graves comme un mouvement uniformément accéléré, il n'est fait aucun appel à la Dynamique ou, comme on disait en ce temps, à la Physique. De la puissance qui meut le

corps grave, il n'est pas question. » Descartes et Beeckmann formulent nettement la loi de l'inertie : *Quod in vacuo semel incæpit moveri, semper et æquali celeritate movetur*, et montrent que, en vertu de cette loi, une pesanteur constante engendre une chute uniformément accélérée. Si Descartes n'arrive pas à la loi des espaces, c'est en vertu d'une confusion très singulière. Il se rend compte aussi de l'action retardatrice du milieu. Citons les dernières paroles de M. Duhem sur la loi qui a fait l'objet de son étude.

« Sa naissance a été le résultat d'une évolution très lente, très complexe : les quelques idées justes qui la composent se sont dégagées très péniblement des notions fausses avec lesquelles elles étaient confondues; bien souvent, après être apparues un moment, elles se sont voilées de nouveau pendant une longue durée; presque toujours, il est impossible de fixer avec précision l'instant où chacune d'elles s'est manifestée pour la première fois; presque toujours, il est vain de vouloir nommer celui qui en fut le véritable inventeur. Il n'est guère de doctrine importante en Mécanique qui ne prête aux mêmes remarques. »

M. Mentré (*La simultanéité des découvertes scientifiques*) fait quelques remarques générales sur les conditions où se sont produites et où peuvent se produire les découvertes simultanées; il en a réuni une cinquantaine de cas intéressants.

La *Note historique sur l'emploi de procédés matériels et d'instruments usités dans la Géométrie pratique au moyen âge* (x^e-xiiie siècles), de M. V. Mortet, est un travail très érudit et documenté. L'auteur y insiste sur le rôle de divers instruments usités, soit pour les mesures effectives, soit pour les démonstrations et l'enseignement, à une époque où la distinction entre la Géométrie pratique et la Géométrie théorique était loin d'être réalisée, bien qu'elle fût reconnue. Je signalerai, en particulier, les remarques relatives au niveau formé d'un triangle isoscèle en bois, au sommet duquel est suspendu un fil à plomb, et les explications des mots *liviax, livel* (niveau) dans le sens de hauteur d'un triangle, du mot *keare* dans le sens de *multiplie,* du mot *orneure du cercle* dans le sens de surface de la sphère.

M. E. Lebon (*Pour l'histoire des hypothèses sur la nature*

des taches du Soleil) raconte successivement, en renvoyant à de nombreux textes, les hypothèses des astres errants, des nuages, des volcans, des écumes, des scories, des rochers.

Enfin le Congrès a adopté à l'unanimité un vœu relatif à l'enseignement de l'Histoire des Sciences, à savoir :

1° Que des rudiments d'Histoire des Sciences soient enseignés en même temps que les Sciences elles-mêmes et par les mêmes professeurs dans les établissements d'enseignement secondaire; que cet enseignement, tout élémentaire d'ailleurs, soit rendu obligatoire par les programmes et reçoive une sanction dans les examens;

2° Que, dans les Universités, l'enseignement régulier de l'Histoire des Sciences soit assuré par la création de cours divisés en quatre séries :

Sciences mathématiques et astronomiques.
Sciences physiques et chimiques.
Sciences naturelles.
Médecine.

J. T.

SERRET (J.-A.). — LEHRBUCH DER DIFFERENTIAL- UND INTEGRAL-RECHNUNG; mit Genehmigung des Verfassers deutsch bearbeitet von *Axel Harnack*. Zweite durchgesehene Auflage, herausgegeben von *G. Bohlmann* und *E. Zermelo*. Dritter Band. 1 vol. in-8°; XII-479 pages. Leipzig, Teubner, 1903-1904.

Ce dernier volume de la seconde édition allemande du livre classique de J.-A. Serret contient la théorie des équations différentielles ordinaires et aux dérivées partielles et les éléments du calcul des variations. La matière est restée à peu près la même que dans la première édition allemande, mais l'ordre a été modifié sur quelques points, ce qui a entraîné quelques changements peu profonds. Si l'on veut faire la comparaison avec l'édition française, on notera, en particulier, l'introduction des idées de Lie sur les

équations différentielles, les paragraphes relatifs aux solutions singulières d'une équation différentielle ou d'un système d'équations différentielles, le Chapitre sur la théorie des équations différentielles linéaires.

L'exposition du calcul des variations a été entièrement reprise. Il ne pouvait être question, dans ce livre, d'un exposé systématique du sujet dans le sens moderne. L'objet essentiel des auteurs est resté, comme pour Serret et pour Harnack, la formation des équations différentielles et des conditions aux limites dans le cas d'intégrales simples. Les auteurs ne se sont nullement occupés des intégrales doubles, non plus que de la question de savoir si une solution de l'équation différentielle correspond à un maximum ou à un minimum; ils se sont contentés, en traitant des exemples simples, de donner au lecteur une vue claire sur la nature des problèmes et des méthodes du calcul des variations. J. T.

BOUASSE (H.). — Notions fondamentales relatives aux déformations élastiques et permanentes. (Bibliothèque de l'Élève ingénieur : Mécanique, Essais des matériaux.) 1 vol. in-8°; 150 pages. Paris, Gauthier-Villars, 1905.

Si le sujet de ce livre comporte des difficultés et des obscurités, l'auteur, qui a consacré sa vie scientifique à l'étude des déformations, et dont l'esprit critique est très développé, connaît à fond ces difficultés et ces obscurités. Il ne les cache pas; par contre, il sait mettre en pleine lumière ce qui est bien établi :

« Je me propose, dit-il, d'exposer dans ce petit livre ce que l'expérience apprend de plus sûr et de plus général sur les déformations. Le problème que j'essaierai de résoudre a l'énoncé suivant : Quand on tend un corps, quand on le tord, quand on le fléchit, il résulte de ces déformations certaines relations entre la variable géométrique (allongement, torsion, etc.) et la variable mécanique (force, couple, etc.). Quelles sont ces relations? Quelle est la forme des courbes qui les représentent?

» Je ne limiterai pas mes remarques aux métaux; j'envisagerai l'ensemble des problèmes que peut rencontrer le physicien ou l'ingénieur, en prenant ce mot dans son acception la plus générale; certains phénomènes, qui n'ont aucun intérêt pour celui qui construit les ponts, en présentent un considérable pour celui qui étudie des chronomètres ou des ampèremètres.

» Je discuterai la signification d'une foule de mots (module, écrouissage, hystérésis, etc.) que tout le monde emploie, et avec les significations les plus singulières et les plus contradictoires. Je préciserai dans quelles conditions les expériences doivent être effectuées pour que les résultats aient un sens. Ce n'est pas tout de faire des essais mécaniques; il faut se rendre un compte exact du profit que la science et l'industrie peuvent en tirer. Enfin, je donnerai une idée de l'état des théories, de leur insuffisance et du peu d'aide qu'elles sont capables de nous offrir pour le moment. »

Le livre est divisé en cinq Chapitres : Après avoir montré comment on peut classer les différentes sortes de déformations et comment elles se mêlent, l'auteur étudie en général les courbes de traction et de torsion, et les moyens de décrire ces courbes; il traite ensuite des déformations parfaitement élastiques et reprend les courbes de traction et de torsion dans le cas des déformations permanentes. Les six Chapitres dont je viens d'indiquer les titres ont un caractère nettement expérimental : Dans le dernier Chapitre il expose et discute les fondements de la théorie classique de l'élasticité parfaite pour les corps isotropes. « Tout ce qu'on peut dire en sa faveur, c'est qu'elle semble s'accorder avec les faits, dans le cas des déformations les plus simples, pourvu qu'elles soient suffisamment petites. » J. T.

SCHRÖDER (R.). — Die Anfangsgründe der Differentialrechnung und Integralrechnung. Für Schüler von höheren Lehranstalten und Fachschulen sowie zum Selbstunterricht. 1 vol in-8°; 131 pages. Leipzig, Teubner.

M. R. Schröder se défend de prendre parti dans la question qui divise les mathématiciens allemands, à savoir la place qu'il convient de faire ou de ne pas faire au calcul différentiel et intégral dans l'enseignement secondaire. En effet, au lieu de discuter la question, il la résout en publiant un livre simple et clair où il reproduit l'enseignement qu'il donne, depuis que le plan d'études de Prusse (1901) laisse aux maîtres la liberté d'introduire dans la classe de *Prima* les éléments de la Géométrie analytique et de l'Analyse. On jugera sans doute, en le lisant, que cet enseignement est à la portée des élèves. Il va notablement plus loin qu'on ne fait en France dans la classe préparatoire au baccalauréat, beaucoup moins loin que dans nos classes de Mathématiques spéciales.

La notion de dérivée est, comme il est naturel, appuyée sur la représentation géométrique. Les règles pour prendre les dérivées sont suivies d'un très grand nombre d'exemples et d'exercices, gradués avec soin. Peut-être l'auteur est-il par trop bref sur ce qui concerne les fonctions inverses : au lieu de dire aux commençants que l'équation $y = \operatorname{arc}\sin x$ équivaut à l'équation $x = \sin y$, il me paraît préférable d'assujettir, comme le voulait Cauchy, la fonction $\operatorname{arc}\sin x$ à être comprise entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$. Il me semble, par contre, que le Chapitre qui concerne les formes indéterminées est trop développé, et que l'auteur aurait pu se dispenser de considérer plusieurs de ces formes. Le Chapitre relatif aux courbes (cercle, ellipse, hyperbole, parabole, développée de la parabole, cissoïde, cycloïde, lemniscate, cardioïde) est bien propre à intéresser les élèves, d'autant qu'ils retrouveront ces courbes un peu plus loin dans les applications du calcul intégral à la quadrature et à la rectification. La rectification de la cissoïde, par exemple, montre que l'auteur pousse assez loin les

éléments du calcul intégral. L'Ouvrage se termine par quelques applications simples à la Mécanique. Les exemples sont bien choisis et peuvent être utiles au professeur de Physique.

Plusieurs des professeurs de nos lycées seraient sans doute disposés à demander « la liberté comme en Prusse ». Notre système d'examens rendrait malheureusement presque illusoire cette liberté, qui permet ailleurs de faire des expériences très intéressantes. J. T.

DEDEKIND (R.). — Stetigkeit und irrationale Zahlen. Dritte unveränderte Auflage. 24 pages in-8°; Braunschweig, 1905, Vieweg et fils.

Les idées que M. Dedekind a émises dans ce petit écrit sont aujourd'hui classiques; la notion de « coupure » figure même aujourd'hui dans les programmes officiels français. L'auteur a toutes les raisons pour ne rien changer au texte de la première édition. Il n'est pas sans intérêt de savoir que c'est en 1858 que M. Dedekind, alors professeur au Polytechnicum de Zürich et chargé d'y enseigner le calcul différentiel, est parvenu à cette notion; il en parla à quelques amis, à Durège en particulier, à quelques élèves, à quelques professeurs; il ne pouvait se résoudre à rien publier sur ce sujet, « parce que l'exposition n'est pas aisée et que la chose n'est guère féconde ». Il s'y décida pourtant en 1872, après la publication dans le *Journal de Crelle* (Tome 74) de l'écrit bien connu de Heine *Die Elemente der Functionenlehre*. J. T.

BOLZA (O.). — LECTURES ON THE CALCULUS OF VARIATIONS. (DECENNIAL PUBLICATIONS OF THE UNIVERSITY OF CHICAGO, 2e série, Vol. XIV.) 1 vol. in-8°, XV-271 pages, 48 figures. Chicago, The University of Chicago Press, 1904.

La connaissance de la théorie de Weierstrass a cessé, surtout grâce au *Lehrbuch der Variationsrechnung* de M. Kneser, d'être refusée à ceux qui n'avaient pas été la chercher aux leçons mêmes du maître, et l'on peut maintenant, même en dehors de ce petit cercle d'élus, parler d'une exposition correcte du calcul des variations.

C'est une exposition de cette espèce que M. Bolza a entreprise. Il a pu s'inspirer non seulement du livre de M. Kneser, mais aussi des notes recueillies par lui-même (en 1879) et par d'autres aux cours de Weierstrass, et serait sans doute un de ceux qui pourraient le mieux achever de dissiper le mystère qui règne encore autour des idées du grand géomètre, en nous en faisant connaître l'histoire. Il faut espérer qu'il nous rendra ce service un jour ou l'autre, et son livre contient déjà quelques indications très intéressantes à cet égard, d'autant que, dans ce petit travail d'érudition, il apporte ce souci constant d'exactitude qui est une des plus heureuses caractéristiques du livre.

M. Bolza a, en effet, visé à deux qualités qui s'excluent souvent et qu'il a su cependant réunir : la rigueur et la simplicité.

A cet effet, il se borne strictement aux cas les plus simples : l'extremum absolu de l'intégrale $\int F(x, y, y')\,dx$ et le problème isopérimétrique correspondant : une seule variable indépendante, une seule fonction inconnue et une seule espèce de condition de liaison.

C'est sur cet exemple qu'il expose et discute les différentes méthodes par lesquelles on peut traiter la question, y compris (et sur ce point seul l'auteur sort du domaine strictement élémentaire) celle par laquelle M. Hilbert démontre l'existence de l'extremum.

J'ai dit qu'il le faisait avec un soin jaloux de la rigueur. M. Bolza était particulièrement bien armé à cet égard. Dans ses recherches

antérieures, publiées, en particulier, dans le *Bulletin of the American Mathematical Society,* il avait indiqué une série d'exemples mettant en évidence, non seulement les erreurs que les travaux de Weierstrass et de Scheeffer avaient eu pour objet de dissiper, mais certaines autres qui subsistaient encore après eux.

Aussi toutes les questions qu'il traite sont-elles l'objet d'une critique sévère, en la sûreté de laquelle on peut toujours avoir confiance. Citons à cet égard, outre l'étude des difficultés qu'il avait soulevées dans ses Mémoires précédents, celle de l'objection de du Bois-Reymond, celle de l'existence du champ, et aussi les délicates discussions relatives à la notion générale d'intégrale, nécessaires pour la méthode (à laquelle nous faisions allusion tout à l'heure) de M. Hilbert, du moins si, comme le fait M. Bolza, on suit, sans la modifier, la marche indiquée par M. Hilbert lui-même et les auteurs qui ont exposé jusqu'ici sa démonstration.

Cet examen si rigoureux, si minutieux, où aucun détail n'est négligé, rend très remarquables la simplicité et la clarté d'une pareille exposition. Par des divisions bien comprises, d'habiles dispositions typographiques, des locutions heureusement trouvées (telles que celle de minimum *demi-fort,* dans le cas des problèmes isopérimétriques), il arrive à nous présenter un Ouvrage d'un aspect clair et élégant, d'une lecture facile.

Mentionnons encore deux avantages que l'auteur a sur ses prédécesseurs. D'abord, il ne suppose pas les données analytiques (c'est la critique que nous faisions ici même à l'Ouvrage de M. Kneser) et, d'autre part, il ne reconnaît pas à la représentation paramétrique l'importance primordiale que, dans un respect un peu exagéré, à notre avis, pour la tradition de Weierstrass, lui attribuaient MM. Zermelo et Kneser. Il ne se laisse entraîner qu'une fois à suivre leurs errements : dans sa préface, où il cite ce détail de notation (notation employée d'ailleurs dès Lagrange) comme un des progrès essentiels réalisés en calcul des variations, au même titre que l'obtention des conditions suffisantes de l'extremum. Ce serait vraiment rabaisser cette dernière découverte, et nous ne pouvons que donner raison au Chapitre IV du livre (¹) contre la préface.

(¹) Page 115.

Si nous négligeons cette concession faite par l'auteur à des habitudes antérieurement prises, nous ne lui ferons qu'un seul reproche : il lui est commun, d'ailleurs, avec beaucoup de ceux qui, dans ces dernières années, ont parlé du calcul des variations ; mais on est tenté d'en vouloir à M. Bolza plus qu'à d'autres, en raison du soin même avec lequel son livre est documenté. Le Chapitre V, intitulé *Kneser's theory,* laisserait difficilement soupçonner, non pas sans doute au lecteur attentif qui collationne avec soin les citations mises au bas des pages, mais à celui qui s'en tient au texte, que M. Darboux a, indépendamment de Weierstrass, indiqué, sur l'exemple des géodésiques, une méthode entièrement rigoureuse, fondée sur une idée simple et féconde, pour traiter le problème du calcul des variations, et que l'unique prétention de M. Kneser a été de transporter au cas général (à l'aide de son importante notion de *transversale*) cette idée et cette méthode.

J. Hadamard.

MÉLANGES.

SUR LES SÉRIES DE FONCTIONS HOLOMORPHES ;

Par D. POMPEIU.

Je me propose de montrer, dans cette Note, comment, en se fondant sur deux propositions, dues à M. Arzela et relatives aux fonctions de variables réelles, on peut démontrer un théorème sur les séries dont les termes sont des fonctions holomorphes d'une variable complexe.

1. Dans les *Mémoires de l'Académie royale des Sciences de l'Institut de Bologne* (année 1899) M. Arzela a donné la condition nécessaire et suffisante pour que la somme d'une série convergente de fonctions continues soit une fonction continue.

M. Borel, dans ses *Leçons sur les fonctions de variables réelles* (page 41 et suivantes) a beaucoup simplifié la démonstration de M. Arzela. Une notion nouvelle, introduite par M. Arzela, joue le rôle essentiel dans cette démonstration : c'est la notion de *convergence quasi-uniforme*.

Soit

$$\sum f_n(x, y)$$

une série de fonctions continues (par rapport à l'ensemble des variables x et y) convergente dans un domaine fermé D. On dit que cette série converge quasi-uniformément, dans le domaine D, si l'on peut faire correspondre à tout nombre positif ε, aussi petit que l'on veut, et à tout nombre N aussi grand que l'on veut, un nombre fini $N' \geqq N$ tel que, pour chaque point $P(x, y)$, pris dans D, il existe un entier n_P compris entre N et N', et tel que l'on ait

$$|R_{n_P}| < \varepsilon,$$

R_{n_P} étant le reste de la série au point $P(x, y)$.

Voici maintenant l'énoncé du théorème de M. Arzela :

La condition nécessaire et suffisante pour qu'une série dont les termes sont des fonctions continues par rapport à l'ensemble des variables et qui converge dans un domaine D *ait pour somme une fonction continue dans* D *est que la convergence de la série soit quasi-uniforme dans* D.

Dans les mêmes *Mémoires de Bologne* (mai 1900) M. Arzela a montré qu'une série qui converge quasi-uniformément peut être intégrée terme à terme.

2. Cela étant rappelé, considérons une série

$$\sum h_n(z) \tag{1}$$

dont les termes sont des fonctions holomorphes, dans un certain

domaine D et supposons que cette série converge dans le domaine D. Soit $H(z)$ la somme de la série (1). On peut se demander dans quels cas la fonction $H(z)$ est holomorphe dans D.

Dans une Thèse [1], que j'ai soutenue devant la Faculté des Sciences de Paris, le 31 mars 1905, j'ai démontré le théorème suivant :

Pour qu'une fonction de variable complexe $H(z)$, *définie dans un domaine* D *simplement connexe, soit holomorphe dans ce domaine, il faut et il suffit que :*

1° *La fonction* $H(z)$ *soit continue dans* D;
2° *L'intégrale*

$$\int_C H(z)\,dz$$

soit nulle pour tout contour fermé C, *intérieur à* D.

Cela étant établi et faisant usage des résultats de M. Arzela on démontre immédiatement le théorème suivant :

Pour que la somme d'une série, dont les termes sont des fonctions holomorphes, soit elle-même une fonction holomorphe il faut et il suffit que la convergence de cette série soit quasi-uniforme.

LES ÉPHÉMÉRIDES CHEZ LES BYZANTINS [2];

Par M. Paul TANNERY.

On ne s'explique guère, dans l'état actuel de nos connaissances, comment les Byzantins, pendant tout le moyen âge, ont continué à

---

(1) *Sur la continuité des fonctions de variables complexes* (*Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse,* 2e série, t. VII).

(2) Bien que ce fragment, qui ne porte ni date, ni titre, soit inachevé, j'ai cru devoir le publier. J. T.

étudier Ptolémée, à le commenter et à l'annoter, sans constater le désaccord de ses Tables avec l'observation, et sans chercher à le corriger, sinon par eux-mêmes, au moins en recourant aux Arabes. Ce ne serait du moins qu'au milieu du XIVe siècle que Georges Chrysococcas aurait traduit des Tables rapportées de Perse par un Chioniades et dont Bouillau a donné quelques extraits dans son *Astronomia philolaïca*. Autant qu'on en peut juger par ces extraits, ces Tables, dont l'auteur réel serait difficile à nommer, paraissent en tout cas antérieures aux Tables ilkhemiennes, dues à Nasr-Eddin.

Ce n'était cependant point dans un but exclusivement théorique que les Byzantins étudiaient l'Astronomie dans Ptolémée : ceux que ne rebutaient pas les difficultés de cette théorie avaient, au contraire, un objectif bien déterminé; la science des astres devait les conduire à la prédiction de l'avenir. Or, le premier problème astrologique, l'établissement d'un thème génethliaque, consiste à trouver, pour un moment donné du passé, la position de la sphère des fixes et les situations dans le ciel du Soleil, de la Lune et des planètes; ce problème ne peut se résoudre sans tables astronomiques, et, comme les moindres erreurs changent toutes les combinaisons, il faut des tables aussi exactes que possible.

C'est la croyance à l'Astrologie qui, chez les Arabes, les Perses et les Mongols, a non seulement maintenu l'étude de l'Astronomie, mais encore assuré les progrès de la Science; en Occident, jusqu'après Képler, c'est la même croyance qui a permis de rallumer la lampe éteinte et qui en a entretenu la flamme précieuse. Les Byzantins auraient-ils donc échappé à la loi commune? Il n'est pas besoin de prouver qu'ils se sont occupés d'Astrologie et ne se sont pas bornés à étudier la *Syntaxe* pour faire de l'Astronomie de cabinet. Mais ont-ils, seuls, fait de l'Astrologie sans se préoccuper de l'exactitude des fondements de leurs prédictions?

Évidemment non, les astrologues byzantins ont dû se servir d'éphémérides, et, pour s'en procurer de bonnes, ils ne pouvaient mieux faire que d'emprunter celles de leurs confrères juifs ou musulmans; s'il ne nous en a été signalé aucune trace jusqu'à présent, il faut observer que les manuscrits grecs astrologiques n'ont pas encore été dépouillés au point de vue de l'Histoire de la Science; d'un autre côté, précisément parce que les éphémérides

à l'usage des astrologues avaient un objet exclusivement pratique (de même que les almanachs) et qu'on recherchait toujours les plus nouvelles, il n'y aurait rien d'étonnant à ce que les anciennes aient entièrement disparu et qu'on n'en retrouve que de dates trop récentes pour qu'elles aient un intérêt historique réel.

Ptolémée restait à part, en dehors de la question pratique; c'était le livre consacré pour l'enseignement de la théorie; les Arabes ne le traitaient pas autrement; seulement, à côté de sa traduction et des commentaires qu'ils étudiaient toujours, ils possédaient nombre d'imitations, faites par différents auteurs; les Byzantins se contentaient de l'original; en réalité, ils ne perdaient guère à ne pas connaître les ouvrages théoriques des Arabes, car ceux-ci, bons observateurs, bons constructeurs d'instruments et bons calculateurs, n'ont pas déployé une grande originalité scientifique.

Par suite de cette distinction entre la théorie de l'Astronomie et l'usage pratique des Tables, ce n'est évidemment que par un grand hasard que nous pouvons trouver dans les scholies byzantins sur la Syntaxe un indice sur l'existence de ces éphémérides que j'ai supposée jusqu'à présent et dont il me reste à prouver l'existence.

Celui de ces scholies qui va nous permettre de faire cette preuve se trouve en double exemplaire dans le manuscrit de la Bibliothèque Nationale, fonds grec 453 (f°s 68-71 et 79-82) en marge de cette partie des *Prolégomènes* de la Syntaxe que Hultsch a publiés dans son édition de Pappus (III, xvii-xix, 1138-1165, xx-xi) d'après le *Vaticanus gr.*, 184.

Le copiste de notre manuscrit, Jean de Sainte-Maure (vers 1600) a fidèlement reproduit, en en cotant les pages (3 à 9), un ancien manuscrit qui doit se trouver également à la Vaticane, et dont les marges avaient souffert. De là quelques lacunes fâcheuses, mais qui ne troublent pas le sens général.

L'époque où a été écrit le scholie en question ne peut être précisée, tant que l'original utilisé par Sainte-Maure n'aura pas été retrouvé; mais, si nous disons qu'il y est parlé d'éphémérides partant du 1er mars de l'an du monde 6540, c'est-à-dire 1032 de notre ère, il sera clair qu'il doit valoir pour nous comme un témoignage du xie siècle.

L'auteur du scholie est d'ailleurs relativement instruit et intelligent; il commence par exposer d'une façon exacte et claire la construction des Tables de la *Syntaxe* et celle des *Tables manuelles* de Ptolémée; il en fait ressortir les différences et insiste sur ce point que les éléments des époques (ère de Nabonassar dans la *Syntaxe,* ou de Philippe Arrhidée dans les *Tables manuelles*) n'ont nullement été déterminés directement, mais calculés par Ptolémée en partant d'observations faites par lui-même.

Mais il y eut, dit-il, une observation faite par des auteurs plus récents (παρὰ τοῖς νεωτέροις) d'où résulte pour les mouvements moyens du Soleil une différence avec ceux qu'a exposés Ptolémée. Cette observation est celle d'un équinoxe d'automne, dont la date est précisée, de façon que nous devons la fixer au 19 septembre 830 après Jésus-Christ, vers onze heures du matin.

Or cette date est précisément celle de la première et la plus célèbre observation d'équinoxe faite sous Almamoun par Yahia-ben-Aboumansour de Mossoul; si les textes arabes donnent midi huit minutes comme le moment de l'observation, il est clair que l'auteur suivi par notre scholiaste avait supposé l'observation faite à Bagdad et avait réduit l'heure à celle de Constantinople ou d'Alexandrie pour permettre la comparaison avec les équinoxes observés par Ptolémée. Il n'y a donc pas de doute que les νεώτεροι de notre scholiaste ne soient les astronomes d'Almamoun. De cette observation, rapprochée de celle faite par Ptolémée le 25 septembre 132 à 2 heures après midi, il résulte, dit notre scholiaste, que la longueur de l'année solaire doit être fixée, non pas à $365^j\frac{1}{4}-\frac{1}{300}$, comme l'avait fait Ptolémée d'après Hipparque, mais à $365^j\frac{1}{4}-\frac{1}{110}$, ou autrement à $365^j\,14'27''$, d'où pour le mouvement journalier moyen $0°59'8''20'''$.

Ce sont effectivement les chiffres qui ressortent des célèbres *Tables vérifiées* d'Almamoun.

Les mêmes νεώτεροι ont encore, d'après notre scholiaste, corrigé sur deux autres points les hypothèses de Ptolémée. D'un côté, ils ont trouvé que l'excentricité de l'orbite solaire était $2°5'49''$ pour le rayon $60°$; de l'autre, que l'apogée, au lieu d'avoir une longitude fixe, suivait, comme ceux des cinq planètes, le mouvement propre de la sphère des fixes (précession des équi-

noxes), d'ailleurs à raison de 1° pour 66 ans et non pour 100 ans.

Ici nous n'avons plus, à proprement parler, des résultats obtenus par les astronomes d'Almamoun; car l'excentricité que supposent les *Tables vérifiées* n'est que de 2° 4′ 40″.

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE.

GUICHARD (C.). — *Traité de Mécanique.* 2e partie : Cinématique, Statique. In-8°, VIII–196 p. avec fig. Paris, Vuibert et Nony.

BACHMANN (PAUL). — *Zahlentheorie. Versuch einer Gesamtdarstellung dieser Wissenschaft in ihren Hauptteilen.* V. Tl. *Allgemeine Arithmetik der Zahlenkörper.* Gr. in-8°, XXII-548 p. Leipzig, Teubner.

BIGOURDAN (G.). — *Les éclipses de Soleil. Instructions sommaires sur les observations que l'on peut faire pendant ces éclipses, et particulièrement pendant l'éclipse totale du* 30 *août* 1905. In-8°, 168 p. avec fig. Paris, Gauthier-Villars. 3 fr. 50 c.

GÖTTSCH (A.). — *Anleitung zum Gebrauche des Quadranten.* Gr. in-8°, 15 p. Kiel, Lipsius et Tischer. Mit Quadrant, 16 m. 50 pf.

— *Anleitung zum Gebrauche der Ringkugel.* Gr. in-8°, 20 p. Mit Ringkugel, 27 m. 50 pf.

— *Anleitung zum Gebrauche des Telluriums.* Gr. in-8°, 16 p. Mit Telluriums, 20 m.

GRAHAM (J.). — *Elementary treatise on the Calculus. For engineering students.* 3e édit. In-8°, 288 p. London, Spon. 7 sh. 6 d.

HABERLAND (MAX.). — *Beziehungen der merkwürdigen Punkte eines Dreiecks zu den Ankreismittelpunktedreiecken. Potenzpunktedreiecken u. Gegenpunktedreiecken.* In-8°, 20 p. avec fig. Neustrelitz, Barnewitz. 50 pf.

Heath (T.-E.). — *Our stellar universe; six stereograms of Sun and Stars.* In-8°. London, King, Sell et Co. 3 sh.

Hoüel (G.-J.). — *Fünfstellige Logarithmentafeln der Zahlen u. der trigonometr. Funktionen nebst dem Gaussischen Additions- u. Subtractionslogarithmen u. verschiedenen Hilfstafeln.* Neue Ausgabe. Gr. in-8°, XLVI-118 p. Berlin, Prausnitz. Cart. 2 m. 50 pf.

Berliner astronomisches Jahrbuch f. 1907 *m. Angaben für die Opposition der Planeten* (1)-(512) *f.* 1905. Herausgeg. v. J. Bauschinger. Gr. in-8°, X-548 p. Berlin, Dümmler. 12 m.

Neumann (Ernst Rich.). — *Studien über die Methoden von C. Neumann u. G. Robin zur Lösung der beiden Randwertaufgaben der Potentialtheorie.* Gekrönte Preisschrift. In-8°, XXIII-194 p. avec 9 fig. Leipzig, Teubner. 10 m.

(Preisschriften der fürstl. Jablonowskischen Gesellschaft zu Leipzig XXXVII.)

Schub (Fred.). — *Vergelijkend overzicht der methoden ter bepaling van aantallen vlakke krommen.* Gr. in-8°, 12-218 et 8 p. Amsterdam, Olivier. 3 fl.

Thomae (J.). — *Sammlung von Formeln und Sätzen aus dem Gebiete der elliptischen Funktionen, nebst Anwendungen.* In-8°, IV-44 p. Leipzig, Teubner. Cart. 2 m. 80 pf.

Verhandlungen *des* 3. *internationalen Mathematiker-Kongresses in Heidelberg von* 8. *bis* 13. August 1904. Herausgeg. von A. Krazer. Gr. in-8°, X-756 p. avec 2 fig. et 2 planches. Leipzig, Teubner. Relié, 18 m.

Webb (H.-A.). — *On the convergence of infinite series of analytic functions.* In-4°, 16 p. London, Dulau. 1 sh.

Wieleitner (Heinr.). — *Bibliographie der höheren algebraischen Kurven f. den Zeitabschnitt von* 1890-1904. Gr. in-8°, 58 p. Leipzig, Göschen. 1 m. 50 pf.

Wilda. — *Diagramm- u. Flächenmesser.* Vollständiger Ersatz für das Planimeter, zum schnellen und genauen Ausmessen beliebig begrenzter Flächen, Dampfdiagrammen usw. 1 Blatt auf Celluloïd. Mit Gebrauchsanweisg. (1 Blatt m. 2 fig.). Hannover, Jänecke. 2 m.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

RE (A. DEL). — LEZIONI SULLE FORME FONDAMENTALI DELLO SPAZIO RIGATO, SULLA DOTTRINA DEGLI IMMAGINARII E SUI METODI DI RAPPRESENTAZIONE NELLA GEOMETRIA DESCRITTIVA. 1 vol. in-8°; IV-85 pages. Napoli, Alvano, 1906.

L'enseignement de la Géométrie descriptive est, dans notre pays, limité le plus souvent au système de représentation dû à Monge. Cela, sans doute, se justifierait par des raisons pratiques, si cet enseignement se réduisait aux premiers éléments et aux constructions simples qui résultent naturellement de ce système. Il ne semble pas toutefois qu'il y ait lieu de le développer indéfiniment, avec d'infinis détails adaptés à des questions particulières qui seraient sans intérêt, si on ne les posait pas aux examens; l'introduction dans nos programmes de quelques notions de géométrie projective permettra sans doute d'élargir l'enseignement de la géométrie descriptive et, par là même, d'ouvrir l'esprit de ceux qui l'étudient.

J'ai eu quelquefois l'occasion d'indiquer, dans le *Bulletin*, à propos de livres élémentaires, comment cet enseignement était compris tout autrement à l'étranger, notamment en Italie, et de m'étonner même du peu de place que tenait, dans ces livres, ce que nous appelons *la géométrie descriptive*. Il s'agit, cette fois, d'un livre qui n'est nullement élémentaire, qui s'adresse à des élèves déjà formés et qui ont, sinon des conniassances, au moins des habitudes mathématiques développées. Les *Leçons* de M. Alfonso del Re constituent une introduction à un cours élevé de géométrie descriptive; elles aboutissent à une définition de la géométrie descriptive : *la représentation d'une variété géométrique sur une autre variété géométrique*. Les dernières pages du livre de M. del Re sont consacrées à développer cette définition et à l'illustrer par de nombreux exemples.

Il a fallu, auparavant, la préparer et définir le concept de variété géométrique, dans sa généralité ; l'auteur ne se borne pas aux éléments réels : les éléments imaginaires, dont l'introduction en géométrie permet une unité et une généralité dans les raisonnements qu'il est impossible d'obtenir autrement, ont une existence véritable, et peuvent se définir par des constructions réelles ; comme l'auteur veut faire œuvre de géomètre, et non d'analyste, il définira géométriquement ces éléments imaginaires : les quelques pages où il développe ces définitions, en partant des principes de von Staudt, et en profitant du travail où M. Lüroth a élucidé ces principes, sont parmi les plus intéressantes et les plus originales de son livre : en présentant ce sujet sous une forme didactique, l'auteur a rendu un véritable service. Ces développements impliquent la connaissance des propriétés des congruences linéaires et par conséquent des complexes linéaires. C'est par l'étude de ces propriétés que débute M. del Re, en ne supposant pas d'autres connaissances spéciales chez son lecteur que celles des propositions fondamentales relatives à l'homographie et à l'involution.

Le livre de M. del Re se suffit à lui-même ; considéré comme une introduction, il fait désirer la publication de ses *Leçons de Géométrie descriptive* qui, jusqu'ici, ont été seulement autographiées ; il permet de soupçonner l'esprit de ces leçons. Bien entendu, un enseignement de cette nature ne peut s'adresser qu'à des étudiants déjà formés, et qui n'ont pas des fins exclusivement pratiques. Quoi qu'il en soit, il m'a paru intéressant de faire ressortir une conception de la géométrie descriptive entièrement opposée à celle qui nous est habituelle. J. T.

PIERPONT (J.). — Lectures on the theory of functions of real variables. Volume I. In-8°, XII-560 pages. Boston-New-York-Chicago-London, Ginn et Cie, 1905.

L'excellent livre que publie M. James Pierpont s'adresse à des jeunes gens déjà habitués à manier les mathématiques, exercés

à effectuer, d'une manière correcte, les différentiations et les intégrations courantes, mais dont l'esprit critique n'est pas suffisamment formé; ils connaissent mal les conditions sous lesquelles les propositions qu'ils appliquent sont vraies; ils s'étonnent du moindre piège et, lorsqu'ils y sont tombés, cherchent quelle faute de calcul ils ont commise, et non quelle faute de raisonnement. Ce public-là se trouve ailleurs qu'en Amérique. Il ne faudrait pas, à ce que je crois, rejeter sur l'enseignement élémentaire toute la responsabilité de ce qu'il y a de fâcheux dans cet état d'esprit : si précis que soit cet enseignement, on ne peut empêcher les élèves qui débutent de porter leur attention et leurs efforts sur un mécanisme, nouveau pour eux, qui les intéresse et avec lequel ils ont hâte de se familiariser; il est bien naturel que leurs maîtres multiplient les exemples auxquels ce mécanisme s'adapte bien, et lors même qu'ils ont eu grand soin d'indiquer les précautions qu'il faut prendre pour s'en servir, on ne doit pas se scandaliser outre mesure si les élèves ont, parfois, oublié ces précautions. D'un autre côté, on est bien obligé d'avouer que certaines notions, pour être bien comprises, demandent plus de maturité d'esprit que n'en peuvent avoir tous les élèves, tous ceux même que l'on peut amener à résoudre convenablement une petite question de calcul différentiel ou intégral. Le devoir strict de ceux qui enseignent les éléments est de signaler les lacunes qu'ils laissent dans leur enseignement et de faire pressentir la nécessité d'en reviser un jour les fondements et les points essentiels.

Cette revision a sa place marquée dans l'enseignement supérieur : là où elle n'est pas dirigée expressément par le professeur de l'Université, qui n'a pas toujours le temps de revenir sur les éléments, elle doit être faite par l'étudiant lui-même en s'aidant de quelque livre. Le livre de M. Pierpont est de ceux qu'on peut recommander en toute sécurité, d'autant que le lecteur peut être bien certain d'y trouver autre chose que ce qu'il sait ou ce qu'il croit savoir.

Ce livre reproduit l'enseignement donné par l'auteur et permet de se rendre compte de sa méthode : elle consiste à reprendre les choses au début, en n'admettant, à proprement parler, comme entièrement acquis, que ce qui concerne les nombres entiers positifs, puis, après avoir complété la notion du nombre, à reprendre

une à une toutes les notions fondamentales, en détachant soigneusement tous les théorèmes, dont l'énoncé est toujours complet, avec toutes les restrictions qu'il comporte, et précède toujours la démonstration; il conduit ainsi à la notion d'intégrale multiple; c'est par cette notion, présentée sous la forme la plus générale, que se termine le présent volume. Chemin faisant, il donne de la théorie des ensembles ce qui est utile à son exposition, mais sans s'arrêter à cette théorie pour elle-même et en laissant de côté ce qui ne lui est pas indispensable. De temps en temps, sous le titre *Criticism*, il explique à son lecteur « comment il ne faut pas raisonner » et les erreurs qu'il ne faut pas commettre : ses remarques dénotent un sens très net des besoins des élèves, qui sont les mêmes dans le Nouveau-Monde et dans l'Ancien; des exemples simples et topiques montrent les fautes où l'on tombe quand on néglige quelqu'une des conditions imposées dans ces énoncés auxquels l'auteur a toujours si soigneusement donné une forme explicite. Parfois, il s'en prend même aux manuels, usités en Amérique, contre lesquels il paraît bien qu'il a un peu de mauvaise humeur. J'espère pour lui que les éditeurs de ces manuels ne lui demanderont pas de dommages-intérêts. Il y aurait là matière à de bien beaux procès et à de bien belles plaidoiries.

Je dois signaler encore le soin avec lequel les notations sont choisies et présentées; l'auteur a adopté quelques façons de parler, qui reviennent souvent, se gravent sans peine dans l'esprit du lecteur et soulagent l'exposition par leur brièveté et leur répétition.

Le Livre est divisé en seize Chapitres. Les deux premiers sont consacrés à la notion de nombre : le premier se termine par la notion de limite dans le cas où cette limite est rationnelle : les nombres irrationnels sont introduits à peu près comme le fait M. Méray, dont il semble bien que le nom aurait dû au moins accompagner celui de M. G. Cantor. La *notion de coupure,* dans le sens de M. Dedekind, complète cette introduction.

Deux Chapitres sont ensuite consacrés à la définition des fonctions élémentaires : fonctions rationnelles, algébriques, exponentielles, logarithmiques, circulaires (directes et inverses). L'auteur ayant rejeté les séries au Volume suivant, la définition des fonctions circulaires est naturellement tirée de la Géométrie.

Avant d'aller plus loin, M. Pierpont s'arrête un peu sur les ensembles de points : la notion est présentée dans sa généralité, en regardant un point comme le système de ses n coordonnées : il introduit les notions d'ensemble dérivé, isolé, dense, clos (*complet*), parfait et donne l'exemple classique, dû à M. Cantor, d'un ensemble parfait non dense.

Jusqu'ici il n'a été question, en fait de limites, que des limites de suites infinies : l'auteur a maintenant tout ce qu'il faut pour présenter d'une façon claire et générale les définitions de la limite d'une fonction lorsque la ou les variables s'approchent d'un point, de la convergence, de la continuité et de la discontinuité. C'est l'objet des Chapitres VI et VII. Le suivant est consacré aux dérivées.

Le Chapitre IX se rapporte aux fonctions implicites. M. Pierpont a exposé d'une façon didactique la méthode que M. Goursat a donnée récemment (1903) dans le *Bulletin de la Société mathématique* pour définir ces fonctions par *approximations successives*. Cette méthode, fondée sur un artifice ingénieux, se recommande vraiment par la netteté avec laquelle elle s'applique au cas général.

L'auteur traite ensuite des formes indéterminées, puis des maxima et des minima. Il se borne d'ailleurs, pour cette dernière question, à montrer comment on peut reconnaître qu'il n'y a ni maximum ni minimum en un point, lorsque la première forme, à coefficients non nuls, à laquelle conduit le développement de Taylor, est une forme indéfinie, et qu'il y a un maximum ou un minimum lorsque cette forme est définie : il se contente de signaler les difficultés relatives au cas des formes semi-définies et de donner l'exemple classique $(x - 2y^2)(x - 4y^2)$.

Les cinq derniers Chapitres (XII, ..., XVI) sont consacrés à la définition et aux propriétés fondamentales des intégrales simples et multiples. La Géométrie fournit, pour la définition de l'intégrale simple, une première orientation qui conduit naturellement à la définition des intégrales supérieure et inférieure et des fonctions intégrables, au sens de Riemann, comme aussi à l'étendue (*content*) extérieure ou intérieure d'un ensemble de points sur une droite, au sens de M. Jordan.

M. Pierpont étudie successivement les intégrales *propres*, où la

fonction intégrale reste finie dans l'intervalle d'intégration, et les intégrales qualifiées d'*impropres*, soit parce que la fonction à intégrer devient infinie dans l'intervalle d'intégration, soit parce que cet intervalle devient infini.

Il se borne d'ailleurs au cas où la fonction à intégrer devient infinie en un nombre limité de points. Je dois signaler le soin avec lequel est reprise, pour les intégrales impropres, l'étude du second théorème de la moyenne, du cas où la fonction dont le signe $\int$ dépend d'un paramètre, de la différentiation et de l'intégration sous le signe $\int$, du changement de l'ordre dans les intégrations.

La notion de l'intégrale multiple, en supposant bornés le champ d'intégration d'une part, la fonction à intégrer d'autre part, est exposée dans toute sa généralité. La fonction est supposée définie pour un ensemble (A) borné de points dans un espace à n dimensions. La division de cet espace en parallélépipèdes rectangles au moyen de systèmes de plans orthogonaux conduit d'abord à la notion d'intégrale supérieure et d'intégrale inférieure, puis, comme cas particulier, à la notion des étendues extérieure et intérieure de l'ensemble A; cet ensemble est mesurable, au sens de M. Jordan (a un volume), lorsque ses deux étendues sont égales. M. Pierpont désigne, sous le nom de *discrets*, les ensembles dont l'étendue est nulle. Si un ensemble est contenu dans un espace à $n-p$ dimensions (p des coordonnées qui définissent ses points dans l'espace à n dimensions restant fixes), cet ensemble est discret (dans l'espace à n dimensions). Notons encore le rôle que tiennent dans cette théorie la considération du rapport (*total différence-quotient*)

$$\frac{|f(x_1+h_1, x_2+h_2, \ldots, x_n+h_n)-f(x_1, x_2, \ldots, x_n)|}{\sqrt{h_1^2+h_2^2+\ldots+h_n^2}},$$

où $x_1, x_2, \ldots, x_n$ et $x_1+h_1, x_2+h_2, \ldots, x_n+h_n$ sont deux points distincts de l'ensemble où la fonction f est définie et des fonctions f pour lesquelles ce rapport est borné : si $f_1, f_2, \ldots, f_n$ sont n fonctions de cette nature, et si l'on appelle image du point $x_1, x_2, \ldots, x_n$ le point dont les coordonnées sont

$$y_i=f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \qquad (i=1, 2, \ldots, n),$$

l'ensemble des points images est discret quand l'ensemble des points $x_1, x_2, \ldots, x_n$ est lui-même discret. Un ensemble est mesurable

quand sa frontière constitue un ensemble discret. M. Pierpont introduit encore la notion de la décomposition d'un ensemble (A) en un nombre fini d'ensembles partiels (A_1), (A_2), ..., (A_r) qui peuvent bien avoir des points communs, mais tels que l'ensemble de ces points communs et des points frontières communs soit discret : les ensembles partiels sont dits alors *sans mélange* (*immixed*). Tel est le cas pour les ensembles partiels contenus dans les parallélépipèdes d'une décomposition de l'espace par des systèmes de plans orthogonaux. L'étendue extérieure (ou intérieure) de l'ensemble A est alors égale à la somme des étendues extérieures (ou intérieures) des ensembles partiels (A_1), (A_2), ..., (A_r). Le lecteur se rend compte de la façon dont cette notion permet d'arriver à la notion générale de l'intégrale multiple, la décomposition de l'espace en parallélépipèdes rectangles étant remplacée par des décompositions de (A) en ensembles partiels sans mélange, tels que la distance de deux points d'un ensemble partiel soit moindre qu'un nombre positif d, que l'on peut supposer aussi petit qu'on le veut. L'auteur traite, en terminant, de la décomposition d'une intégrale multiple en intégrales simples et du changement de variables dans une intégrale multiple.

Les quelques indications qui précèdent suffiront, je l'espère, pour montrer que l'étudiant, arrivé au bout du livre de M. Pierpont, aura acquis des idées précises et claires sur les points essentiels de l'analyse ; il sera très bien armé s'il a, en outre, acquis cette habitude du calcul et cette connaissance des faits particuliers importants sans lesquelles il n'y a pas de mathématiciens.

J. T.

STAUDE (O.). — Analytische Geometrie des Punktes, der geraden Linie und der Ebene. Ein Handbüch zu den Vorlesungen und Uebungen ueber analytische Geometrie (*Teubner's Sammlung von Lehrbüchern auf den Gebiete der mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen*, Band XVI). 1 volume in-8°; VIII-447 pages, 387 figures. Leipzig, Teubner, 1905.

M. O. Staude doit écrire un livre sur les surfaces du second ordre, dans cette belle collection de Manuels et de Traités que la maison Teubner a entrepris de publier en même temps que l'*Encyclopédie des Sciences mathématiques*, et qui rendra les plus grands services à la Science et à l'Enseignement. Le présent manuel peut être regardé comme une introduction à ce livre; mais il est complet en lui-même et, tel quel, il sera fort utile aux étudiants qui veulent se rendre maîtres des méthodes de la Géométrie analytique. Il se recommande par son caractère systématique et son extrême clarté : le souci qu'a l'auteur de ne laisser subsister aucune obscurité se montre dès les premières pages, dans la façon par exemple dont est étudié le rapport des sinus des angles qu'une droite mobile autour d'un point d'intersection de deux droites fixes fait avec ces deux droites; il se maintient d'un bout à l'autre du livre : les définitions sont toujours précises et la généralité des démonstrations ne laisse rien à désirer. On est parfois tenté de reprocher à l'auteur d'être par trop clair : c'est un reproche que ne lui feront assurément pas les étudiants qui le liront.

La matière du livre est suffisamment indiquée par le titre : il s'agit, pour la Géométrie plane, de la droite comme lieu de points et des faisceaux de droites; pour la Géométrie dans l'espace, du plan, des systèmes de plans qui passent par une droite ou par un point, des coordonnées dans ces diverses formes fondamentales, des relations projectives entre les divers éléments.

L'ordre adopté est naturel : l'auteur part des coordonnées cartésiennes pour s'élever aux coordonnées triangulaires ou tétraédriques. C'est l'ordre historique entendu d'une façon large et qui apparaît bien ici comme le meilleur pour l'enseignement.

J. T.

MÉLANGES.

CINÉMATIQUE. PROBLÈME RELATIF AU CENTRE INSTANTANÉ DE ROTATION ET AU CENTRE DES ACCÉLÉRATIONS;

PAR M. A. DE SAINT-GERMAIN.

On peut régler le mouvement d'un plan P, glissant sur un plan fixe P_1, de manière que le centre des accélérations A coïncide constamment avec un point donné dans le plan P ou dans le plan P_1, tandis que le centre instantané de rotation reste sur une droite donnée de l'un ou de l'autre plan; on a quatre espèces de mouvements dont je vais indiquer les lois.

Quand le centre des accélérations A est toujours un même point du plan P, il décrit dans le plan P_1, avec une vitesse constante c, une droite Δ_1 à laquelle la droite AI est toujours normale. Si, en même temps, le centre instantané I doit rester sur une droite D_1 du plan fixe, son lieu dans le plan mobile sera une spirale logarithmique de pôle A, ou une circonférence de centre A, qui roulera sur D_1, entraînant le plan mobile; la vitesse ω de la rotation instantanée sera égale à $\frac{c}{\mathrm{AI}}$, AI variant proportionnellement au temps; le mouvement du plan P se trouve ainsi bien défini. Si, au contraire, le centre I se déplace sur une droite D du plan mobile, son lieu dans le plan fixe sera une chaînette ayant pour base Δ_1 et sur laquelle roule la droite D, entraînant le plan P. Soient a le paramètre de la chaînette, $a\lambda = c$ la vitesse du point A sur Δ_1 : la vitesse ω peut se mettre sous la forme

$$(1) \qquad \omega = \frac{2\lambda}{e^{\lambda t} + e^{-\lambda t}};$$

elle est indépendante de a.

Lorsque le centre A doit rester en un point donné A_1 du plan fixe, le problème est un peu moins simple : on le résout en exprimant qu'à un instant quelconque t, le point A_1 se trouve sur la circonférence des inflexions et que la droite IA_1 fait avec la direction dans laquelle se déplace le point I un angle dont la tangente est $-\frac{\omega^2}{\omega'}$. Prenons d'abord le cas où le centre I doit rester sur une droite D_1 du plan fixe : son lieu dans le plan P sera une chaînette qui roulera sur D_1, entraînant le plan mobile; la vitesse angulaire ω pourra, au signe près, être exprimée par la formule (1). Dans le plan P, la projection E du point I sur la base B de la chaînette se déplace avec une vitesse $a\lambda$; le point A, symétrique de E par rapport à la tangente D_1 à la chaînette en I, décrit, avec la vitesse relative $a\lambda$, une courbe transcendante asymptote à B.

Considérons enfin le cas où, le centre des accélérations restant fixe en A_1, le centre I se déplace sur une droite D du plan mobile : son lieu dans le plan fixe sera une hyperbole équilatère H_1 de centre A_1, sur laquelle roule D.

Prenons pour instant initial celui où le centre instantané se trouve en un sommet S_1 de H_1, A_1S_1 étant égal à a, ω à $-\lambda$; si, au temps t, le rayon vecteur A_1I fait, avec la droite D qui touche H_1 en I, un angle égal à μ, on aura

$$\omega = \frac{1}{2}\frac{d\mu}{dt} = -\lambda\sqrt{\sin\mu} = -\lambda \operatorname{cn}\lambda t\sqrt{2},$$

le module des fonctions elliptiques étant $\frac{1}{\sqrt{2}}$. L'angle S_1A_1I, égal à $\frac{\pi}{4}-\frac{\mu}{2}$, a pour sinus $\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{sn}\lambda t\sqrt{2}$; il croît de zéro à $\frac{\pi}{2}$ en un temps fini, au bout duquel la droite D est asymptote à H_1 : on peut admettre qu'ensuite elle roulera sur la seconde branche de l'hyperbole. Si, dans le plan P, on prend pour axes la droite D et sa perpendiculaire au point O qui a coïncidé avec S_1, les coordonnées du point A seront

$$x = -\frac{a}{2}\int_{\mu}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\sin\mu}\,d\mu, \qquad y = a\sqrt{\sin\mu};$$

ce point décrit, avec une vitesse relative $a\lambda$, un ovale autour du point O.

NOTE SUR LES SURFACES MINIMA APPLICABLES SUR UNE SURFACE DE RÉVOLUTION;

Par M. Haag.

Je me propose dans cette Note d'appliquer la méthode du trièdre mobile à la détermination et à l'étude des surfaces minima applicables sur les surfaces de révolution, surfaces que j'appellerai dans la suite *surfaces* (B), pour simplifier le langage. J'indiquerai d'abord la détermination des rotations du trièdre attaché à chaque point de la surface et je me servirai de ces rotations pour faire une étude de la surface sur elle-même, ce qui me permettra déjà de trouver un grand nombre de propriétés. Ensuite, je montrerai comment on peut, au moyen de ces rotations, établir les équations générales d'une surface (B) et, partant de ces équations, je ferai une nouvelle étude de la surface en m'attachant surtout aux propriétés descriptives que l'on ne peut pas apercevoir par la méthode du trièdre mobile.

J'ai enfin l'intention de faire, dans une Note ultérieure, l'étude particulière des surfaces (B) algébriques, en envisageant spécialement les degrés, classes, etc. de ces surfaces et de leurs lignes remarquables.

Je me hâte d'ajouter ici que la détermination des surfaces (B) a déjà été faite, au moyen de méthodes différentes, par Bour et par Schwartz (¹). J'ai retrouvé en particulier, dans le travail de Bour, un certain nombre de propriétés contenues dans celles que j'ai établies d'une manière différente.

J'aborde maintenant mon sujet.

I.

Détermination des rotations relatives à une surface (B). — Rappelons d'abord quelques notations et quelques formules de la

(¹) Bour, *Théorie de la déformation des surfaces*, p. 99 à 109. — Schwartz,

théorie du trièdre mobile. On sait que, si l'on appelle u l'arc de méridienne d'une surface de révolution compté à partir d'une origine déterminée, $\varphi(u)$ le rayon du parallèle correspondant et v l'angle d'un méridien avec un méridien fixe, l'élément linéaire de la surface est

$$ds^2 = du^2 + \varphi^2(u)\, dv^2.$$

Les rotations et les translations relatives à toute surface applicable sur la surface de révolution considérée satisfont alors aux équations suivantes [1] :

$$\left\{\begin{array}{lll} \xi = 1, & \eta = 0, & \zeta = 0, \\ \xi_1 = 0, & \eta_1 = \varphi(u), & \zeta_1 = 0; \end{array}\right.$$

$$(\mathrm{I})\quad \left\{\begin{array}{lll} r = 0, & r = \varphi'(u), & p\varphi(u) + q_1 = 0, \\ \dfrac{\partial p}{\partial v} - \dfrac{\partial p_1}{\partial u} = q\varphi'(u), & \dfrac{\partial q}{\partial v} - \dfrac{\partial q_1}{\partial u} = -p\varphi'(u), & -\varphi''(u) = pq_1 - qp_1. \end{array}\right.$$

Ceci étant, l'équation des lignes asymptotiques d'une telle surface est

$$-q\, du^2 + 2p\varphi(u)\, du\, dv + p_1\varphi(u)\, dv^2 = 0.$$

Écrivons que les lignes de longueur nulle sont conjuguées; nous obtenons immédiatement la condition

$$p_1 = q\varphi(u).$$

En combinant cette équation avec les équations (I), on a

$$p_1 = q\varphi(u), \qquad q_1 = -p\varphi(u).$$

D'où

$$p^2 + q^2 = \frac{\varphi''(u)}{\varphi(u)} = \mathrm{U}^2.$$

Puis

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial p}{\partial v} - \varphi'(u)\dfrac{\partial q}{\partial u} = 2q\varphi'(u), \\ \dfrac{\partial q}{\partial v} + \dfrac{\partial p}{\partial u}\varphi(u) = -2p\varphi'(u). \end{array}\right.$$

Posons alors $p = \mathrm{U}\cos\psi$, $q = \mathrm{U}\sin\psi$ et portons dans les deux

Mathematische Abhandlungen, t. I, p. 184 et 185. — Darboux, *Théorie des surfaces*, t. I, p. 435.

(1) *Voir* Darboux, *Théorie des surfaces*, t. II, p. 385.

équations précédentes. Un calcul très simple donne

$$\frac{\partial\psi}{\partial u} = 0 \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial\psi}{\partial v} = -\frac{\varphi\varphi''' + 3\varphi'\varphi''}{2\varphi''}.$$

Ces deux équations ne sont évidemment compatibles que si

(1) $$\frac{-\varphi\varphi''' + 3\varphi'\varphi''}{2\varphi''} = \alpha,$$

α étant une constante.

Telle est la *condition nécessaire et suffisante pour que la surface de révolution considérée soit applicable sur une surface minima.*

Cette équation différentielle s'intègre aisément. La méthode la plus naturelle conduit par deux quadratures successives à ramener l'équation à une équation de Lagrange, qui s'intègre comme on sait en passant aux coordonnées tangentielles. On trouve alors des expressions assez compliquées. Voici une autre méthode plus élégante et qui donne des résultats plus simples, à laquelle j'ai été conduit d'une manière rationnelle dans l'étude de la surface. Posons

$$(\alpha + \varphi')^2 + \varphi^2 U^2 = \beta^2.$$

En différentiant le premier membre et tenant compte de (1), on trouve un résultat nul. Donc β est une constante. Posons alors

(2) $$\alpha + \varphi' = \beta\cos\lambda$$

et

(3) $$\varphi U = \beta\sin\lambda.$$

De ces deux équations on tire

(4) $$\varphi = -\beta\sin\lambda\frac{du}{d\lambda}$$

et

(5) $$\beta\sin\lambda\frac{d}{du}\left(\frac{du}{d\lambda}\right) + 2\beta\cos\lambda - \alpha = 0.$$

En posant $\frac{du}{d\lambda} = w$, l'équation (5) s'écrit

$$\frac{dw}{w} = \frac{\alpha - 2\beta\cos\lambda}{\beta\sin\lambda}\,d\lambda.$$

D'où

$$w = \frac{\gamma\left(\operatorname{tang}\frac{\lambda}{2}\right)^{\frac{\alpha}{\beta}}}{\sin^2\lambda},$$

$\gamma =$ constante arbitraire.

Ensuite

$$u = u_0 + \gamma\int\frac{\left(\operatorname{tang}\frac{\lambda}{2}\right)^{\frac{\alpha}{\beta}}}{\sin^2\lambda}\,d\lambda.$$

Enfin

$$(6)\qquad \left\{\begin{aligned} \varphi &= -\beta\gamma\frac{\left(\operatorname{tang}\frac{\lambda}{2}\right)^{\frac{\alpha}{\beta}}}{\sin^2\lambda},\\ U &= -\frac{\sin^2\lambda}{\gamma\left(\operatorname{tang}\frac{\lambda}{2}\right)^{\frac{\alpha}{\beta}}}.\end{aligned}\right.$$

L'équation (1) est donc complètement intégrée. La connaissance de la fonction φ nous permettrait maintenant d'étudier les méridiennes des surfaces de révolution applicables sur une surface minima. J'ai fait cette étude pour les différentes valeurs que l'on peut donner au nombre $\frac{\alpha}{\beta} = m$ et j'ai construit une courbe méridienne particulière pour chaque valeur de m extérieure à l'intervalle $(-1, +1)$ et deux courbes pour chaque valeur de m intérieure à cet intervalle. Les résultats ne sont pas très intéressants; je me bornerai simplement à dire que, pour certaines valeurs de m, on peut avoir des courbes algébriques et même unicursales.

Revenons maintenant à nos surfaces (B). Nous déduisons immédiatement des équations trouvées plus haut

$$(7)\qquad \left\{\begin{aligned} p &= U\cos(\alpha v + h), & q &= U\sin(\alpha v + h), & r &= 0,\\ p_1 &= \varphi U\sin(\alpha v + h), & q_1 &= -\varphi U\cos(\alpha v + h), & r_1 &= \varphi'(u),\end{aligned}\right.$$

où h désigne une constante arbitraire.

Il est bien clair d'ailleurs que, si l'on fait varier h, tous les systèmes de rotations obtenus correspondent à une même surface, considérée indépendamment de sa position dans l'espace, en supposant toutefois $\alpha \neq 0$. Comme φ et par suite α sont déterminés quand la surface de révolution l'est, on voit que *sur une telle surface on ne pourra appliquer qu'une seule surface minima.* Il résulte de là que *celle-ci est superposable à toutes ses associées,* propriété que nous préciserons davantage dans la suite.

Le cas écarté de $\alpha = 0$ correspond, comme on le voit aisément en formant la fonction $\varphi(u)$, à la famille des hélicoïdes minima, qui comprend comme surfaces particulières l'alysséide et la surface de vis à filet carré.

II.

Étude d'une surface (B) *au moyen du trièdre mobile.* — Nous pouvons évidemment dans cette étude supposer $h = 0$. Les rotations précédentes deviennent alors

$$(1)\quad \begin{cases} p = U\cos\alpha v, & q = U\sin\alpha v, & r = 0, \\ p_1 = U\varphi\sin\alpha v, & q_1 = -U\varphi\cos\alpha v, & r_1 = \varphi'(u). \end{cases}$$

J'indiquerai d'abord les deux formules suivantes qui donnent la courbure normale $\frac{1}{\rho_1}$ et la torsion géodésique $\frac{1}{\tau g}$ d'une courbe quelconque tracée sur la surface et faisant l'angle ω avec la courbe $v = \text{const}$.

$$(2)\quad \frac{1}{\rho_1} = U\sin(2\omega - \alpha v), \qquad \frac{1}{\tau g} = -U\cos(2\omega - \alpha v).$$

Ces formules s'établissent très aisément [1] et nous seront utiles dans la suite.

Ceci étant, étudions les lignes remarquables de la surface.

Lignes asymptotiques. — On trouve immédiatement que leur

---

[1] Partir des formules de la page 283 du Tome II de la *Théorie des surfaces* de M. Darboux.

équation peut s'écrire

$$\varphi \frac{dv}{du} = \frac{-\cos \alpha v \pm 1}{\sin \alpha v}.$$

D'où les deux familles

Première famille... $\varphi \dfrac{dv}{du} = \operatorname{tang} \dfrac{\alpha v}{2}$, $\sin \dfrac{\alpha v}{2} = a e^{\frac{\alpha}{2}\int \frac{du}{\varphi}} = a \left(\operatorname{tang} \dfrac{\lambda}{2}\right)^{-\frac{m}{2}}$,

Deuxième famille... $\varphi \dfrac{dv}{du} = -\cot \dfrac{\alpha v}{2}$, $\cos \dfrac{\alpha v}{2} = a e^{\frac{\alpha}{2}\int \frac{du}{\varphi}} = a \left(\operatorname{tang} \dfrac{\lambda}{2}\right)^{-\frac{m}{2}}$,

où α désigne une constante arbitraire.

Si l'on applique à ces courbes la formule $\operatorname{tang} \omega = \varphi \dfrac{dv}{du}$, on trouve immédiatement

$$\omega_1 = \frac{\alpha v}{2}, \qquad \omega_2 = \frac{\alpha v}{2} + \frac{\pi}{2}.$$

D'où :

Théorème. — *Les lignes asymptotiques d'une surface* (B) *sont toutes coupées sous le même angle par chacune des courbes* $v =$ const. [1].

Plus généralement, les trajectoires sous un angle constant des lignes asymptotiques sont les courbes pour lesquelles le rapport $\dfrac{\tau_g}{\rho_1}$ est constant, comme cela résulte des formules (1). Ce sont encore les courbes qui font un angle constant avec leur image sphérique [2].

J'ai calculé la courbure et la torsion des lignes asymptotiques. La torsion en particulier se confond avec la torsion géodésique; on trouve alors immédiatement

$$\frac{1}{\tau_1} = -U \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{\tau_2} = U.$$

---

[1] Ce théorème a déjà été trouvé par Bour (*Théorie de la déformation des surfaces*, p. 101).

[2] On a en effet, pour une courbe quelconque tracée sur une surface quelconque, la formule $\dfrac{\tau_g}{\rho_1} = \operatorname{tang}(\omega - \theta)$, θ désignant l'angle de l'image sphérique avec $v =$ const.

On en déduit, d'après la formule d'Enneper, que la courbure totale de la surface est $-U^2$ et par suite les rayons de courbure principaux $\pm \frac{1}{U}$, ce qu'on peut vérifier d'ailleurs sur l'équation aux rayons de courbure principaux et aussi sur la formule qui donne $\frac{1}{\rho_1}$. Le rapport $\frac{\rho}{\tau}$ pour une ligne asymptotique est à un facteur constant près

$$\frac{\rho}{\tau} = \frac{t^{1+\frac{m}{2}}}{m(1+t^2)+2(t^2-1)} \qquad \text{où} \qquad t = \operatorname{tang}\frac{\lambda}{2}.$$

Il n'est constant que pour $m = \pm 2$. Or, nous allons voir qu'à ces deux valeurs de m correspond une même surface, qui est la surface d'Enneper.

Donc :

Théorème. — *Les lignes asymptotiques d'une surface* (B) *sont des hélices dans le cas de la surface d'Enneper, et dans ce cas seulement.*

Lignes de courbure. — Comme pour les lignes asymptotiques, on trouve

$$\text{Première famille......} \quad \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha v}{2}\right) = a\left(\operatorname{tang}\frac{\lambda}{2}\right)^{-\frac{m}{2}},$$

$$\text{Deuxième famille.....} \quad \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha v}{2}\right) = a\left(\operatorname{tang}\frac{\lambda}{2}\right)^{-\frac{m}{2}},$$

$$\omega_1 = \frac{\alpha v}{2} + \frac{\pi}{4}, \qquad \omega_2 = \frac{\alpha v}{2} - \frac{\pi}{4},$$

formules qui étaient à prévoir d'après la théorie générale des surfaces minima, et qui montrent que les trajectoires sous un angle constant sont les mêmes pour les lignes de courbure que pour les lignes asymptotiques.

J'ai calculé la courbure et la torsion de ces lignes, ainsi que l'angle ϖ de leur plan osculateur avec la normale à la surface.

Pour la torsion en particulier, j'ai trouvé

$$\pm\frac{1}{\tau} = \frac{\left(\frac{m^2}{4} - 1\right)\cos\alpha v}{2\gamma\left[\left(\operatorname{tang}\frac{\lambda}{2}\right)^2 + \left(\frac{\cos\lambda - \frac{m}{2}}{\sin\lambda}\right)^2 a^2\right]}.$$

Cette formule montre que *pour* $m = \pm 2$ *les lignes de courbure sont planes*, et seulement dans ce cas. Ceci suffit, comme on sait, pour prouver que *la surface qui correspond à* $m = \pm 2$ *est la surface d'Enneper*.

Courbes $v =$ const. — La courbure d'une telle ligne est

$$\frac{1}{\rho} = - \mathrm{U} \sin \alpha v.$$

Cette formule montre que *les courbes* $\alpha v = \mathrm{K}\pi$ *sont des droites*.

De même, la torsion est $\frac{1}{\tau} = - \mathrm{U} \cos \alpha v$. Cette formule montre que les courbes $\alpha v = 2\mathrm{K}\pi \pm \frac{\pi}{2}$ *sont des géodésiques planes*.

Remarquons enfin que l'on a $\frac{\tau}{\rho} = \operatorname{tang} \alpha v$. Donc *chaque courbe* $v =$ const. *est une hélice* dont l'angle des tangentes avec la direction des génératrices du cylindre dont elle est géodésique est αv. D'ailleurs, cette hélice étant géodésique aussi pour la surface, le cylindre précédent est circonscrit à la surface le long de cette courbe (¹).

Courbes $u =$ const. — Le seul résultat intéressant s'obtient en calculant la courbure géodésique de leur image sphérique. On trouve une fonction de u. Ces images sphériques sont donc des petits cercles et par suite *le plan tangent tout le long d'une courbe* $u =$ const. *fait un angle constant avec une direction fixe* (¹).

Géodésiques. — Leur équation est, d'après le théorème de Clairaut,

$$(3) \qquad \varphi \sin \omega = \mathrm{A} \qquad (\mathrm{A} = \text{const. arbitraire})$$

ou

$$\varphi \sqrt{\varphi^2 - \mathrm{A}^2} \frac{dv}{du} = \mathrm{A}.$$

(¹) Propriété trouvée aussi par Bour (*Théorie de la déformation des surfaces*, p. 108 et 109).

D'où

$$v = v_0 + \int \frac{\Lambda\, du}{\varphi\sqrt{\varphi^2 - \Lambda^2}}.$$

Elles s'obtiennent donc par une quadrature.

En se servant des formules (1) et de l'équation (2), on reconnaît aisément que les seules droites et les seules géodésiques planes de la surface sont celles déjà rencontrées. Plus généralement, les hélices géodésiques de la surface sont données par

$$\frac{\varphi_g}{\varphi_1} = \text{const.};$$

d'où

$$2\omega - \alpha v = \psi \qquad (\psi = \text{const.})$$

et, par suite,

$$\varphi \sin\left(\frac{\psi + \alpha v}{2}\right) = \Lambda,$$

ce qui ne peut avoir lieu que pour $\Lambda = 0$ et $\alpha v = -\psi = \text{const.}$ Donc, *les seules hélices géodésiques de la surface sont les courbes* $v = \text{const.}$

Lignes conjuguées des courbes $v = \text{const.}$ — Leur équation est

$$\sin\alpha v = a e^{\alpha\int\frac{du}{\varphi}} = a\left(\tang\frac{\lambda}{2}\right)^m \qquad (a = \text{const. arbitraire}).$$

On trouve immédiatement $\omega = \alpha v$. *Ces courbes sont donc*, comme les lignes asymptotiques et les lignes de courbure, *coupées sous un angle constant par chaque courbe* $v = \text{const.}$ [1].

Une autre propriété intéressante de ces courbes est qu'*elles sont planes*, comme on le voit en calculant leur torsion. On peut aussi démontrer cette propriété directement au moyen du trièdre mobile, par une méthode que nous ne développerons pas; de même pour celle relative aux plans tangents le long des courbes $u = \text{const.}$ On constate alors que la direction avec laquelle ces plans tangents font un angle constant est perpendiculaire aux plans tous paral-

---

[1] Propriété donnée aussi par Bour (*Théorie de la déformation des surfaces*, p. 109).

lèles des courbes conjuguées des courbes v. Ceci prouve que cette direction est la même pour toutes les courbes u. On en déduit ([1]) que les courbes conjuguées des courbes u sont les trajectoires orthogonales des sections planes conjuguées des courbes v, ce qui peut se voir aussi de bien d'autres manières.

Terminons cette étude par la remarque suivante : Sachant que les courbes conjuguées des courbes v sont planes et dans des plans parallèles, on peut en déduire que les courbes v sont des hélices. En effet, ce sont les courbes de contact des cylindres circonscrits parallèlement aux différentes directions des plans parallèles considérés, d'après le théorème de M. Kœnigs. Ce sont, d'autre part, des géodésiques et l'on achève aisément le raisonnement.

On voit que l'on a pu, par la seule connaissance des rotations relatives à la surface, faire une étude assez complète de celle-ci et découvrir un certain nombre de ses propriétés.

Nous allons maintenant chercher les équations générales d'une surface (B).

III.

Équations d'une surface (B). — Nous commencerons par rappeler que, si l'on connaît les rotations et les translations d'un trièdre mobile $Oxyz$ dont la position dépend de deux paramètres u et v, et si a, a', a'', b, b', b'', c, c', c'' désignent les cosinus directeurs des axes Ox, Oy, Oz relativement à un trièdre fixe quelconque $O_1x_1y_1z_1$, les fonctions de u et de v : $a, b, c, a', b', c', a'', b'', c''$ doivent constituer trois systèmes de solutions du système suivant :

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial a}{\partial u} &= br - cq, & \frac{\partial a}{\partial v} &= br_1 - cq_1;\\ \frac{\partial b}{\partial u} &= cp - ar, & \frac{\partial b}{\partial v} &= cp_1 - ar_1;\\ \frac{\partial c}{\partial u} &= aq - bp, & \frac{\partial c}{\partial v} &= aq_1 - bp_1. \end{aligned}\right.$$

([1]) D'après un théorème dû à Petersen.

Les coordonnées x, y, z de l'origine O de ce trièdre sont données par les équations

$$\text{(II)}\quad \begin{cases} dx = a\,(\xi\,du + \xi_1\,dv) + b\,(\eta\,du + \eta_1\,dv) + c\,(\zeta\,du + \zeta_1\,dv), \\ dy = a'(\xi\,du + \xi_1\,dv) + b'(\eta\,du + \eta_1\,dv) + c'(\zeta\,du + \zeta_1\,dv), \\ dz = a''(\xi\,du + \xi_1\,dv) + b''(\eta\,du + \eta_1\,dv) + c''(\zeta\,du + \zeta_1\,dv). \end{cases}$$

Ceci étant, pour avoir les équations d'une surface (B), nous pourrions essayer d'intégrer le système (I), en y remplaçant les rotations par les valeurs trouvées plus haut. Mais cette intégration semble très difficile *a priori*. Pour l'éviter, nous allons procéder autrement, et, au lieu de chercher les équations de la surface relativement à un système d'axes $O_1x_1y_1z_1$ quelconque, nous allons les chercher relativement à un système d'axes particulier.

Supposons qu'on ait trouvé un système particulier $a(u,v)\ldots$ satisfaisant au système (I), où l'on ferait, bien entendu,

$$\begin{aligned} p(u,v) &= \mathrm{U}\cos\alpha v, & q &= \mathrm{U}\sin\alpha v, & r &= 0, \\ p_1(u,v) &= \varphi\mathrm{U}\sin\alpha v, & q_1 &- \varphi\mathrm{U}\cos\alpha v, & r_1 &= \varphi'(u). \end{aligned}$$

Il est bien évident que le système $a\left(u, v - \frac{h}{\alpha}\right)\cdots$ satisfera, quel que soit h, au système (I) où l'on remplacerait les p, q, ... par

$$\mathrm{P}(u,v) = p\left(u, v - \frac{h}{\alpha}\right), \qquad \mathrm{Q}(u,v) = q\left(u, v - \frac{h}{\alpha}\right)\cdots,$$

système que nous appellerons (I').

D'autre part, on a

$$\mathrm{P} = p\cos h + q\sin h, \qquad \mathrm{Q} = -p\sin h + q\cos h, \qquad \mathrm{R} = r$$

et

$$\mathrm{R}_1 = p_1\cos h + q_1\sin h, \qquad \mathrm{Q}_1 = -p_1\sin h + q_1\cos h, \qquad \mathrm{R}_1 = r_1.$$

Si nous appelons T le trièdre d'origine O_1 et de cosinus directeurs $a(u,v)$, $a'(u,v)\ldots$ et T_1 le trièdre déduit de T par une rotation autour de Oz de l'angle h (indépendant de u et de v), il est bien clair que ces deux trièdres ont même rotation instantanée et, par suite, les projections de cette rotation sur les axes de T_1 sont

$$(p\cos h + q\sin h)\,du + (p_1\cos h + q_1\sin h)\,dv.\ \ldots$$

c'est-à-dire

$$\mathrm{P}\,du + \mathrm{P}_1\,dv \ldots.$$

D'autre part, les cosinus directeurs $a_1(u, v)$, $a'_1(u, v)\ldots$ des axes du trièdre T_1 sont évidemment donnés par les formules

$$(1) \qquad \begin{cases} a_1 = a\cos h - b\sin h, \\ b_1 = -a\sin h + b\cos h, \\ c_1 = c \end{cases}$$

et les formules analogues en a', b', c', a'', b'', c''.

D'après ce qui précède, les cosinus $a_1(u, v)\ldots$ satisfont au système (I').

Appelons maintenant T' le trièdre d'origine O_1 et de cosinus directeurs $a\left(u, v - \frac{h}{\alpha}\right)\cdots$. Les deux trièdres T_1 et T' ayant les mêmes rotations composantes $\mathrm{P}\,du + \mathrm{P}_1\,dv$, ..., ils doivent avoir le même mouvement par rapport à leur position initiale respective; autrement dit, si l'on appelle $\mathrm{O}\lambda$ l'axe autour duquel il faut faire tourner la position initiale de T' pour l'amener à coïncider avec la position initiale de T_1 et ω l'angle de cette rotation, cette même rotation doit amener T' en coïncidence avec T_1, quels que soient u et v. Nous irons même plus loin, en montrant que $\mathrm{O}_1\lambda$ est forcément indépendant de h. En effet, soit M le point de coordonnées $a''(u, v)$, $b''(u, v)$, $c''(u, v)$. Quand u et v varient séparément, ce point décrit sur la sphère S de rayon 1 un certain réseau de courbes. Or le point M est le point de rencontre de S avec l'axe des z du trièdre T et, par suite, aussi du trièdre T_1. D'autre part, on passe du trièdre T' au trièdre T_1 par une rotation autour de $\mathrm{O}_1\lambda$; donc, dans cette rotation, le point M doit coïncider avec le point M' de coordonnées $a''\left(u, v - \frac{h}{\alpha}\right)$, $b''\left(u, v - \frac{h}{\alpha}\right)$, $c''\left(u, v - \frac{h}{\alpha}\right)$, et ceci quels que soient u et v. Ceci exige évidemment que les courbes $u = \text{const.}$ soient des parallèles de S, d'axe commun $\mathrm{O}_1\lambda$. Comme ce résultat est indépendant de h, $\mathrm{O}_1\lambda$ reste fixe quand h varie. [Remarquons en passant que cette démonstration nous prouve que les courbes u et v de la surface (B) que nous allons déterminer ont pour images sphériques les parallèles précédents et leurs méridiens trajectoires orthogonales, puisque la

représentation sphérique d'une surface minima est conforme. On pourrait en déduire immédiatement un grand nombre des propriétés que nous avons données dans notre première étude de la surface].

Revenons maintenant à la détermination de notre surface. Prenons la droite $O_1\lambda$ comme axe O_1z_1. Si ω désigne une fonction convenable de h, nous devrons avoir, quels que soient u, v et h, les relations suivantes :

$$(2)\quad \begin{cases} a_1(u,v) = a\left(u, v - \dfrac{h}{\alpha}\right)\cos\omega - a'\left(u, v - \dfrac{h}{\alpha}\right)\sin\omega, \\ a'_1(u,v) = a\left(u, v - \dfrac{h}{\alpha}\right)\sin\omega + a'\left(u, v - \dfrac{h}{\alpha}\right)\cos\omega, \\ a''_1(u,v) = a''\left(u, v - \dfrac{h}{\alpha}\right), \end{cases}$$

et deux autres groupes analogues.

En remplaçant dans ces relations a_1, a'_1, ... par leurs valeurs tirées de (1), on obtient des relations entre $a\left(u, v - \dfrac{h}{\alpha}\right)\cdots$ et $a(u, v)\ldots$, qui, différenciées convenablement par rapport à h et combinées avec les équations (I), donnent par un calcul assez simple, que nous ne ferons pas ici pour ne pas allonger cette Note :

$$(4)\quad \begin{cases} a'' = \dfrac{\varphi U}{\beta}\sin\alpha v, \qquad b'' = -\dfrac{\varphi U}{\beta}\cos\alpha v, \qquad c'' = \dfrac{\alpha + \varphi'}{\beta}, \\ a = -\dfrac{(\varphi' + \alpha')\sin\beta' v + (\varphi' + \beta')\sin\alpha' v}{2\beta}, \\ b = \dfrac{(\varphi' + \alpha')\cos\beta' v + (\varphi' + \beta')\cos\alpha' v}{2\beta}, \\ c = \dfrac{\varphi U}{\beta}\cos\beta v, \\ a' = -\dfrac{(\varphi' + \alpha')\cos\beta' v - (\varphi' + \beta')\cos\alpha' v}{2\beta}, \\ b' = \dfrac{-(\varphi' + \alpha')\sin\beta' v + (\varphi' + \beta')\sin\alpha' v}{2\beta}, \\ c' = \dfrac{\varphi U}{\beta}\sin\beta v, \end{cases}$$

où l'on a posé

$$\alpha' = \alpha + \beta, \qquad \beta' = \alpha - \beta,$$

β désignant la constante que nous avons introduite dans la recherche de φ. On trouve en même temps

$$\omega - \frac{\beta}{\alpha} h = \frac{h}{m}.$$

En portant ensuite dans le système (II) les valeurs trouvées pour $a(u, v) \ldots$, on trouve immédiatement

$$(5) \quad \begin{cases} x = \dfrac{\varphi}{2\beta}\left(\dfrac{\varphi' + \alpha'}{\beta'} \sin \beta' v + \dfrac{\varphi' + \beta'}{\alpha'} \sin \alpha' v\right), \\ y = \dfrac{\varphi}{2\beta}\left(\dfrac{\varphi' + \alpha'}{\beta'} \cos \beta' v - \dfrac{\varphi' + \beta'}{\alpha'} \cos \alpha' v\right), \\ z = -\dfrac{\varphi^2 U}{\alpha\beta} \sin \alpha v. \end{cases}$$

Telles sont les équations de la surface qui correspond au système de cosinus $a(u, v) \ldots$. Quant à la surface qui correspond au système $a_1(u, v) \ldots$, ses équations sont

$$(6) \quad \begin{cases} x_1(u, v) = x\left(u, v - \dfrac{h}{\alpha}\right) \cos \dfrac{h}{m} - y\left(u, v - \dfrac{h}{\alpha}\right) \sin \dfrac{h}{m}, \\ y_1(u, v) = x\left(u, v - \dfrac{h}{\alpha}\right) \sin \dfrac{h}{m} + y\left(u, v - \dfrac{h}{\alpha}\right) \cos \dfrac{h}{m}, \\ z_1(u, v) = z\left(u, v - \dfrac{h}{\alpha}\right). \end{cases}$$

En particulier pour $h = \frac{\pi}{2}$, on trouve

$$(7) \quad \begin{cases} x_0 = -\dfrac{\varphi}{2\beta}\left(\dfrac{\varphi' + \alpha'}{\beta'} \cos \beta' v + \dfrac{\varphi' + \beta'}{\alpha'} \cos \alpha' v\right), \\ y_0 = \dfrac{\varphi}{2\beta}\left(\dfrac{\varphi' + \alpha'}{\beta'} \sin \beta' v - \dfrac{\varphi' + \beta'}{\alpha'} \sin \alpha' v\right), \\ z_0 = \dfrac{\varphi^2 U}{\alpha\beta} \cos \alpha v. \end{cases}$$

D'où l'on déduit facilement

$$(8) \quad \begin{cases} x_1 = x \cos h + x_0 \sin h, \\ y_1 = y \cos h + y_0 \sin h, \\ z_1 = z \cos h + z_0 \sin h. \end{cases}$$

Si l'on remarque que les trièdres T_1 et T ont même plan des xy, on voit que la correspondance $(u \mid u, v \mid v)$ entre les surfaces (5)

et (6) est une correspondance par plans tangents parallèles. Comme les deux surfaces sont applicables l'une sur l'autre par cette correspondance, on peut en conclure, d'après un théorème connu [1], que ces surfaces sont minima et associées. Les éléments correspondants font d'ailleurs entre eux l'angle constant h, car les deux trièdres attachés à ces deux surfaces ont mêmes translations; donc l'angle de deux éléments correspondants est égal à l'angle des axes des x de ces deux trièdres. On retrouve ainsi un résultat, qui est vrai d'ailleurs, comme on sait, pour deux surfaces minima associées quelconques. En particulier la surface (7), obtenue pour $h = \frac{\pi}{2}$, est la surface adjointe de (5) et par suite les formules (8) sont les formules bien connues relatives aux surfaces minima associées. En se reportant aux formules (6), on a le théorème suivant, qui complète celui que nous avons énoncé dans la première partie de cette Note :

Théorème. — *Pour avoir la surface minima associée à une surface* (B), *l'angle constant des éléments correspondants étant* h, *il suffit de faire tourner la surface de l'angle* $\frac{h}{m}$ *autour d'une droite fixe* $O_1 z_1$ *attachée à la surface, et d'établir une correspondance par plans tangents parallèles entre les deux positions de la surface.*

Ce théorème a déjà été énoncé par M. Darboux, d'une façon toutefois un peu moins complète, dans sa *Théorie des surfaces* (t. I, p. 338). Si l'on remarque que la correspondance entre les surfaces (5) et (6) qui fait correspondre les éléments égaux est la correspondance $\left(u \mid u,\ v \mid v + \frac{h}{2}\right)$ et si l'on se reporte à l'étude faite dans la deuxième partie de cette Note, on peut de suite déduire du théorème précédent certaines propriétés. C'est ainsi qu'on voit que, sur deux surfaces (B) adjointes, les lignes asymptotiques correspondent aux lignes de courbure (résultat vrai, comme on sait, pour des surfaces minima quelconques) et que *les droites correspondent aux géodésiques planes.* De même une courbe $u =$ const. se correspondant à elle-même sur les différentes sur-

[1] *Voir* Darboux, *Théorie des surfaces,* t. I, p. 326.

faces associées, on en déduit que le plan tangent le long d'une telle courbe fait un angle constant avec $O_1 z_1$.

Les équations (5) peuvent encore s'écrire, en tenant compte des valeurs de φ et U, nous rappelant que $\frac{\alpha}{\beta} = m$, posant $\tang \frac{\lambda}{2} = t$, $\beta v = \mu$ et prenant enfin $\gamma = 1$, ce qui revient à fixer l'unité de longueur :

$$(9)\quad \begin{cases} x = \dfrac{t^{m-1}}{2}\left[\dfrac{t^2}{m+1}\sin(m+1)\mu - \dfrac{\sin(m-1)\mu}{m-1}\right], \\ y = -\dfrac{t^{m-1}}{2}\left[\dfrac{t^2}{m+1}\cos(m+1)\mu + \dfrac{\cos(m-1)\mu}{m-1}\right], \\ z = \dfrac{t^m}{m}\sin m\mu. \end{cases}$$

J'ai calculé (¹) en fonction des mêmes quantités tous les cosinus a, a', ... En particulier, j'ai trouvé

$$c = \sin\lambda\cos\mu, \qquad c' = \sin\lambda\sin\mu, \qquad c'' = \cos\lambda.$$

Ces formules donnent une interprétation très simple des angles λ et μ. Ce sont *la colatitude et la longitude de la représentation sphérique* du point (λ, μ).

Les formules (9) montrent qu'à une homothétie près, les surfaces (B) constituent une famille de surfaces dépendant d'un seul paramètre m. Pour avoir toutes les surfaces (B), il suffit d'ailleurs de faire varier m de 0 à $+\infty$ (en exceptant les valeurs 0 et 1), comme on le voit en changeant m en $-m$ et t en $\frac{1}{t}$.

Les formules (9) nous montrent encore que, *si m est commensurable, la surface est algébrique* et, *si m est incommensurable, la surface est transcendante.*

IV.

Étude de la surface sur ses équations. — Nous allons enfin faire une étude sommaire de la surface (9) au moyen de ses équations. Nous supposerons toujours $m > 0$.

(¹) Les équations (9) peuvent, à une symétrie près par rapport à xOy, se dé-

On peut d'abord étudier sur les équations (9) les symétries de la surface et vérifier que les droites et les plans de géodésiques planes sont des éléments de symétrie, conformément à la théorie générale des surfaces minima. Nous laisserons cette étude de côté.

On peut maintenant former les équations des lignes asymptotiques en fonction du paramètre μ. On voit alors que *la condition nécessaire et suffisante pour que les lignes asymptotiques d'une surface* (B) *soient algébriques est que la surface le soit*. En formant le ds^2 de ces lignes, on trouve encore qu'*elles ne sont rectifiables que pour* $m=2$, c'est-à-dire *dans le cas de la surface d'Enneper*.

On peut faire les mêmes remarques sur les lignes de courbure.

Courbes $u=$ const. — Étudions maintenant les courbes $u=$ const. qui vont nous donner des résultats intéressants. D'abord, pour ces courbes on a $\lambda=$ const.; donc les images sphériques sont les petits cercles perpendiculaires à Oz et le plan tangent le long de la courbe λ fait avec Oz un angle constant et égal à $\frac{\pi}{2}-\lambda$.

L'équation de ce plan tangent est d'ailleurs

$$X\cos\mu+Y\sin\mu+Z\cot\lambda=x\cos\mu+y\sin\mu+z\cot\lambda=r\sin m\mu,$$

en posant

$$r=-\frac{t^{m-1}}{2m}\left(\frac{t^2}{m+1}+\frac{1}{m-1}\right).$$

La trace de ce plan sur xOy a pour équation dans ce plan

$$X\cos\mu+Y\sin\mu=r\sin m\mu.$$

On reconnaît là, lorsque μ varie, l'équation de la tangente à une hypocycloïde. Il est aisé de vérifier que, si R et $\frac{R}{n}$ désignent les rayons du cercle base et du cercle roulette relatifs à cette hypocy-

---

duire des formules de Weierstrass, en prenant $\mathcal{F}(u)=e^{i\frac{\pi}{2}}u^{m-2}$, conformément aux résultats de M. Schwartz.

cloïde, on a

$$R = mr \quad \text{et} \quad n = \frac{2m}{m-1}.$$

Donc :

Théorème. — *Les traces sur xOy des plans tangents le long d'une courbe $u =$ const. enveloppent une hypocycloïde.*

Cette hypocycloïde est d'ailleurs algébrique ou transcendante en même temps que la surface, d'après la formule qui donne n en fonction de m. Les hypocycloïdes correspondant aux différentes courbes $u =$ const. sont homothétiques par rapport à l'origine ; le lieu de leurs rebroussements se compose des droites de la surface et le lieu de leurs sommets des traces sur xOy des plans de géodésiques.

Si l'on combine ce résultat avec le précédent, on peut énoncer le théorème suivant :

Théorème. — *Les développables circonscrites à la surface le long d'une courbe $u =$ const. sont des hélicoïdes développables admettant pour arêtes de rebroussement des développées d'hypocycloïdes.*

J'ai trouvé une définition géométrique assez simple, mais peu intéressante des projections sur xOy des courbes $u =$ const. Les courbes particulières $t^2 = \pm \frac{m+1}{m-1}$ se projettent suivant des podaires d'hypocycloïdes semblables à celles que nous venons de rencontrer. La courbe $t^2 = 1$ se projette suivant une de ces hypocycloïdes, car pour cette courbe on a $\lambda = \frac{\pi}{2}$ et par suite la développable circonscrite est un cylindre de génératrices parallèles à Oz. On a donc le théorème suivant :

Théorème. — *Le contour apparent de la surface sur le plan des xy est une hypocycloïde.*

Élevons au carré les deux premiers membres de (9) et ajoutons, il vient

$$x^2 + y^2 = \frac{t^{2(m-1)}}{4}\left[\frac{t^4}{(m+1)^2} + \frac{1}{(m-1)^2} + \frac{2t^2}{m^2-1}\cos 2m\mu\right].$$

D'où

$$x^2 + y^2 + \frac{m^2}{m^2-1} z^2 = \frac{t^{2(m-1)}}{4} \left(\frac{t^2}{m+1} + \frac{1}{m-1} \right)^2 = m^2 r^2 = \mathrm{R}^2.$$

Donc :

THÉORÈME. — *Les courbes* $u =$ const. *sont sur une famille de quadriques de révolution homothétiques et d'axe* Oz.

Chacune de ces quadriques admet d'ailleurs pour cercle de gorge le cercle base relatif à l'hypocycloïde correspondante.

Pour $t^2 = -\dfrac{m+1}{m-1}$, la quadrique se réduit à un cône de sommet à l'origine. Ce cône est circonscrit à la surface le long de la courbe u correspondante, car, dans ce cas, on a $\mathrm{R} = 0$ et par suite l'hypocycloïde enveloppe des traces des plans tangents sur $x\mathrm{O}y$ se réduit à un point. D'ailleurs, on peut vérifier sur l'équation du plan tangent que celui-ci ne passe à l'origine que pour $r = 0$ et $m\mu = k\pi$, ce qui donne la courbe u précédente et les droites de la surface. On a donc encore le théorème suivant :

THÉORÈME. — *Le cône circonscrit à la surface et de sommet à l'origine est un cône de révolution.*

La courbe de contact se projette sur $x\mathrm{O}y$ suivant une podaire d'hypocycloïde, d'après ce qui a été dit plus haut.

Ce cône n'est d'ailleurs réel que pour $m < 1$.

Courbes $v =$ const. — Les images sphériques de ces courbes sont les grands cercles rencontrant Oz; donc les courbes v sont les courbes de contact des cylindres circonscrits parallèlement aux différentes directions du plan des xy. On en déduit que ce sont des hélices tracées sur ces cylindres. La courbe μ coupe les génératrices du cylindre correspondant sous l'angle $m\mu$.

J'ai formé les équations de la section droite d'un quelconque de ces cylindres, dans le plan de cette section, et j'ai reconnu que les différentes courbes obtenues en faisant varier μ étaient homothétiques par rapport à l'origine. D'où le théorème suivant :

THÉORÈME. — *Les cylindres circonscrits parallèlement aux différentes directions de $x\mathrm{O}y$ sont des cylindres qui se dédui-*

sent tous de l'un d'eux par une rotation autour de Oz *suivi d'une homothétie par rapport à* O.

On en conclut aisément que *la surface podaire relative à* O *est une surface analogue à une surface spirale d'axe* Oz.

Ce n'est pas une surface spirale, car le rapport d'homothétie est $\sin m\mu$, et μ est l'angle du plan de la section avec $z\mathrm{O}x$. Cependant, si l'on remarque que $\sin m\mu = \frac{e^{im\mu} - e^{-im\mu}}{2i}$, on peut dire que la surface considérée est la surface moyenne relativement à l'origine de deux surfaces spirales imaginaires conjuguées. La surface est d'ailleurs complètement définie par sa section par un plan passant par Oz et par sa section par $x\mathrm{O}y$, laquelle est la podaire de l'hypocycloïde de contour apparent de la surface (B). J'ai reconnu que les sections droites des cylindres précédents sont unicursales et rectifiables toutes les fois que m est commensurable, c'est-à-dire toutes les fois que la surface est algébrique. Pour $m = 2$, ce sont des cubiques. J'ai formé beaucoup d'autres équations relatives à la surface; mais aucune ne m'a paru devoir donner des résultats intéressants. Je termine donc là cette étude générale des surfaces (B), me réservant d'étudier à part dans une prochaine Note les surfaces (B) algébriques.

RECTIFICATION A UNE NOTE SUR LES SÉRIES DE FONCTIONS HOLOMORPHES;

Par M. D. POMPEIU.

Dans ma Note *Sur les séries de fonctions holomorphes* (*Bulletin des Sciences mathématiques,* t. XXX$_1$, p. 57), il s'est glissé une citation erronée relative à un théorème de M. Arzela concernant les séries de fonctions réelles et continues dont la convergence est quasi-uniforme. Il est dit, en effet, dans ma Note, qu'une telle série est intégrable terme à terme : cela n'est pas exact et ne se trouve pas dans le théorème de M. Arzela (*Mé-*

moires de l'Académie des Sciences de l'Institut de Bologne, 27 mai 1900). M. Arzela a démontré seulement *qu'une série de fonctions intégrables, dont la convergence est*, EN GÉNÉRAL, *quasi-uniforme, représente une fonction intégrable.*

Dans ces conditions, l'énoncé du théorème qui fait l'objet de ma Note doit être complété et formulé dans les termes suivants :

Pour qu'une série convergente de fonctions d'une variable complexe, holomorphes dans un domaine D, *ait pour somme une fonction holomorphe dans* D, *il faut et il suffit que :*

1° *La convergence soit quasi-uniforme;*
2° *La série soit intégrable terme à terme.*

Un cas particulier où l'on est assuré qu'une série de fonctions holomorphes est intégrable terme à terme est celui où le reste $R_n(z)$ satisfait à la condition

$$|R_n(z)| < M$$

quel que soit n et quel que soit le point z, dans D; M étant un nombre positif fixe.

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE.

AMBRONN (L.). — *Die Messungen des Sonnendurchmessers an dem Repsold'schen 6-zöll. Heliometer der Sternwarte zu Göttingen.* In-8° 126 p. avec 2 pl. Berlin, Weidmann. 12 m.

BALL (W.-W.). — *Mathematical recreations and essays.* 4e édit. In-8°, 418 p. London, Macmillan. 7 sh.

BOCHOW (KARL). — *Die Funktionen rationaler Winkel. Insbesondere üb. die numer. Berechng. der Winkelfunktionen ohne Benützung der trigonometr. Reihen u. die Zahl* π. In-8°, 40 p. Leipzig, G. Fock. 1 m.

BOLTE (F.). — *Tafeln zur Reduktion von Beobachtungen über den künstlichen Horizont.* In-4°, IV-78 p. Hamburg, Verlagsanstalt u. Druckerei. Relié, 3 m.

BURNSIDE (W.-S.) and PANTON (A.-W.). — *Theory of equations.* Vol. II. New edit. In-8°. London, Longmans. 10 sh. 6 d.

CUNNINGHAM (E.). — *On the normal series satisfying linear differential equations.* In-8°, 36 p. London, Dulau. 1 sh. 6 d.

HAGEN (J.-G.). — *Synopsis der höheren Mathematik.* III. Bd. *Differential- u. Integralrechnung.* 6. Lfg. In-4°. Berlin, Dames. 5 m.

HEYDEMAN (W.-J.). — *Beginselen der beschrijvende meetkunde.* In-folio. Amsterdam, Ahrend et Zoon. 5 fl. 60 c.

JAHNKE (E.). — *Vorlesungen über die Vektorenrechnung. Mit Anwendgn. auf Geometrie, Mechanik u. mathemat. Physik.* In-8°, XII-235 p. avec 32 fig. Leipzig, Teubner. Relié, 5 m. 60 pf.

LIEBMANN (H.). — *Notwendigkeit u. Freiheit in der Mathematik. Akadem. Antrittsvorlesung.* In-8°, 21 p. Leipzig, Teubner. 80 pf.

MAC MAHON (P.-A.). — *Memoir of the theory of partitions of numbers.* Part 3. In-4°, 14 p. London, Dulau. 1 sh.

TANNERY (J.). — *Introduction à la théorie des fonctions d'une variable.* 2ᵉ édit. T. I. In-8°, IX-423 p. Paris, Hermann (1904). 14 fr.

BENOIT (P.). — *Essai d'une Géométrie universelle.* Petit in-8°, 159 p. avec fig. Saint-Dié, impr. Weick.

BIERMANN (OTTO). — *Vorlesungen über mathematische Näherungsmethoden.* Gr. in-8°, X-227 p. av. 35 fig. Braunschweig, Vieweg und Sohn. 8 m.

FRICKE (ROB.). — *Hauptsätze der Differential- u. Integral-Rechnung als Leitfaden zum Gebrauche bei Vorlesungen.* 4ᵉ édit. gr. in-8°, XV-217 p. av. 74 fig. Braunschweig, Vieweg und Sohn. 5 m.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

FINE (H.-B.). — A COLLEGE ALGEBRA. 1 volume petit in-8°, VI-592 pages. Ginn et Cᵒ. Boston, New-York, Chicago, London, 1905.

Il s'agit, comme le titre l'indique, d'un *Text-Book* pour les élèves. Ce Livre se recommande par des qualités précieuses : rigueur, clarté, brièveté. En moins de six cents pages, l'auteur résume des théories d'Arithmétique, d'Algèbre et d'Analyse qui dépassent parfois nos programmes de la classe de Mathématiques spéciales : la notion de dérivée, toutefois, n'est introduite que pour les polynomes. J'ignore sur combien de temps s'étend l'enseignement correspondant; il ne peut d'ailleurs, évidemment, s'adresser qu'à des jeunes gens déjà mûrs et il est clair que la première Partie, où la notion du nombre est prise à partir du nombre entier positif, puis étendue successivement et sans sous-entendre aucun intermédiaire logique, aux nombres entiers négatifs, aux nombres fractionnaires, aux nombres irrationnels, aux nombres complexes enfin, doit s'adresser à des lecteurs qui ont déjà, au moins sur quelques-uns de ces sujets, des habitudes pratiques et certaines connaissances théoriques, qu'on se propose de réunir, de condenser et d'éclairer dans toutes leurs liaisons. Qu'une pareille revision, dont l'intérêt s'accroît par l'acquisition de vérités nouvelles, soit très utile, c'est ce qu'on ne saurait contester : outre la clarté et la sécurité qu'elle apporte à l'étudiant, elle est bien propre à développer, chez lui, l'esprit philosophique : cette dernière préoccupation est manifeste chez l'auteur qui n'écarte même pas les spéculations relatives au nombre entier, regardé comme la propriété commune à toutes les collections entre les éléments desquelles on peut établir une correspondance univoque. Pour ce qui est de l'introduction des nombres irrationnels, le point de vue dominant est celui de M. Dedekind.

L'auteur s'est efforcé de rapprocher dans son exposition les

sujets qui sont liés logiquement : ainsi, dans les Chapitres qui se rapportent au calcul algébrique, le plus grand commun diviseur et la décomposition en fractions simples sont placés après la théorie de la division. Il est à noter que, dans cette Partie de son Livre, M. Fine a pris pour définition de l'identité de deux expressions algébriques la possibilité de passer de l'une à l'autre en appliquant certaines règles de calcul, bien définies. L'équation du second degré n'apparaît que vers la moitié du livre, après la formule du binome. On est un peu étonné de rencontrer un peu plus loin, un Chapitre sur les proportions. La Partie purement algébrique du livre se termine par des notions sur les déterminants, poussées assez loin pour pouvoir expliquer la méthode d'élimination de Sylvester. Sept Chapitres, à la fin, se rapportant à l'Analyse : séries, produits infinis, ..., propriétés fondamentales des fonctions continues. Dans le dernier Chapitre, on trouvera établies, par exemple, les propositions relatives à l'existence d'un maximum et d'un minimum et leur application à la démonstration du théorème fondamental de l'Algèbre, dont les conséquences essentielles ont d'ailleurs été déduites antérieurement.

On a souvent l'occasion de constater l'habitude que l'auteur a de l'enseignement et des élèves. Il a pris le plus grand soin pour séparer nettement les choses et mettre les théorèmes en évidence. Il se rapproche autant que possible du mode d'exposition que l'on qualifie habituellement d'*euclidien*. Ce mode d'exposition, recommandé par d'excellents esprits, a ses avantages et ses inconvénients qu'il ne faut point se dissimuler : c'est un truisme que de dire qu'on ne possède une théorie que si on la possède dans son ensemble, son unité et dans ses parties. Si le maître a surtout fait ressortir l'unité et l'enchaînement de la théorie, s'il s'est efforcé surtout de faire sortir les théorèmes les uns des autres, le plus naturellement possible, l'élève aura besoin de briser cette exposition, d'en détacher les faits essentiels pour les fixer dans sa mémoire et pouvoir les utiliser quand il en aura besoin. Si le maître a fragmenté son exposition en théorèmes bien séparés, s'il s'est efforcé de faire valoir, par elle-même, chacune de ces propositions, l'élève aura besoin de les réunir pour en dominer l'ensemble, et ce travail l'aidera assurément à fixer dans sa mémoire des connaissances qui, en restant fragmentaires, risquent de s'éparpiller. Je

ne suis pas certain que, dans ce dernier cas, le travail de l'écolier soit moindre que dans le premier et mieux adapté à son intelligence. Pour le faciliter, je ne vois rien de mieux que de rapprocher, comme M. Fine s'y est efforcé, les sujets qui ont une connexion naturelle.

Un des avantages évidents du mode d'exposition qu'il a adopté est de rendre les recherches plus aisées : elles sont encore facilitées par une excellente disposition matérielle, un index étendu : le lecteur ne peut avoir aucune peine à retrouver ce qu'il cherche.

Enfin les exemples et les exercices sont nombreux et choisis avec soin : ils ne constituent pas la moindre part dans un livre d'enseignement. J. T.

GOURSAT (E.). — A COURSE IN MATHEMATICAL ANALYSIS, translated by *E.-R. Hedrick*. Tome I. DERIVATIVES AND DIFFERENTIALS. DEFINITE INTEGRALS. EXPANSION IN SERIES. APPLICATIONS TO GEOMETRY. In-8°, VIII-548 pages. Ginn et C°, Boston, New-York, Chicago, London.

Nous sommes heureux d'annoncer la traduction anglaise, par M. Hedrick, du *Cours d'Analyse* de M. Goursat. Le *Bulletin* a rendu compte de cet excellent livre, qu'on peut dès à présent qualifier de classique : en France, les nombreux auditeurs de M. Goursat savaient d'avance que son livre serait au moins égal à son enseignement, et cette opinion n'était pas un éloge médiocre. On peut être assuré que le succès ne sera pas moindre dans les pays de langue anglaise.

La traduction a été entreprise sur les conseils de M. F. Osgood, que ses belles recherches sur la théorie des fonctions n'ont jamais empêché de donner aux choses de l'enseignement une attention très active et qui avait publié dans le *Bulletin of the American mathematical Society* (1903) un compte rendu critique de l'Ouvrage de M. Goursat, fort intéressant.

Avant d'être professeur à l'Université de Missouri, M. Hedrick, le traducteur, a fait un long séjour en Europe, à Gœttingue et à

Paris notamment. Il est, sans parler de son talent mathématique, dans les meilleures conditions pour traduire un livre publié dans un pays dont il connaît bien l'enseignement, par un auteur avec lequel il se trouve en relations personnelles, et qui a dû s'intéresser doublement à la qualité de la traduction. M. Goursat ne pouvait d'ailleurs avoir grands changements à faire au livre qu'il vient d'achever : ils se réduisent, le plus souvent, à quelques modifications dans les notations. M. Hedrick a ajouté quelques notes discrètes, qu'il a d'ailleurs voulu soumettre à M. Goursat.

Ajoutons que l'exécution matérielle est très soignée : au reste, l'éditeur avait un modèle devant les yeux. J. T.

VALLÉE-POUSSIN (Ch. de la). — Cours d'Analyse infinitésimale. Tome II. In-8°, XVI-440 pages. Louvain, A. Uystpruyst-Dieudonné; Paris, Gauthier-Villars, 1905.

Nous avons eu l'occasion de dire, à propos du premier Volume du *Cours d'Analyse* de M. de la Vallée-Poussin, les qualités de cet Ouvrage, où l'auteur, tout en s'adressant à un public de futurs ingénieurs, et en n'oubliant pas les besoins limités et spéciaux de ce public, garde un extrême souci de l'exactitude et de la rigueur. Il va de soi que ces qualités, sur lesquelles nous ne reviendrons pas, se retrouvent dans le second Volume.

L'auteur traite d'abord des intégrales multiples. Son point de départ, pour les intégrales doubles, est dans la règle d'intégration sous le signe $\int$, pour une intégrale simple où la fonction à intégrer dépend d'un paramètre, qui conduit de suite à la notion d'intégrale double pour un rectangle dont les côtés sont parallèles aux axes; on passe de là au cas où le contour est quelconque, par la décomposition du plan en un réseau de mailles rectangulaires. Les intégrales triples sont introduites d'une façon analogue. Au reste, après avoir établi les règles de calcul et les formules essentielles (Green, Stokes, etc.) qui résultent de ces définitions, l'auteur

donne la notion d'intégrale multiple dans toute sa généralité pour une fonction bornée, continue ou discontinue. A cette notion se rattachent quelques points essentiels de la théorie des ensembles, dans un espace à n dimensions. L'auteur étend ensuite la notion d'intégrale aux cas où la fonction, sous les signes $\int$, devient infinie et où le champ d'intégration est illimité : c'est un sujet qui a fait pour lui l'objet d'études spéciales, et l'on conçoit qu'il se soit attaché à donner des règles précises concernant la validité, le calcul, la transformation de ces intégrales généralisées. C'est d'ailleurs l'utilité pratique que M. de la Vallée-Poussin a eue en vue, plutôt que la généralité de ces règles : lorsque, quelques pages plus loin, il en sera à l'étude des intégrales eulériennes, le lecteur ne pourra manquer d'apprécier la commodité des résultats établis dans ce Chapitre. Les propositions relatives aux conditions pour qu'une intégrale curviligne ne dépende pas de ses limites ne sont pas traitées avec moins de soin.

On remarquera la démonstration très simple du théorème d'existence pour les équations différentielles ordinaires du premier ordre, ingénieusement fondée sur la considération des fonctions qui satisfont à une telle équation avec une erreur moindre qu'une quantité donnée. Sans m'arrêter aux types classiques, ni même au Chapitre sur les équations différentielles linéaires, je dois signaler les quelques pages consacrées à l'équation de Bessel et à l'équation (spéciale) de Riccati. Il y a là un excellent exemple d'intégration par les séries : par un procédé très simple, l'auteur parvient à l'intégrale sous forme explicite, dans le cas où elle peut s'obtenir sous forme finie.

Après un Chapitre relatif aux équations aux dérivées partielles du premier ordre et aux différentielles totales, l'auteur réunit dans un même Chapitre diverses *questions spéciales*. Il traite, en particulier avec soin et détail, de ces intégrales eulériennes qui ont été, pour Hermite, un continuel objet de prédilection. A la vérité, on ne forme pas un bon mathématicien uniquement avec des idées et des propositions générales : il faut aussi lui donner le goût des études précises, s'attaquant à un objet bien déterminé, et des propriétés particulières qui caractérisent cet objet. Les intégrales eulériennes constituent un excellent exemple. Dans ce même Cha-

pitre, M. de la Vallée-Poussin traite des séries trigonométriques : il en pousse l'étude jusqu'à montrer, d'après M. G. Cantor, l'unité du développement.

Pour ce qui est du *calcul des variations*, l'auteur se limite strictement à l'établissement des conditions nécessaires de maximum et de minimum. A aller plus loin, on sort assurément du domaine des éléments.

Les applications géométriques qui n'avaient pas trouvé place dans le premier Volume (points singuliers, contact, enveloppes, systèmes de droites, lignes tracées sur une surface) occupent les deux derniers Chapitres de ce *Cours d'Analyse infinitésimale*, qui ne peut manquer d'obtenir le succès qu'il mérite. Espérons que l'auteur ne tardera pas à le compléter en publiant un Volume sur les fonctions analytiques. J. T.

DOLL (M.) und NESTLE (P.). — LEHRBUCH DER PRAKTISCHEN GEOMETRIE; zweite Auflage. 1 vol. in-8°, VII-164 pages. Leipzig, Teubner, 1905.

Cet Ouvrage est un manuel destiné surtout aux techniciens et au personnel auxiliaire employé dans les opérations de planimétrie et les constructions sur le terrain. On y a eu en vue surtout les exigences des élèves des écoles moyennes techniques allemandes; mais il pourra rendre des services dans d'autres pays. Il contient la description et l'usage des principaux instruments employés dans les opérations de Géométrie pratique et de Géodésie élémentaire, tels que le théodolite, les planimètres, les différentes espèces de niveaux, etc. Il sera consulté avec profit par nos professeurs des écoles d'arts et métiers. J. G.

MÉLANGES.

RAPPORT SUR LE PRIX BOLYAI,

Présenté par M. GUSTAVE RADOS a l'Académie hongroise des Sciences.

Très haute Académie,

A l'occasion du centième anniversaire de la naissance de Jean Bolyai, l'Académie, voulant contribuer en ce qui la concerne à perpétuer le souvenir de ce savant glorieux ainsi que celui du profond penseur que fut Farkas Bolyai, son père et son maître, avait décidé de fonder un prix international qui devait porter le nom de *Prix Bolyai de l'Académie hongroise des Sciences*. Le prix, qui consistait en une médaille commémorative dont l'avers devait représenter la vue de Budapest et dont le revers devait porter la devise de l'Académie, et en une somme de 10 000 couronnes, devait être décerné pour la première fois en 1905, puis de 5 en 5 ans, à l'auteur du meilleur Ouvrage de Mathématiques paru au cours des 5 années précédentes, sans qu'il y eût lieu de s'arrêter à la langue dans laquelle il aurait été écrit ou à la forme sous laquelle il aurait été publié, mais en prenant en considération l'Œuvre entière de l'auteur.

La troisième Section de l'Académie, la Section des Sciences, était chargée de constituer, dans la séance du mois de mars de l'année où le prix devait être décerné, une Commission composée de deux membres internes de l'Académie et de deux membres étrangers, qui aurait pour mission de désigner l'Ouvrage le plus digne du prix. Ce Comité devait se réunir à Budapest dans la première quinzaine d'octobre, et nommer dans son sein un président

et un rapporteur. En cas de partage, la voix du président devait être prépondérante.

D'après le règlement du Prix, l'Académie avait confié le soin de le décerner pour la première fois à une Commission composée de deux membres internes : M. Jules Kőnig, Secrétaire de la Classe des Sciences; M. Gustave Rados, membre de la même Classe, et deux membres étrangers, M. Gaston Darboux, Secrétaire perpétuel de l'Académie des Sciences de l'Institut de France, et M. Félix Klein, Membre de la Société royale des Sciences de Gőttingue. La Commission s'est réunie le 11 et le 12 octobre à Budapest, et elle a désigné comme président M. Gaston Darboux, comme rapporteur M. Félix Klein. Voici quelle est la conclusion du Procès-Verbal de ses travaux :

« Les points de vue nouveaux qui dominent dans la recherche mathématique moderne ont provoqué, au cours des cinq dernières années, dans tous les pays, un nombre considérable de travaux, dont la Commission se plaît à reconnaître la haute valeur, mais qui rendait sa tâche extrêmement difficile. Elle a la conviction de répondre le mieux aux intentions de l'Académie en s'attachant à distinguer les Œuvres qui ont exercé l'influence la plus considérable sur le développement *général* des Sciences mathématiques. C'est en se conformant à ce principe que la Commission a retenu, pour les prendre en considération particulière, les Œuvres mathématiques de deux chercheurs dont les noms sont universellement connus, M. *David Hilbert* et M. *Henri Poincaré*.

» En envisageant, conformément au Statut, l'Œuvre complète de ces deux géomètres, la Commission décerne le prix à

M. Henri Poincaré,

dont les recherches mathématiques, commencées déjà en 1879, ont parcouru le cercle entier des Mathématiques modernes en apportant partout des points de vue nouveaux et féconds. Mais, contrairement à l'usage généralement accepté, la Commission a tenu à donner à M. *David Hilbert* une marque spéciale de haute estime en chargeant le rapporteur de donner une analyse complète de ses travaux, dont les idées directrices, développées dans

une voie toute différente de celle de M. H. Poincaré, sont destinées aussi à jouer un rôle de plus en plus essentiel. »

Budapest, 13 octobre 1901.

G. DARBOUX, *Président;*
F. KLEIN, *Rapporteur;*
KÖNIG GYULA;
RADOS GUSZTÁV.

Conformément à cette décision, M. Félix Klein, en sa qualité de rapporteur, avait à faire connaître et à analyser les Œuvres de MM. Henri Poincaré et David Hilbert, en mettant plus particulièrement en évidence l'action qu'elles ont exercée sur le développement des nouvelles idées et des nouvelles méthodes mathématiques. Malheureusement, M. Félix Klein, par suite d'un état de santé qui demande des ménagements, a décidé de résigner ses fonctions de rapporteur; et ainsi la Commission, et je puis ajouter le public mathématicien tout entier, a dû renoncer avec le plus vif regret au rapport attendu. Entre ses mains il serait devenu la contribution la plus précieuse et la plus significative à l'histoire du développement des Mathématiques au cours de ces dernières années. Pour y suppléer en quelque manière, la Commission du Prix Bolyai m'a fait l'honneur immérité de me désigner à la place de M. Klein. Étant donné le temps bien court qui m'était laissé pour l'étude des riches matériaux que j'avais à mettre en œuvre, et aussi l'extrême difficulté de la tâche qui m'était confiée, je crains de m'en être acquitté d'une manière très imparfaite. Pour me conformer aux indications données, j'ai dû, dès le début, me borner à retenir, parmi le grand nombre de travaux à considérer, uniquement ceux qui avaient été reconnus, dans les discussions de la Commission, comme étant plus particulièrement fondamentaux.

Henri Poincaré est incontestablement le premier et le plus puissant chercheur du temps présent dans le domaine des Mathématiques et de la Physique mathématique. Son individualité fortement accusée nous permet de reconnaître en lui un savant doué d'intuition, qui sait puiser à la source intarissable des intuitions géométriques et mécaniques les éléments et le point de départ de ses profondes et pénétrantes recherches, en apportant d'ailleurs la

rigueur logique la plus admirable dans la mise en œuvre de chacune de ses conceptions. A côté des dons éclatants de l'invention, il faut reconnaître en lui une aptitude à la généralisation la plus fine et la plus féconde des relations mathématiques, qui lui a souvent permis de reculer, bien au delà du point où elles étaient arrêtées avant lui, les limites de nos connaissances dans les différentes branches des Mathématiques pures et appliquées.

C'est ce que montrent déjà ses premiers travaux sur les fonctions automorphes, par lesquels il a ouvert la série de ces brillantes publications qui doivent être rangées au nombre des plus belles découvertes de tous les temps.

En cherchant à obtenir, pour les solutions des équations différentielles, des développements uniformes et toujours convergents, il s'adressa en premier lieu à la classe la plus simple de toutes celles qui avaient été étudiées jusque-là, aux équations linéaires à coefficients rationnels ou algébriques. Il fut ainsi conduit à de nouvelles transcendantes qui peuvent être regardées comme une généralisation très étendue des fonctions elliptiques et de la fonction modulaire, et qui jouent dans la solution des équations différentielles linéaires le même rôle que les fonctions elliptiques ou abéliennes pour les intégrales des différentielles algébriques. Ces nouvelles fonctions transcendantes sont caractérisées par cette propriété qu'elles demeurent invariantes quand on soumet la variable dont elles dépendent à toutes les substitutions linéaires faisant partie d'un même groupe discontinu. Si dans ces substitutions $\left(z, \frac{az+b}{cz+d}\right)$ de déterminant $ad - bc = 1$, tous les coefficients sont des nombres réels, elles laissent fixe l'axe de la variable réelle. En composant les substitutions de ce genre avec une autre dont le déterminant est toujours égal à 1, mais dont les coefficients sont des nombres complexes quelconques, on obtient des substitutions résultantes qui laissent invariant un cercle désigné par M. Poincaré sous le nom de *cercle fondamental*. Les groupes ainsi caractérisés sont ceux que M. Poincaré nomme *groupes fuchsiens,* tandis qu'il réserve le nom de *groupes kleinéens* aux groupes discontinus les plus généraux formés de substitutions linéaires. En employant avec une extrême pénétration des notions métriques empruntées à la Géométrie non euclidienne, M. Poincaré parvient

d'une manière intuitive à la détermination et à la description de tous les groupes ainsi définis. Chacun d'eux donne naissance à une division régulière du plan ou de l'espace; et le problème de la recherche de tous les groupes fuchsiens et kleinéens se ramène à la détermination de toutes les divisions régulières du plan ou de l'espace. Après avoir introduit ce qu'il appelle des *cycles*, M. Poincaré a pu distribuer tous les domaines fondamentaux relatifs aux groupes fuchsiens en sept familles différentes, et aussi déterminer effectivement, pour chacune des divisions régulières obtenues, les groupes correspondants. Il s'agissait maintenant de donner la solution du problème important, qui consiste à déterminer toutes les fonctions demeurant invariables, quand on soumet la variable dont elles dépendent à toutes les substitutions d'un groupe fuchsien. C'est ce que M. Poincaré appelle les *fonctions fuchsiennes*. Pour les trouver, il se laisse encore guider par l'analogie avec les fonctions elliptiques. On sait que les fonctions thêta elliptiques ne sont pas doublement périodiques, mais qu'elles se reproduisent multipliées par un facteur exponentiel, quand l'argument s'augmente d'une période; M. Poincaré construit des séries dont la forme permet de reconnaître avec évidence l'effet des substitutions du groupe et qui se comportent d'une manière semblable aux fonctions thêta elliptiques. Elles sont de la forme

$$\Theta[z, \mathrm{H}(z)] = \sum \mathrm{H}\left(\frac{a_i z + b_i}{c_i z + d_i}\right)(c_i z + d_i)^{-2m}, \qquad m > 1,$$

où la somme est étendue à toutes les substitutions du groupe et où H est le signe qui désigne une fonction rationnelle, d'ailleurs quelconque. Les fonctions analytiques définies par ces séries sont celles que M. Poincaré appelle *thêta fuchsiennes*. Elles satisfont à l'équation fonctionnelle

$$\Theta\left(\frac{a_k z + b_k}{c_k z + d_k}\right) = \Theta(z)\frac{1}{(c_k z + d_k)^{2m}},$$

la substitution $\left(z, \dfrac{a_k z + b_k}{c_k z + d_k}\right)$ étant une quelconque de celles du groupe fuchsien considéré. Comme le montre M. Poincaré par une fine analyse, il y a deux espèces différentes de fonctions thêta fuchsiennes. Pour la première espèce, le cercle fondamental est

une *limite naturelle* et la fonction existe seulement à l'intérieur de ce cercle. Pour la seconde espèce, les fonctions ont seulement des points isolés sur le cercle fondamental, et elles peuvent être prolongées analytiquement au delà de ce cercle, dans toute l'étendue du plan.

En suivant la même marche que dans la théorie des fonctions elliptiques, et prenant le quotient de deux fonctions thêta fuchsiennes de même degré m, M. Poincaré obtient des fonctions qui demeurent inaltérées par toutes les substitutions du groupe fuchsien considéré. Ce sont les fonctions fuchsiennes, qui jouissent de propriétés analogues à celles des fonctions elliptiques. Le nombre des zéros et celui des infinis situés à l'intérieur d'un polygone fondamental sont toujours les mêmes pour chaque fonction. Deux fonctions fuchsiennes d'un même groupe sont toujours liées par une équation algébrique dont le genre coïncide avec le genre géométriquement défini du groupe. Le point d'attache ainsi obtenu avec la théorie des fonctions algébriques n'a pas été négligé par M. Poincaré, il lui a permis de donner la démonstration de ce théorème important que les coordonnées des points d'une courbe algébrique définie d'une manière quelconque peuvent toujours être exprimées par des fonctions uniformes d'un paramètre. Les fonctions fuchsiennes se sont aussi révélées comme un instrument puissant de recherche dans la théorie des intégrales abéliennes et les études de M. Poincaré sur la réduction de ces intégrales à d'autres d'un genre moindre doivent être rangées au nombre de celles qui pénètrent le plus profondément au cœur de cette difficile question.

Par l'introduction des fonctions appelées *zéta fuchsiennes*, qui sont définies comme quotients d'une série à termes rationnels et d'une série Θ, il a été enfin donné à M. Poincaré de démontrer que les solutions des équations différentielles linéaires dont les coefficients sont des fonctions algébriques de la variable indépendante peuvent être exprimées à l'aide de ces nouvelles transcendantes. Il a obtenu ce résultat capital en suivant une marche analogue à celle qui donne les intégrales de différentielles algébriques exprimées par des fonctions thêta abéliennes.

C'est ainsi que M. Poincaré a ouvert un champ étendu pour l'étude des fonctions automorphes et de leurs applications, et qu'en

mettant en évidence les rapports de cette théorie avec celle des équations différentielles linéaires, il a doté cette ancienne discipline de méthodes nouvelles et fécondes.

Parmi ses travaux ultérieurs sur la théorie des fonctions, il y a lieu de mettre à part le Mémoire *Sur un théorème de la théorie générale des fonctions*, qui a été publié en 1883 dans le *Bulletin de la Société mathématique de France*. L'auteur s'y proposait de ramener d'une manière générale la théorie des fonctions analytiques à déterminations multiples à celle des fonctions uniformes. Et, en fait, il est parvenu au théorème fondamental suivant, qui est d'une grande généralité.

Si y est une fonction analytique quelconque de x à déterminations multiples, on peut toujours déterminer une variable z de telle manière que x et y deviennent des fonctions uniformes de z.

Signalons également le travail important, paru dans le même Volume du *Bulletin de la Société mathématique*, qui se rapporte à la notion de genre introduite par Laguerre dans la théorie des fonctions transcendantes. Le résultat le plus remarquable établi par M. Poincaré consiste dans la condition

$$\lim_{n=\infty} A_n \sqrt[p+1]{n!} = 0$$

à laquelle doit satisfaire toute fonction $F(x) = \Sigma A_n x^n$ de genre p, et en outre dans le théorème d'après lequel le maximum du module de $F(x)$ reste inférieur à $e^{\alpha |x|^{p+1}}$, α étant un nombre réel et positif quelconque, théorème qui joue un rôle essentiel dans d'importantes recherches ultérieures.

Il était de la plus haute importance pour la théorie générale des fonctions analytiques de déterminer quelle est la puissance de l'ensemble des valeurs que peut prendre une fonction analytique à déterminations multiples en un point quelconque du domaine où elle existe.

M. Poincaré a pu établir que la détermination complète d'une fonction analytique peut toujours être obtenue à l'aide d'un ensemble dénombrable d'éléments de fonctions et, par suite, que

l'ensemble des valeurs de la fonction pour tout point de son domaine est toujours dénombrable.

Comme on sait aujourd'hui que les séries divergentes peuvent, sous certaines conditions, être très légitimement et très utilement employées dans la recherche mathématique, il convient de faire remarquer que M. Poincaré a employé dans la mesure la plus large les représentations auxquelles il a donné le nom d'*asymptotiques*, aussi bien dans ses recherches sur les solutions irrégulières des équations différentielles linéaires que dans son célèbre Mémoire *Sur le problème des trois corps et les équations de la dynamique*, et qu'il a ainsi provoqué de nombreuses recherches sur ce sujet.

Il a transformé la théorie des nombres complexes en signalant ses rapports avec la théorie des groupes de Lie, éclairant ainsi d'un jour tout nouveau cette théorie des unités complexes et lui permettant d'utiliser, pour la solution de ses principaux problèmes, les méthodes et les résultats de la théorie des groupes.

Signalons encore la théorie des systèmes linéaires composés d'un nombre infini d'équations à un nombre infini d'inconnues dont il doit être considéré comme le fondateur, car il est le premier qui se soit occupé des déterminants infinis et des critères de convergence qui s'y rapportent.

Je dois me borner à signaler rapidement les travaux de M. Poincaré qui se rapportent aux premiers fondements d'une théorie générale des fonctions analytiques de plusieurs variables indépendantes. Il faut mentionner en premier lieu le Mémoire *Sur les résidus des intégrales doubles*. Entre la théorie des fonctions d'une variable et celle des fonctions de plusieurs variables se montrent dès le début des différences profondes. L'extension des propositions de l'une des théories à l'autre n'avait pu se faire que dans un très petit nombre de cas. M. Poincaré a montré ce que deviennent les théorèmes fondamentaux de Cauchy, relatifs aux résidus, dans la théorie des intégrales multiples; et il a appliqué les propositions ainsi généralisées à l'étude des modules de périodicité des intégrales multiples et des fonction thêta abéliennes.

Dans cet ordre d'idées, il convient aussi de mettre à part les recherches sur l'*Analysis situs* des variétés à un nombre quelconque de dimensions. M. Poincaré est parvenu à ce résultat

important qu'une telle variété ne peut être définie, dans le sens de l'*Analysis situs*, par la seule connaissance de ses nombres de Betti ; en réalité, à chaque système de tels nombres correspondent une infinité de variétés qui ne sont pas déformables les unes dans les autres. Signalons en particulier l'extension du théorème d'Euler sur les polyèdres aux polyèdres d'un nombre quelconque de dimensions et de la connexion la plus étendue.

M. Poincaré a été le premier à donner la démonstration d'un théorème énoncé par Weierstrass :

Si une fonction de deux variables complexes est partout méromorphe, elle peut toujours être représentée par le quotient de deux fonctions entières des mêmes variables.

Rappelons encore une généralisation remarquable du théorème d'Abel qui peut être énoncée comme il suit :

Soient $(x_1, y_1, z_1)\ldots(x_q, y_q, z_q)$ les points d'intersection d'une surface algébrique avec une courbe algébrique (C) ; soient d'ailleurs $(x_i+dx_i, y_i+dy_i, z_i+dz_i)$ les coordonnées des points d'intersection d'une courbe (C′) voisine de (C) avec la même surface, on peut écrire un certain nombre de relations de la forme

$$X_1\,dx_1+X_2\,dx_2+\ldots+X_q\,dx_q=0,$$

où les X_i sont des fonctions rationnelles de x, y, z.

Signalons encore les recherches sur l'évanouissement des fonctions thêta abéliennes, la démonstration pour la représentation d'une fonction abélienne par le quotient de deux fonctions Θ et enfin la généralisation du théorème relatif à la somme des résidus des fonctions elliptiques et son extension aux fonctions abéliennes (1902).

La théorie des équations différentielles les plus générales a été aussi enrichie par les travaux de M. Poincaré. Je fais allusion ici à ses recherches topographiques sur les solutions de ces équations, elles peuvent être considérées en quelque sorte comme une analyse qualitative des intégrales précédant leur détermination.

Cette longue suite de recherches, par laquelle M. Poincaré a en quelque sorte préludé à ses études sur le problème des trois corps, est certainement appelée, par la foule des résultats impor-

tants qui y ont été obtenus, à jouer dans l'avenir un rôle tout à fait essentiel.

Parmi les travaux que M. Poincaré a consacrés à la théorie des nombres, je signalerai d'abord son Mémoire *Sur un mode nouveau de représentation géométrique des formes quadratiques définies ou indéfinies,* où il a développé une arithmétique des réseaux à l'aide de laquelle il a pu développer géométriquement, sous une forme neuve et originale, la théorie que Gauss avait donnée pour la composition des formes quadratiques. L'extension des méthodes données dans ce premier travail l'a conduit plus tard à une intéressante généralisation de l'algorithme des fractions continues. A signaler aussi sont encore ses travaux sur les invariants arithmétiques, qu'il exprime à l'aide de séries et d'intégrales et qu'il a su appliquer à la solution des problèmes d'équivalence. Par la considération de ces groupes linéaires discontinus de substitutions qui laissent invariable une forme quadratique ternaire indéfinie, il a apporté une contribution nouvelle à la théorie des fonctions automorphes. Chacun de ces groupes est isomorphe à un groupe fuchsien spécial. Les fonctions dénommées *arithmétiques fuchsiennes* relatives à ce groupe se distinguent en ce qu'elles possèdent un théorème d'addition, ce qui n'a pas lieu pour les fonctions fuchsiennes les plus générales. Les relations multiples qui existent entre les fonctions arithmétiques fuchsiennes ont ouvert à la théorie des nombres et à l'Algèbre des perspectives nouvelles sur un champ encore inexploré. C'est encore à l'Algèbre et à la théorie des nombres qu'il faut rattacher les publications de M. Poincaré sur l'équivalence des formes de degré supérieur, travaux qui doivent être regardés comme le prolongement le plus essentiel des recherches correspondantes d'Hermite et de M. Jordan.

Je passe maintenant aux travaux de M. Poincaré qui se rapportent à des problèmes de Mécanique et de Physique théorique. Comme le plus important dans cette suite, on doit mettre en avant au premier rang son grand Mémoire couronné *Sur le problème des trois corps et les équations de la Dynamique,* qui a paru en 1890 au Tome XIII des *Acta mathematica.* Étant données les grandes difficultés qui s'opposent à l'intégration des équations différentielles du problème des trois corps, les recherches de M. Poincaré n'ont pu donner que des résultats négatifs. Mais il

faut lui reconnaître le grand mérite de ne pas s'être borné à signaler l'insuffisance des méthodes mathématiques actuelles pour la solution de ce problème, mais de l'avoir encore établie. Il a pu donner avec une entière rigueur la preuve qu'en dehors des intégrales connues du problème, il n'existe aucune autre intégrale analytique uniforme, en sorte que la solution du problème exige des méthodes toutes différentes de celles dont nous pouvons disposer. Il soumet à une discussion approfondie ce cas particulier du problème dans lequel la masse de A est grande, celle de B petite et celle de C infiniment petite, A et B se mouvant sur des cercles. Il applique à cette étude les méthodes, si fécondes aussi pour la théorie pure, des invariants intégraux, des équations aux variations, des exposants caractéristiques, des solutions périodiques et asymptotiques; et il réussit à établir que, dans le cas où AC demeure finie, les masses A, B, C repassent un nombre infini de fois aussi près que l'on veut de leurs positions primitives. D'ailleurs cet admirable Mémoire est riche en principes féconds qui s'étendent à toute la Mécanique céleste et sont aujourd'hui utilisés par les astronomes praticiens.

Il ne faut pas attacher moins d'importance à la féconde étude *Sur l'équilibre d'une masse fluide animée d'un mouvement de rotation*. Pour ce problème classique des formes d'équilibre d'une masse fluide animée d'un mouvement de rotation, étudié sans cesse depuis Newton, M. Poincaré construit une théorie entièrement nouvelle et extrêmement originale. En introduisant la considération de ce qu'il appelle les *formes limites* et les *formes de bifurcation*, la notion des coefficients de stabilité ainsi qu'une théorie nouvelle des fonctions de Lamé, il parvient à obtenir non seulement la démonstration de l'existence des formes d'équilibre signalées par Mathiessen et W. Thomson, mais encore à établir l'existence d'une infinité d'autres formes. Signalons particulièrement la figure d'équilibre désignée sous le nom de *pyriforme* qui a donné naissance à des recherches cosmogénétiques connues. En ce qui concerne la stabilité des figures d'équilibre, la discussion du signe des coefficients de stabilité a conduit aux résultats suivants. Les ellipsoïdes de révolution moins aplatis que l'ellipsoïde E de Jacobi quand celui-ci devient une surface de révolution sont des figures stables d'équilibre. Les ellipsoïdes à trois axes

inégaux sont stables même quand ils sont allongés ; les résultats subsistent même quand on admet l'existence d'une viscosité. Au contraire, les ellipsoïdes de révolution dont l'aplatissement est plus grand que celui de E ne sont des figures stables d'équilibre que pour les fluides dépourvus de frottement.

C'est ici qu'il faut signaler le Mémoire *Sur les équations aux dérivées partielles de la Physique mathématique,* publié en 1886. Un grand nombre des problèmes de la Physique mathématique conduisent à l'équation aux dérivées partielles de Laplace, ou à une équation toute semblable du second ordre. Malgré la grande variété des conditions aux limites qui interviennent pour chacun d'eux, leur essence et leur théorie présentent un certain air de famille qui permet d'espérer la découverte d'un certain nombre de propositions communes à tous. Malheureusement leur trait commun réside dans les énormes difficultés que l'on rencontre lorsqu'on veut démontrer l'existence même des solutions. Dans son travail, M. Poincaré entreprend de surmonter ces difficultés pour toute une série de ces problèmes. C'est ainsi qu'il parvient à sa méthode si originale *du balayage*. De la même manière large, M. Poincaré a aussi traité le problème du refroidissement d'un corps posé par Fourier.

C'est à cet ordre de travaux qu'il faut rattacher aussi le Mémoire de 1894 *Sur les équations de la Physique mathématique*, dans lequel M. Poincaré aborde plusieurs des questions les plus difficiles et les plus importantes de la Physique mathématique. Le problème des vibrations d'une membrane tendue, la théorie de l'élasticité, la théorie du mouvement de la chaleur de Fourier et beaucoup d'autres problèmes de la Physique mathématique se ramènent à la solution de l'équation aux dérivées partielles du second ordre

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + \xi v + f = 0,$$

dans laquelle ξ désigne une constante et f une fonction donnée des coordonnées. M. Poincaré traite en particulier le problème aux limites suivant : Déterminer une solution de l'équation précédente, continue ainsi que ses dérivées des deux premiers ordres à l'intérieur d'un domaine donné et satisfaisant sur la surface qui

limite ce domaine à la condition

$$\frac{\partial v}{\partial n} + bv = 0;$$

où b désigne une constante et $\frac{\partial v}{\partial n}$ la dérivée de v suivant la normale. Par l'application originale de méthodes qui dérivent en partie de M. Schwarz et en partie de M. Neumann, il obtient la solution rigoureuse du problème dans le plus grand nombre des cas. Signalons la série de propositions qui se rapportent à des intégrales de la forme $\int\left[\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2\right] d\tau$ et qui deviennent entre ses mains un instrument puissant de recherche.

C'est également à ce groupe de travaux qu'il convient de rattacher le Mémoire intitulé : *La méthode de Neumann et le problème de Dirichlet*. On connaît la méthode par laquelle M. C. Neumann a pu obtenir une fonction harmonique à l'intérieur d'un certain domaine quand on connaît les valeurs de cette fonction sur la surface supposée convexe qui limite ce domaine. M. Poincaré a étendu cette méthode au cas où la surface limite a, en chaque point, un plan tangent déterminé et deux rayons principaux de courbure déterminés, sa forme n'étant assujettie à aucune autre condition. Nous noterons ici l'importance particulière que prennent dans ces recherches les fonctions nommées *fondamentales*, par M. Poincaré. A chaque surface limite correspond une suite infinie de telles fonctions, qui se transforment précisément dans les fonctions sphériques, quand la surface-limite devient une sphère. M. Poincaré montre qu'une fonction arbitraire peut se développer en une série de fonctions fondamentales, les coefficients du développement se déterminant par des intégrales multiples. Si ces fonctions sont connues pour une surface déterminée, on peut résoudre sans difficulté le problème de Dirichlet, tant pour l'espace intérieur à cette surface que pour l'espace extérieur.

Il faut encore citer l'imposante série de Traités dont M. Poincaré a enrichi la littérature mathématique. Mention particulière doit être faite des Œuvres suivantes : *Les méthodes nouvelles de la Mécanique céleste* (3 vol.); les *Leçons de Mécanique céleste* (1905), la *Théorie de Maxwell et les oscillations hertziennes, la Science et l'hypothèse* (1902, traduit en allemand), et

aussi de ses Cours : *Théorie mathématique de la lumière* (1887, traduit en allemand), *Électricité et Optique* (1890, traduit en allemand), *Thermodynamique* (1890), *Leçons sur la théorie de l'élasticité* (1890), *Théorie des tourbillons* (1891), *Les oscillations électriques* (1895), *Capillarité* (1895), *Théorie analytique de la propagation de la chaleur* (1895), *Calcul des probabilités* (1896), *Cinématique et mécanismes* (1899), *Théorie du potentiel newtonien* (1899), *Figures d'équilibre d'une masse fluide* (1902).

Je n'ai pu, dans les développements précédents, rappeler rapidement qu'une faible partie d'une œuvre qui comprend plus de 300 publications. Je crois cependant que ces développements permettent de reconnaître quelle place prépondérante tiennent les œuvres de M. Poincaré dans la littérature mathématique; les recherches qu'il a poursuivies ont fait progresser pour ainsi dire toutes les branches de la Science, les idées et les méthodes nouvelles qu'il a introduites ont été à la fois fécondes et suggestives. Il s'est montré le digne émule de ces illustres mathématiciens français dans les rangs desquels les noms de Laplace, Galois, Cauchy, Hermite brillent d'un éclat impérissable.

Pour terminer, qu'il me soit permis de rappeler son dernier Ouvrage (*Sur la valeur de la Science,* 1905) dans lequel il a écrit en quelque sorte la profession de foi des hommes de science. J'emprunterai à ce livre si intéressant un passage dans lequel il met en parallèle l'intuition et la logique en Mathématiques. Voici ce qu'il pense des logiciens : « En rejetant le secours de l'imagination, qui, nous l'avons vu, n'est pas toujours infaillible, ils peuvent avancer sans crainte de se tromper. Heureux donc ceux qui peuvent se passer de cet appui! Nous devons les admirer, mais combien ils sont rares! »

Un de ces esprits rares et admirables est M. David Hilbert, le maître de l'Analyse logique en Mathématique. Doué d'une force exceptionnelle de combinaison logique, il paraît tirer tout de lui-même exclusivement par généralisation, distinction et coordination des notions mathématiques, de telle sorte qu'il n'est guère possible de reconnaître dans ses travaux une influence quelconque de l'expérience ou de l'intuition.

Pigneur logique et netteté de la démonstration sont à ses yeux

des postulats adéquats et équivalents, et il est persuadé que la déduction logique bien employée ne doit jamais avoir la stérilisation pour conséquence, mais plutôt amène nécessairement un développement toujours fructueux des idées mathématiques. Il choisit de préférence pour objet de ses travaux les problèmes les plus difficiles, laissés de côté depuis longtemps, dont il parvient avec une admirable pénétration à saisir le point essentiel, de telle manière que ses recherches non seulement résolvent complètement le problème, mais encore déterminent un progrès décisif dans toute la discipline à laquelle ce problème se rattachait.

De ce caractère sont déjà ses premières publications importantes, dans lesquelles il établit le théorème fondamental de la théorie des invariants. M. Gordan avait déjà démontré ce théorème pour le cas d'un système de formes binaires, mais les méthodes qu'il avait employées se trouvaient insuffisantes quand les formes fondamentales renferment plus de deux variables et aussi quand ces formes renferment plusieurs séries de deux variables qui sont assujetties à des transformations linéaires différentes. Pour se procurer les moyens nécessaires à la démonstration longtemps cherchée de cet important théorème, M. Hilbert a constitué une théorie tout à fait nouvelle des systèmes de modules dans laquelle il établit des propositions du plus grand intérêt. Un théorème profond, qui est d'ailleurs devenu classique, lui fournit le point de départ. Il s'énonce comme il suit :

Si l'on a une suite illimitée de formes des n variables x_1, x_2, ..., x_n, à savoir F_1, F_2, ..., *il existe toujours un nombre m tel que toute forme de cette série puisse se mettre sous la forme*

$$F = A_1 F_1 + A_2 F_2 + \ldots + A_m F_m,$$

où A_1, A_2, ..., A_m *sont des formes appropriées des mêmes variables avec des coefficients qui appartiennent au même domaine de rationalité que ceux des fonctions* F.

Il a donné à ce théorème un perfectionnement arithmétique en l'étendant au cas où les coefficients sont assujettis à la condition d'être des nombres entiers. Pour la théorie des modules, ces théorèmes entraînent cette conséquence que parmi les formes d'un système de modules on peut toujours en choisir un nombre fini

de telle manière que toute autre forme du système puisse être représentée par une combinaison linéaire des formes choisies En langage géométrique, cela veut dire, par exemple, qu'étant donnée une courbe algébrique dans l'espace, il est toujours possible de déterminer un nombre fini de surfaces passant par la courbe

$$F_1 = 0, \qquad F_2 = 0, \qquad \ldots, \qquad F_m = 0,$$

de telle manière que toute autre surface contenant la courbe puisse être représentée par une équation de la forme

$$A_1 F_1 + A_2 F_2 + \ldots + A_m F_m = 0,$$

où $A_1, A_2, \ldots, A_m$ désignent des formes quaternaires.

Dans le développement de ces recherches, M. Hilbert s'applique à l'étude de certains systèmes d'équations linéaires, avec lesquelles il forme ce qu'il appelle des *systèmes dérivés* et, par des considérations extrêmement profondes, il parvient au résultat capital suivant :

Étant donné à résoudre le système des équations

$$F_{t1} X_1 + F_{t2} X_2 + \ldots + F_{tm} X_m = 0 \qquad (t = 1, 2, \ldots, m),$$

où $F_{t1}, \ldots, F_{tm}$ désignent des formes données de $x_1, x_2, \ldots, x_n$, la détermination des relations entre ses différentes solutions conduit à un second système d'équations de même forme appelé *système dérivé*. Ce système dérivé en fournit lui-même un autre et ainsi de suite. En continuant de cette manière, on arrive toujours, après n opérations au plus, à un système dérivé qui n'a plus aucune solution. La suite des systèmes dérivés ainsi obtenus fournit les notions les plus précises sur la structure du système de modules, c'est-à-dire de l'ensemble des fonctions $F_1, \ldots, F_m$; et l'on est en situation d'indiquer le nombre des conditions distinctes auxquelles doivent satisfaire les coefficients d'une forme de degré R pour être congrue à zéro d'après le système des modules $(F_1, F_2, \ldots, F_m)$. M. Hilbert détermine ce nombre $\chi(R)$ par la formule remarquable

$$\chi(R) = \chi_0 + \chi_1 \binom{R}{1} + \chi_2 \binom{R}{2} + \ldots + \chi_d \binom{R}{d} \qquad (d < n),$$

où $\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_d$ désignent certains entiers propres au système de modules $(F_1, F_2, \ldots, F_m)$, où R doit être pris supérieur à une

certaine limite, les symboles $\binom{R}{K}$ désignant les coefficients binomiaux. M. Hilbert nomme cette fonction entière $\chi(R)$ la fonction caractéristique du système et il démontre le théorème, très important pour toute cette théorie, que la somme des fonctions caractéristiques de deux systèmes de modules est égale à la somme des mêmes fonctions caractéristiques pour le plus grand commun et le plus petit des systèmes de modules contenants [1].

Il est intéressant de remarquer que les nombres $X_0, \ldots, X_d$ sont dans les relations les plus étroites avec ceux par lesquels M. Noether a caractérisé le genre de la courbe définie par le système des modules.

A l'aide de ces théorèmes et de l'emploi de l'opérateur Ω déjà indiqué en substance par M. Gordan et M. Mertens, M. Hilbert parvient à démontrer sous sa forme la plus générale le théorème fondamental de la théorie des invariants. Il le formule comme il suit :

Un système de formes fondamentales à un nombre quelconque de variables, qui sont soumises d'une manière indiquée à l'avance à des transformations qui sont les mêmes ou qui sont différentes, a toujours un nombre fini d'invariants entiers et rationnels par lesquels on peut exprimer tout autre invariant entier et rationnel en fonction entière et rationnelle.

---

[1] Si $(F_1, F_2, \ldots, F_m)$ et $(H_1, H_2, \ldots, H_h)$ désignent deux systèmes de modules et si l'on trouve pour l'équation

$$F_1 X_1 + \ldots + F_m X_m = H_1 Y_1 + \ldots + H_h Y_h$$

le système complet de solutions

$$X_1 = F_{1s}, \quad X_2 = F_{2s}, \quad \ldots, \quad X_m = F_{ms},$$
$$Y_1 = H_{1s}, \quad Y_2 = H_{2s}, \quad \ldots, \quad Y_h = H_{hs},$$

en définissant les formes K_s par l'égalité

$$K_s = \sum_{i=1}^{i=m} F_i F_{is} = \sum_{j=1}^{j=h} H_j H_{js},$$

on dit que les formes $K_1, \ldots, K_s$ forment le plus petit système de modules contenants, tandis que l'ensemble $(F_1, \ldots, F_m, H_1, \ldots, H_h)$ constitue, comme on sait, le plus grand système de modules commun.

Ce théorème s'applique aux covariants, aux combinants et aux contrevariants, parce que ces formations peuvent être ramenées à celles des invariants.

Si l'on désigne sous le nom de *syzygie irréductible* toute relation entre les invariants du système des formes fondamentales dont le premier membre ne peut être obtenu par des combinaisons linéaires de syzygies d'ordre moindre, on peut énoncer les deux théorèmes suivants :

Un système fini d'invariants possède un nombre toujours fini de syzygies irréductibles.

Les systèmes de syzygies irréductibles de différentes espèces forment une suite de systèmes d'équations dérivés qui finit au plus tard avec le $(m+1)^{\text{ième}}$ *terme, m désignant le nombre des invariants du système complet.*

Après que M. Hilbert a pu démontrer ainsi l'existence d'un système complet d'invariants, un problème se posait naturellement, celui de la détermination de ce système complet à l'aide d'un nombre fini d'opérations dont la suite serait indiquée dès le début du calcul. M. Hilbert a su donner à cette partie de la recherche une remarquable direction qui éclaire d'une lumière toute nouvelle la théorie entière des invariants. Cette théorie peut en effet être subordonnée à celle des corps de fonctions algébriques, de sorte qu'elle apparaît simplement comme une application remarquable de cette théorie. C'est ainsi que, dans la théorie des nombres, les propriétés du corps formé avec les équations de la division du cercle, qui ont servi à constituer la théorie générale des corps algébriques, ne sont plus aujourd'hui qu'un cas particulier et une application de cette dernière théorie. M. Hilbert démontre qu'à chaque système de formes fondamentales correspond toujours un corps algébrique dont les fonctions algébriques entières sont précisément les invariants entiers et rationnels du système de formes considéré. C'est le corps des invariants. Si l'on emploie maintenant le théorème de Kronecker sur le système fondamental d'un corps, il apparaît clairement que la connaissance du corps des invariants n'exige plus pour conduire au système complet des inva-

riants que la solution de problèmes élémentaires de la théorie arithmétique des fonctions algébriques.

Dans le développement de la recherche, M. Hilbert démontre un théorème qui se rattache dignement au beau théorème sur les systèmes de modules énoncé plus haut et que je signalerai particulièrement à cause de sa simplicité et de ses nombreuses applications. On l'énonce comme il suit :

Soient m fonctions entières et rationnelles $f_1, f_2, \ldots, f_m$ *des n variables* $x_1, \ldots, x_n$ *et soient* $F, F', F'', \ldots$ *des fonctions quelconques rationnelles et homogènes de* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *telles qu'elles s'évanouissent pour tous les systèmes de valeurs des variables* $x_1, \ldots, x_n$ *qui annulent simultanément* $f_1, \ldots, f_m$. *Il est toujours possible de déterminer un entier r de telle manière que tout produit de r ou de plus de r fonctions de la suite* $F, F', F'', \ldots$ *puisse se représenter sous la forme*

$$\pi = a_1 f_1 + a_2 f_2 + \ldots + a_m f_m,$$

où $a_1, \ldots, a_m$ *désignent des fonctions entières et rationnelles convenablement choisies de* $x_1, \ldots, x_n$.

Ce théorème que M. Hilbert, dans un travail ultérieur, a appliqué d'une manière très habile pour obtenir une démonstration particulièrement simple d'une proposition de M. Dedekind relative aux nombres hypercomplexes, forme le point central de toute la théorie des invariants. La théorie subséquente repose sur la détermination des formes appelées *nulles*, c'est-à-dire de celles dont les coefficients ont de telles valeurs numériques que tous leurs invariants soient nuls. Chacune de ces formes peut toujours être ramenée par une substitution unimodulaire à un type canonique, et leur détermination se trouve par suite ramenée à celle de ces types canoniques. La résolution des équations qui sont nécessaires pour cet objet se fait de la manière la plus commode à l'aide de constructions graphiques. Pour déterminer le système complet des invariants, M. Hilbert est enfin conduit aux opérations suivantes :

I. On détermine un système S_1 d'invariants par lesquels tous

les autres invariants des formes fondamentales s'expriment sous forme de fonctions algébriques et entières.

II. On forme un système S_2 d'invariants par lequel les autres invariants puissent s'exprimer rationnellement.

III. On calcule un système complet de formes algébriques entières dans le corps de fonctions déterminé par les systèmes S_1 et S_2. Les fonctions de ce système S_3 sont des invariants et constituent, jointes aux invariants S_1, le système complet cherché.

De ces trois problèmes, le premier est le plus difficile; on le résout en cherchant tous les invariants dont l'évanouissement entraîne nécessairement l'évanouissement de tous les autres invariants; pour les obtenir, il suffit de considérer seulement tous les invariants dont le poids ne dépasse pas une certaine limite. M. Hilbert montre d'ailleurs qu'on pourrait aussi résoudre le problème sans connaître le système S_2.

Les travaux de M. Hilbert ont ainsi apporté de la manière la plus complète l'élucidation longtemps cherchée à toutes les questions essentielles de la théorie des invariants, laissées jusque-là sans solution; de sorte que, grâce à ces travaux, cette branche importante de l'Algèbre peut être considérée, au moins dans sa partie théorique, comme complètement achevée.

Je passe maintenant aux recherches arithmétiques de M. Hilbert. Par la simplicité de ses fondements, l'exactitude de ses concepts, la netteté méthodique de ses déductions, la Théorie des Nombres a été toujours considérée comme un modèle pour les autres disciplines mathématiques; mais une grande puissance d'abstraction est indispensable à celui qui veut la dominer ou la développer. Nous ne devons donc pas nous étonner qu'elle ait exercé son attraction sur un penseur abstrait tel que M. Hilbert et qu'elle l'ait entraîné dans des recherches approfondies. Je rapporte ici les propres paroles de M. Hilbert qui rendent sa pensée de la manière la plus claire :

« La théorie des corps numériques est semblable à un monument d'une beauté et d'une harmonie admirables; comme une des parties les plus richement ornées de cet édifice m'apparaît la théorie des corps abéliens et des corps relativement abéliens que nous ont élevée Kummer, par ses travaux sur les lois supérieures de récipro-

cité, et Kronecker, par ses recherches sur la multiplication complexe des fonctions elliptiques. Les vues profondes que les travaux de ces géomètres nous ont ménagées sur cette théorie nous montrent en même temps que, dans cette partie de la Science, une foule de trésors précieux demeurent cachés, destinés à servir de riche récompense au chercheur qui, connaissant la valeur de pareils trésors, sait cultiver avec amour l'art de les acquérir ([1]). »

Nous avons reproduit ici ces belles paroles parce que M. Hilbert lui-même est celui auquel il a été donné de découvrir les plus précieux et les plus cachés de ces trésors. La première de ses recherches arithmétiques, remontant à 1896, a pour titre : *Ein neuer Beweis des Kronecker'schen Fundamentalsatzes über Abelsche Zahlkörper*. Dès 1853, Kronecker avait signalé ce théorème fondamental que les racines de toutes les équations abéliennes peuvent s'exprimer par les racines de l'unité, dans le domaine des nombres rationnels. Longtemps ce théorème fondamental demeura sans démonstration ; et ce ne fut que 30 ans après que M. Henri Weber put en donner, à l'aide de considérations transcendantes, une démonstration extrêmement difficile.

En introduisant une série de notions nouvelles et en appliquant un théorème sur le discriminant fondamental d'un corps algébrique donné par M. Minkowski, M. Hilbert nous a donné du théorème de Kronecker une démonstration très simple, purement arithmétique, qui a le mérite de mettre en évidence de quelle manière on pourra construire tous les corps abéliens d'un groupe et d'un discriminant donné.

Je dois maintenant revenir au travail que j'ai déjà cité : *Die Theorie der algebraischen Zahlkörper*. C'est un rapport sur le développement historique de la théorie des corps de nombres algébriques. Par la clarté de l'ordonnance, par la précision des développements, il peut être regardé comme un modèle d'exposition ; par la foule de notions et de méthodes nouvelles qu'il introduit, il doit être aussi considéré comme un progrès essentiel apporté à la théorie des corps algébriques. Corps relatifs, normes relatives, discriminants relatifs, corps de ramification, toutes ces conceptions

---

([1]) *Die Theorie der algebraischen Zahlkörper,* Bericht von D. Hilbert, 1897.

émanent de M. Hilbert et il les y développe d'une manière systématique pour la première fois. Comme particulièrement féconde se révèle la théorie qu'il expose des corps numériques de Kummer et l'introduction de la notion de norme résidu de ce corps. A l'aide de cette notion il réussit à représenter la loi générale de réciprocité pour les résidus de puissances par la formule

$$\prod_{\mathfrak{w}} \left(\frac{\mu, \nu}{\mathfrak{w}}\right) = 1,$$

où $\left(\frac{\mu, \nu}{\mathfrak{w}}\right)$ désigne une certaine racine de l'unité et où le produit doit être étendu à tous les idéaux premiers du corps.

Dans son Mémoire : *Ueber die Theorie der relativ-quadratischen Zahlkörper,* il a développé la théorie des résidus quadratiques en supposant que le corps fondamental k soit imaginaire et appartienne à un nombre de classe impair. Comme le résultat le plus important de ces recherches, nous signalerons la loi de réciprocité dans k et ce théorème d'après lequel, dans un corps relativement quadratique, il y a des genres correspondant à la moitié de tous les systèmes imaginables de caractères : théorème qui peut être regardé en quelque sorte comme la généralisation du théorème connu de Gauss.

Dans l'important Mémoire : *Ueber die Theorie der relativ-Abelschen Korper,* cette proposition est étendue à un corps quelconque k. C'est dans ce travail qu'apparaît pour la première fois la notion de corps de classe qui sert de base essentielle à la recherche.

C'est le corps numérique relativement abélien par rapport à k de discriminant relatif égal à 1 qui comprend comme corps partiels tous les corps non ramifiés par rapport à k. Déjà en 1856, Kronecker avait été conduit à cette remarque surprenante qu'à tout corps imaginaire quadratique on peut associer un corps numérique de discriminant relatif égal à 1, de telle sorte qu'après l'adjonction de ce corps tous les idéaux du corps fondamental deviennent de véritables entiers algébriques. Il assignait à la théorie des nombres comme la recherche la plus haute et la plus désirable l'étude approfondie de la nature et des propriétés de ce corps numérique qu'il faut associer au corps fondamental. C'est M. Hil-

bert qui a fourni les moyens nécessaires pour cette étude et c'est grâce à ses travaux approfondis qu'il a été donné en 1904 à M. Ph. Furtwängler de construire effectivement pour un corps numérique donné quelconque le corps de classe qu'il faut lui associer.

Comme un modèle et comme une preuve du grand talent de M. Hilbert pour la simplification des démonstrations difficiles, citons encore le travail plus ancien de 1894 : *Ueber die Zerlegung der Ideale eines Zahlen körpers in Primideale,* dans lequel il démontre le théorème connu de M. Dedekind de la manière la plus lumineuse et la plus suggestive, grâce à l'emploi du corps numérique de Galois.

Citons également sa démonstration pour la transcendance des nombres e et π. Il y débarrasse l'essentiel de la démonstration d'Hermite et de Lindemann de toute addition inutile et, au lieu d'établir par des calculs difficiles qu'une certaine expression doit être différente de zéro, il fonde toute sa démonstration sur la preuve qu'un certain nombre entier ne peut être congru à zéro quand on prend pour module un nombre premier convenablement choisi et, par suite, ne peut être nul.

Pour terminer ce qui concerne ces recherches arithmétiques, je signalerai encore un important Mémoire : *Ueber die Irreductibilität ganzer Functionen mit ganzahliger Coefficienten.* M. Hilbert y donne la démonstration du théorème suivant :

Si une fonction $F(x, y, \ldots, w, t, r, \ldots, q)$ *est irréductible dans un certain domaine de rationalité défini par un nombre algébrique, il est toujours possible, et d'une infinité de manières, de remplacer dans cette fonction* $t, r, \ldots, q$ *par des nombres entiers rationnels, de telle manière que la fonction devenue dépendante des seules variables* $x, y, z, \ldots, w$ *demeure irréductible dans le domaine de rationalité donné.*

De là résulte la démonstration d'un théorème qu'auparavant on s'était borné à soupçonner, à savoir qu'il existe un nombre illimité d'équations du n^{ieme} degré, dont le groupe est le groupe symétrique, dans le domaine des nombres rationnels. Un résultat identique a lieu pour le groupe alterné.

En passant maintenant aux recherches géométriques de M. Hilbert, je dois rendre compte de son Ouvrage *Grundlagen der*

Geometrie, paru en 1899 et dont une deuxième édition a été publiée en 1905. Cet exposé est une étude critique sur les principes de la Géométrie pour laquelle il constitue un système simple et complet d'axiomes, déduisant les théorèmes fondamentaux les plus importants (le théorème de Desargues et un cas particulier du théorème de Pascal), de telle manière que la portée des déductions à tirer des seuls axiomes apparaît immédiatement. Il distribue les axiomes en cinq groupes et démontre qu'ils n'impliquent pas contradiction en construisant des variétés arithmétiques pour lesquelles ils sont vérifiés. Enfin, les constructions géométriques élémentaires sont étudiées et développées et, en prenant pour base un théorème profond d'arithmétique, on donne les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une construction donnée puisse s'effectuer uniquement par le tracé de lignes droites et le transport de segments.

Dans cet ensemble, il faut encore signaler l'importante discussion sur l'emploi des groupes de transformations pour établir les bases de la Géométrie. Cette étude, par la généralité plus grande des suppositions, dépasse les recherches correspondantes de Sophus Lie. Ces travaux, dont la haute signification a été appréciée de la manière la plus favorable par M. Poincaré, ont aussi provoqué de nombreuses recherches, confirmant ainsi une opinion émise à diverses reprises par M. Hilbert, à savoir que la puissance logique de la recherche porte toujours en soi le germe d'un fécond développement ultérieur.

Et maintenant je dirai quelques mots des recherches de M. Hilbert relatives à la théorie des fonctions. Je dois d'abord signaler la démonstration admirable qu'il a donnée pour le principe de Dirichlet. Ce principe fait reposer, comme on sait, l'existence d'une solution d'un certain problème aux limites de la théorie du potentiel sur la considération d'une intégrale dont le minimum doit fournir la solution cherchée. Par suite de sa simplicité, de ses applications multiples et faciles à la théorie des intégrales algébriques aussi bien qu'aux problèmes de la Physique mathématique, il s'était révélé comme un des instruments les plus efficaces de la recherche mathématique. Alors apparut la critique de Weierstrass qui, par un exemple très simplement choisi, mit en évidence l'insuffisance des considérations de Dirichlet. La faculté de vivre semblait avoir été ainsi retirée au principe de Dirichlet. Ce

n'est qu'au prix de grands efforts que M. C. Neumann, M. H. Schwarz et M. H. Poincaré purent lui trouver des équivalents. M. Hilbert n'en a donc que plus de mérite à avoir ressuscité le principe lui-même dans sa simplicité primitive et par les moyens les plus élémentaires. Sa démonstration, aussi lumineuse qu'irréprochable, se recommande aussi bien par sa facilité que par cette circonstance que, partant seulement de la propriété de minimum et ne faisant aucun usage des propriétés de la fonction potentielle, elle peut, par cela même, être appliquée à des problèmes plus généraux de la Physique mathématique.

De grande importance sont aussi les recherches que M. Hilbert a publiées depuis 1902 sur la théorie générale des *équations intégrales*. On désigne sous ce nom des équations dans lesquelles une fonction inconnue apparaît explicitement et aussi sous le signe d'une intégrale définie. M. Hilbert s'est bientôt convaincu que l'établissement systématique d'une théorie de ces équations est du plus haut intérêt pour toute l'Analyse, en particulier pour la théorie des intégrales définies, pour l'étude du développement des fonctions arbitraires en séries infinies, pour la théorie des équations différentielles linéaires, pour le calcul des variations et la théorie du potentiel.

Il recherche les propriétés des solutions de ces équations intégrales sous l'hypothèse essentielle que la fonction désignée par lui sous le nom de *Kernfunction* est symétrique par rapport aux deux variables dont elle dépend. Il établit des développements nouveaux des fonctions arbitraires en séries de fonctions spéciales (*Eigenfunctionen*) qui comprennent les développements connus en séries trigonométriques, fonctions de Bessel, de Lamé, de Sturm, fonctions sphériques comme cas particuliers. Il parvient d'ailleurs à donner les conditions nécessaires et suffisantes pour l'existence de fonctions spéciales en nombre illimité. Il faut noter comme caractéristique de la manière de M. Hilbert que son mode d'exposition, en même temps qu'il met en évidence les idées mères de la recherche, fournit avec une grande pénétration les éléments d'une démonstration rigoureuse.

Je pourrais encore rappeler aussi des recherches sur le calcul des variations qui paraissent être de grande conséquence pour cette importante discipline. Suivant une voie que Weierstrass avait

ouverte, il montre qu'elle conduit à une simplification extraordinaire du calcul des variations, en ce sens que, pour la démonstration de l'existence d'une solution, on peut éviter le calcul de la variation seconde et une partie des considérations difficiles qui se rapportent à la première variation.

Il faut pourtant que je termine ces aperçus malheureusement trop fugitifs. Ils montrent en M. Hilbert un mathématicien de la plus rare qualité, qui réunit en lui la rigueur et l'étendue de l'esprit, la force logique et un grand talent d'invention, la recherche paisible et l'enthousiasme ardent pour sa science.

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE.

SERVICE GÉOGRAPHIQUE DE L'ARMÉE. — *Nouvelle Table de logarithmes à cinq décimales et pour les lignes trigonométriques pour les nombres de* 1 *à* 12000. 2ᵉ édit. In-8°. Paris, Gauthier-Villars. 4 fr. 50 c.

THULOUP (A.). — *La sphéricité de la Terre. Sa rotation et le pendule de Foucault.* In-8°, 31 p. Melun, Impr. administrative.

Die Polhohe von Potsdam. 3. Heft. 51 p. avec 2 planches. (*Veröffentlichung des königl. preuss. geodätischen Instituts.* Neue Folge, nº 20.) In-8°. Berlin, Stankiewicz. 4 m.

APPELL (P.). — *Cours de Mécanique.* 2ᵉ édit. In-8°, 498 p. avec fig. Paris, Gauthier-Villars. 12 fr.

Annales de l'Observatoire de Paris, publiées sous la direction de Maurice Lœwy. (*Observations de* 1901.) In-4°, x-561 p. Paris, Gauthier-Villars. 40 fr.

1re Partie -

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

PICARD (E.). — TRAITÉ D'ANALYSE. Deuxième édition, tomes I et II, 2 vol. gr. in-8° de 483 et 585 pages. Paris, Gauthier-Villars.

La première édition de ce savant et beau *Traité d'Analyse* a donné lieu déjà à des comptes rendus dans ce *Bulletin* (années 1892 et 1893, pour les Tomes I et II). Je me bornerai ici à indiquer les additions qui ont été faites dans la seconde édition et qui, principalement dans le Tome II, introduisent des idées nouvelles et importantes.

TOME PREMIER.

Dans le Chapitre I (Intégrales simples et multiples) deux Sections ont été ajoutées. La Section III se rapporte aux fonctions intégrables, d'après Riemann ; dans l'exposition de cette théorie, l'auteur suit le *Mémoire sur les fonctions discontinues* où M. Darboux a repris, en les développant et en leur donnant une précision plus grande, les idées de Riemann. Dans la Section IV se trouvent la condition pour qu'une courbe $x = f(t)$, $y = \varphi(t)$ soit rectifiable, telle qu'elle a été donnée par M. Jordan, et ce résultat signalé par M. Peano : il est possible de trouver des fonctions $f(t)$ et $\varphi(t)$, continues de $t = 0$ à $t = 1$, telles que, si l'on pose $x = f(t)$, $y = \varphi(t)$, il existe une valeur de t, entre les limites indiquées, pour laquelle le point x, y coïncide avec un point arbitrairement choisi dans le carré de côté *un* construit sur ox et sur oy. On indique, d'après M. Hilbert, la construction géométrique d'une ligne brisée dont la limite est une courbe qui remplit entièrement l'aire d'un carré, suivant le sens qui vient d'être précisé.

A la suite du Chapitre VI (Sur l'équation de Laplace), après que le problème de Dirichlet a été complètement résolu pour le

cas d'une surface convexe, on donne des indications bibliographiques détaillées sur la méthode de M. Poincaré dite *méthode de balayage* et sur l'extension de la méthode de Neumann. Un peu plus loin (Chap. VII, Attraction et potentiel) on a ajouté la définition d'une *double couche* telle qu'elle se présente à propos des feuillets magnétiques : le potentiel de cette double couche s'exprime par une intégrale double, généralisation de l'intégrale de Gauss, étudiée en détail dans le Chapitre précédent.

Dans le Chapitre VIII (Intégration des séries) se trouve une étude sur les séries uniformément convergentes de fonctions discontinues. La série de Riemann

$$f(x) = \frac{(x)}{1} + \frac{(2x)}{2^2} + \ldots + \frac{(nx)}{n^2} + \ldots,$$

où (x) désigne la différence entre x et l'entier le plus voisin et a la valeur zéro quand x est un multiple impair de $\frac{1}{2}$, définit une fonction discontinue une infinité de fois dans tout intervalle : les valeurs de x pour lesquelles la fonction est discontinue sont données par $x = \frac{p}{2m}$ (p et m premiers entre eux, p impair).

Cette même fonction $f(x)$ sert d'exemple pour l'intégration d'une série uniformément convergente dans un intervalle et dont les termes sont des fonctions intégrables, mais non continues dans cet intervalle. L'intégration conduit à une fonction $\int_0^x f(x)\,dx$ qui est continue et n'admet pas de dérivée pour les valeurs $x = \frac{p}{2m}$ déjà considérées, valeurs qui sont en nombre infini dans tout intervalle.

A la fin du Chapitre IX (Séries trigonométriques) ont été ajoutées deux démonstrations du théorème de Weierstrass : Toute fonction continue peut être représentée par une série de polynomes. La démonstration de Weierstrass est présentée sous la forme suivante : on envisage la série Σ,

$$\frac{a_0}{2} + (a_1 \cos\varphi + b_1 \sin\varphi) + \ldots + (a_m \cos m\varphi + b_m \sin m\varphi) + \ldots$$

où les a_m, b_m sont les coefficients de Fourier qui correspondent à la fonction $f(\varphi)$ supposée continue et périodique avec la période 2π; on rend la série Σ convergente en multipliant le terme

général par $e^{-m^2 t}$, t étant une constante positive : la série auxiliaire Σ' ainsi obtenue tend vers $f(\varphi)$ quand t tend vers zéro. Pour le voir, on remplace a_m, b_m par leurs valeurs, ce qui donne immédiatement, pour la somme de la série Σ', la forme

$$u = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{U}\, f(\psi)\, d\psi$$

où

$$\mathrm{U} = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} \cos n(\varphi - \psi) e^{-n^2 t};$$

en transformant U à l'aide d'une identité connue de la théorie des fonctions elliptiques, on est ramené en définitive à chercher ce que devient l'intégrale

$$\frac{1}{\sqrt{t}}\int_0^{2\pi} e^{-\frac{(\varphi-\psi)^2}{4t}} [f(\psi) - f(\varphi)]\, d\psi,$$

quand t tend vers zéro, et l'on arrive à cette conclusion : A partir d'une valeur suffisamment petite de t, la série Σ' diffère de $f(\varphi)$ aussi peu que l'on veut. Mais la série Σ' regardée comme dépendant de φ est uniformément convergente; on peut donc trouver une suite limitée de Fourier qui diffère de $f(\varphi)$ de moins de 2ε, ε étant un nombre positif aussi petit qu'on le veut. Ce résultat obtenu, un raisonnement qui se retrouve dans la plupart des démonstrations du théorème de Weierstrass conduit à une série de polynomes pouvant représenter la fonction $f(\varphi)$.

Cette démonstration ne suppose pas connue la théorie de la série de Fourier. Si l'on admet les résultats de cette théorie telle qu'elle est présentée dans ce Livre, on arrive bien plus rapidement, comme on le montre ici d'après Volterra, à la représentation approchée d'une fonction continue et périodique par une suite limitée de Fourier.

TOME SECOND.

Les séries de polynomes sont étudiées à un autre point de vue dans des paragraphes ajoutés au Chapitre V du Tome II (Étude

des fonctions d'une variable complexe). On y suit une analyse de M. Runge qui a établi le premier qu'une fonction d'une variable complexe x, holomorphe dans une aire A, limitée par un contour simple, peut être développée en une série de polynomes entiers en x, convergente dans toute aire A' intérieure à A. On donne ensuite la démonstration de M. Painlevé relative au cas où le contour C de l'aire A est convexe et tel qu'en chaque point M on puisse tracer un cercle tangent en M à C et comprenant tout le contour C à son intérieur, puis on expose les travaux de M. Mittag-Leffler sur ce sujet. Considérant une série entière on définit l'*étoile* obtenue en faisant le prolongement analytique de la série le long de chaque rayon du cercle de convergence. On a, dans l'étoile, une fonction $f(z)$ qui est le prolongement de la série entière : cette fonction peut être développée en une série de polynomes uniformément convergente dans toute aire intérieure à l'étoile.

Ce théorème de Mittag-Leffler est démontré en partant, comme le fait M. Borel, de la formule

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi}\int_C \frac{f(x)}{x}\,\frac{1}{1-\frac{z}{x}}\,dx,$$

où l'on désigne par z un point intérieur à l'étoile et par C un contour intérieur à l'étoile et voisin de sa frontière. Mais, d'après une formule qui sera établie à propos des équations différentielles, on a ici

$$\frac{1}{1-\frac{z}{x}} = P_1\left(\frac{z}{x}\right)+\ldots+P_n\left(\frac{z}{x}\right)+\ldots,$$

$P_n(u)$ désignant un polynome entier en u. On en conclut

$$2i\pi f(z) = \sum_{n=1}^{\infty}\int_C \frac{f(x)}{x}\,P_n\left(\frac{z}{x}\right)dx,$$

et, comme le second membre est une série dont les termes sont des polynomes entiers en z, le théorème de Mittag-Leffler est établi.

Enfin, on est conduit à des séries de polynomes d'une nature différente en s'appuyant sur la représentation conforme (Chap. X).

On sait qu'une fonction holomorphe à l'intérieur d'une ellipse de foyers c et $-c$ peut se développer sous la forme

$$f(z) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m P_m(z),$$

$P_m(z)$ désignant le polynome d'ordre m

$$P_m(z) = (z + \sqrt{z^2 - c^2})^m + (z - \sqrt{z^2 - c^2})^m.$$

D'une manière générale, pour une fonction $f(z)$, holomorphe à l'intérieur d'un contour C régulièrement analytique, on peut avoir des développements en série de polynomes, ces polynomes dépendant uniquement du contour C.

Il est intéressant de rapprocher des développements précédents une partie des additions qui ont été faites au Chapitre XI (Théorèmes généraux sur les équations différentielles), principalement dans l'exposition de la méthode de Cauchy-Lipschitz. Pour appliquer cette méthode à l'équation

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y),$$

on suppose que, pour les valeurs de x et de y satisfaisant aux inégalités

$$|x - x_0| < a, \quad |y - y_0| < b,$$

la fonction $f(x, y)$ est continue et de plus qu'il existe un nombre positif k tel que, y_1 et y_2 désignant deux valeurs quelconques de l'intervalle $(y_0 - b, y_0 + b)$, on a

$$|f(x, y_2) - f(x, y_1)| < k\,|y_2 - y_1|.$$

Ces conditions, dont la dernière s'appelle *condition de Lipschitz,* étant supposées vérifiées, il existe une intégrale de l'équation donnée prenant pour $x = x_0$ la valeur y_0 et définie pour toute valeur de x de l'intervalle $(x_0 - A, x_0 + A)$, A désignant un nombre fixe tel que, si M est la valeur absolue maxima de $f(x, y)$ dans le domaine considéré, on a, à la fois,

$$A \leqq a, \qquad AM \leqq b.$$

Pour obtenir cette intégrale, on considère dans l'intervalle

$(x_0 - A, x_0 + A)$ la suite

$$x_0, \quad x_1, \quad \ldots, \quad x_{n-1}, \quad x,$$

que nous supposerons croissante, puis les équations aux différences

$$\begin{aligned} y_1 - y_0 \quad &= (x_1 - x_0) f(x_0, y_0), \\ y_2 - y_1 \quad &= (x_2 - x_1) f(x_1, y_1), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y - y_{n-1} &= (x - x_{n-1}) f(x_{n-1}, y_{n-1}) \end{aligned}$$

et l'on suppose que, x_0 et x restant fixes, le nombre des termes de la suite augmente indéfiniment suivant une loi quelconque, de façon que chacun des intervalles partiels tende vers zéro.

Ceci rappelé, voici, d'une façon très abrégée, comment M. Picard expose une propriété importante de la méthode de Cauchy-Lipschitz, propriété qu'il a indiquée dans une Note des *Comptes rendus* (5 juin 1899).

Soit Y une intégrale de l'équation $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ prenant pour $x = x_0$ la valeur y_0; on suppose que, x croissant à partir de x_0, Y soit continue tant que x ne dépasse pas $x_0 + h$ et que, pour chacune des valeurs x, Y, la fonction f ne cesse, dans un petit domaine autour de x, Y, de remplir les conditions de Lipschitz. Dans ces hypothèses, x désignant une valeur comprise entre x_0 et $x_0 + h'$ $(h' < h)$, la méthode de Cauchy est valable pour tout l'intervalle (x_0, x). Si cet intervalle a été partagé en n parties égales, les équations aux différences conduisent à une expression $P_n(x)$ qui converge uniformément vers Y dans l'intervalle $(x_0, x_0 + h')$, quand n augmente indéfiniment. L'intégrale peut alors être considérée comme la somme d'une série uniformément convergente dans l'intervalle $(x_0, x_0 + h')$, le terme général de la série étant $P_n(x) - P_{n-1}(x)$.

Tous ces résultats s'étendent à un système d'équations. On considère, en particulier, le système

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i(x_1, x_2, \ldots, x_p) \qquad (i = 1, 2, \ldots, p).$$

Quand les X sont des polynomes entiers, les séries analogues à celle qui vient d'être définie sont convergentes tant que les

intégrales x correspondant aux valeurs initiales $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_p^0$ sont des fonctions continues de t. Il est, en général, difficile de reconnaître si cette condition est réalisée. Mais les propositions précédentes trouvent leur application dans les cas où l'on peut prévoir que les conditions de continuité sont réalisées. Des exemples intéressants sont fournis par les équations du mouvement d'un corps solide autour d'un point fixe, puis par des équations de M. Volterra admettant comme intégrale première

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_p^2 = \text{const.},$$

enfin, par les équations différentielles du problème de p points se repoussant en raison inverse de la $\mu^{\text{ième}}$ puissance de la distance ($\mu > 1$).

La méthode de Cauchy-Lipschitz peut s'étendre aux équations analytiques et aux fonctions de variables complexes. Dans le cas particulier où les équations sont

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i(x_1, x_2, \ldots, x_p) \qquad (i = 1, 2, \ldots, p)$$

et où les X sont des polynomes entiers, en joignant le point t_0 au point t et partageant l'intervalle $t_0 t$ en n parties égales on arrivera à représenter les intervalles par des séries dont les termes sont des polynomes entiers en t : ces séries sont convergentes dans le domaine que M. Mittag-Leffler appelle *une étoile*. On pourra souvent de cette manière obtenir des développements de fonctions en séries de polynomes. Par exemple, la fonction $y = \frac{1}{1-x}$ satisfait à l'équation différentielle $\frac{dy}{dx} = y^2$; l'étoile relative à cette fonction est le plan de la variable x affecté d'une coupure $(1, +\infty)$ sur l'axe des quantités réelles. La série correspondante de polynomes se déduit immédiatement du résultat donné sous la forme suivante par M. Goursat (*Bulletin des Sciences mathématiques*, 1903) : soit

$$Q_1 = 1 + x, \qquad Q_2 = 1 + x(1+x), \qquad Q_p(x) = Q_{p-1}[x(1+x)],$$
$$V_p(x) = Q_1 Q_2 \ldots Q_p.$$

$V_n\left(\frac{x}{n}\right)$ converge uniformément vers $\frac{1}{1-x}$ dans une aire limitée

par un contour fermé qui n'a aucun point commun avec la coupure $(1, +\infty)$.

M. Picard a encore simplifié l'exposition de sa méthode des approximations successives; il donne la démonstration de M. Lindelöf, établissant que l'on peut avoir, dans certains cas, un champ plus étendu comme domaine assuré pour l'intégrale, et signale des cas où l'emploi de la méthode est particulièrement simple.

Dans le Chapitre I (Équation de Laplace dans le plan) un exemple de Weierstrass est expliqué pour montrer la nécessité de compléter le raisonnement par lequel Riemann établit l'existence d'une fonction harmonique prenant des valeurs données sur un contour.

Au commencement du Chapitre V (Étude directe des fonctions d'une variable complexe), on insiste sur les hypothèses nécessaires pour établir les théorèmes fondamentaux et l'on reproduit la démonstration du théorème de Cauchy qui a été donnée par M. Goursat.

Dans le Chapitre VII (Nombre des racines communes à plusieurs équations) on trouve des intégrales de Kronecker, plus générales que celles qui avaient été données dans la première édition et l'on explique en détail comment elles se sont présentées. Voici une indication sur le résultat principal : Kronecker a considéré l'intégrale

$$W = \iiint \frac{\rho(x, y, z)\,\mathrm{D}\,dx\,dy\,dz}{\sqrt{[\xi - f(x, y, z)]^2 - [\eta - \varphi(x, y, z)]^2 + [\zeta - \chi(x, y, z)]^2}}$$

étendue au volume limité par une surface S, D représentant le jacobien de f, φ, ψ. Quand on fait le changement de variables

$$a = f(x, y, z), \qquad b = \varphi(x, y, z), \qquad c = \psi(x, y, z),$$

l'intégrale W devient, au signe près, le potentiel d'une masse attirante de densité ρ sur un point ξ, η, ζ; en suivant l'effet de ce changement de variables sur les calculs qui conduisent à l'équation de Poisson, $\Delta V = -4\pi\rho$, on est conduit à calculer l'expression

$$-4\pi \sum \rho(x_i, y_i, z_i) \frac{\mathrm{D}(x_i, y_i, z_i)}{|\mathrm{D}(x_i, y_i, z_i)|},$$

les points x_i, y_i, z_i étant les points situés à l'intérieur de S qui

annulent f, φ, ψ; cette expression est donnée par une intégrale de surface étendue à la surface S plus une intégrale de volume étendue au volume limité par la surface S. J'écrirai ici seulement la formule analogue relative au cas de deux variables x et y :

$$2\pi \sum \rho(x_i y_i) \frac{D(x_i, y_i)}{|D(x_i, y_i)|} = \int_C \frac{\rho(A\,dx - B\,dy)}{f^2 + \varphi^2} + \int\int \frac{H\,dx\,dy}{f^2 + \varphi^2},$$

f, φ, ρ sont des fonctions de x et de y et l'on a posé

$$A = f\frac{\partial\varphi}{\partial x} - \varphi\frac{\partial f}{\partial x}, \qquad B = f\frac{\partial\varphi}{\partial y} - \varphi\frac{\partial f}{\partial y}, \qquad D = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial y} - \frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}, \qquad H = \begin{vmatrix} 0 & \dfrac{\partial\rho}{\partial x} & \dfrac{\partial\rho}{\partial y} \\ f & \dfrac{\partial f}{\partial x} & \dfrac{\partial f}{\partial y} \\ \varphi & \dfrac{\partial\varphi}{\partial x} & \dfrac{\partial\varphi}{\partial y} \end{vmatrix}.$$

Si dans cette dernière formule on fait

$$\rho = \frac{D\varepsilon}{\sqrt{f^2 + \varphi^2 + D^2\varepsilon^2}},$$

ε désignant une constante positive (de sorte que ρ est égal à $+1$ aux points x_i, y_i où D est positif et à -1 aux points x_i, y_i où D est négatif), on retrouve la formule même de M. Picard donnant le nombre des racines communes à deux équations $f = 0$, $\varphi = 0$ et contenues à l'intérieur d'un contour C. Cette élégante démonstration de la formule de M. Picard, dispensant de passer par un espace à trois dimensions, est due à M. W. Dyck.

A la suite de la réduction du nombre de périodes pour une intégrale de fonction non uniforme, cinq pages ont été consacrées à la résolution approchée, en nombres entiers, de certaines équations linéaires. Soient ω, ω', ω'' trois nombres complexes tels qu'on ne puisse satisfaire à la relation

$$m\omega + m'\omega' + m''\omega'' = 0$$

avec des entiers qui ne soient pas tous nuls; on peut trouver des entiers m, m', m'' tels que l'on ait

$$|m\omega + m'\omega' + m''\omega''| < \varepsilon,$$

ε étant un nombre positif donné à l'avance aussi petit qu'on le veut.

La démonstration dont le principe est dû à Dirichlet a le caractère de simplicité ingénieuse des raisonnements d'Arithmétique.

Le théorème précédent a été établi par Jacobi pour montrer qu'une fonction uniforme ne peut avoir plus de deux périodes distinctes. Il a été étendu par Hermite à un système de $2p$ équations à $2p+1$ inconnues dont on cherche la solution approchée en nombres entiers et cette extension permet de conclure qu'il ne peut exister de fonction uniforme de p variables ayant plus de $2p$ périodes. La démonstration donnée ici est entièrement analogue à celle qui a servi pour une équation à trois variables. Enfin le même mode de démonstration peut être utilisé dans d'autres importantes questions d'approximation ; par exemple, il permet de représenter k nombres donnés par des fractions ayant même dénominateur m, l'erreur étant moindre que $\frac{1}{m\sqrt[k]{m}}$, résultat obtenu par Hermite par une analyse se rattachant à la théorie des formes quadratiques.

La théorie des résidus des intégrales doubles qui se trouve dans le Chapitre IX a été complétée. On indique une classe très étendue de *surfaces fermées* pour lesquelles la valeur correspondante de l'intégrale double

$$\iint \frac{P(x, y)}{A(x, y)}\, dx\, dy,$$

où P et A sont deux polynomes entiers en x et y, se ramène à une période, polaire ou cyclique, d'une intégrale abélienne et l'on établit ensuite que la valeur de l'intégrale double prise suivant une *surface fermée* arbitraire, tout entière à distance finie, assujettie seulement à ne pas rencontrer le continuum défini par l'équation $A(x, y) = 0$, se ramène à une somme de multiples des valeurs qui viennent d'être trouvées. On montre ainsi que tout résidu de l'intégrale double d'une fraction rationnelle peut être regardé comme une période logarithmique ou cyclique d'une intégrale abélienne.

Un complément a été ajouté à l'exposé de la théorie des fonctions algébriques et de leurs intégrales, exposé où M. Picard s'est servi heureusement d'une représentation plus intuitive que les feuillets superposés de Riemann et où, réservant l'attention pour les idées principales, il a fait ressortir les ensembles avec une

touche si large et une maîtrise si consommée. Le complément ajouté est un aperçu sur la théorie de Weierstrass. On explique comment Weierstrass, se plaçant à un point de vue purement algébrique, établit qu'il y a un certain minimum au-dessous duquel ne peut descendre le nombre de pôles simples, supposé *arbitrairement* choisi, d'une fonction rationnelle de x et de y, y étant une fonction de x définie par l'équation algébrique $f(x, y) = 0$. Ce nombre diminué d'une unité, que Weierstrass appelle *rang* de la courbe $f(x, y) = 0$ et qu'il désigne par la lettre ρ, n'est autre que le nombre p de Riemann; c'est le *genre* de la courbe.

Un élément essentiel de la théorie de Weierstrass est une fonction rationnelle de x, y, x', y' qu'il appelle $H(x, y; x', y')$: considérée comme fonction de (x, y), elle devient infinie du premier ordre aux $\rho + 1$ points

$$(a_1, b_1), \quad (a_2, b_2), \quad \ldots, \quad (a_\rho, b_\rho), \quad (x', y'),$$

s'annule au point (a_0, b_0), et a pour résidu -1 au point (x', y'). Elle est complètement déterminée par les conditions énoncées et Weierstrass l'obtient par un calcul régulier, établi directement. Dans le voisinage du pôle simple (a_α, b_β) on a pour cette fonction un développement de la forme

$$H(x, y; x', y') = H(x', y')_\alpha \frac{1}{x - a_\alpha} + \sum_{\nu=0}^{\infty} H^{(\nu)}(x', y')_\alpha (x - a_\alpha)^\nu.$$

Les 2ρ intégrales

$$\int H(x, y)_\alpha \, dx, \quad \int H^{(1)}(x, y)_\alpha \, dx \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, \rho)$$

forment un système de 2ρ intégrales distinctes de seconde espèce. M. Picard conclut ici : « On se trouve ainsi transporté, par une voie tout élémentaire, au cœur de la théorie des intégrales abéliennes. »

Le dernier Chapitre, ajouté tout entier, a pour titre : Quelques généralités sur les courbes gauches algébriques.

Soit donnée une courbe algébrique $f(\xi, \eta) = 0$ de genre p; si l'on prend trois fonctions x, y, z uniformes sur la surface correspondante de Riemann, et ayant seulement des pôles, on définit une courbe algébrique dans l'espace. Supposons que les trois fonc-

tions x, y, z aient μ pôles simples communs; la courbe sera, en général, une courbe gauche de degré μ.

Le cas simple est celui où $\mu - p \geqq 3$. Dans ce cas, le nombre h des points doubles apparents, nombre égal au nombre des points doubles de $f = 0$, satisfait à l'inégalité

$$h \geqq \frac{(\mu-2)(\mu-3)}{2} + 1.$$

Pour chaque degré μ et pour chaque nombre h on a une famille de courbes : le nombre des constantes dont dépendent les courbes de cette famille est indépendant de h, il est égal à 4μ. Si h satisfait à l'inégalité précédente, toute courbe plane de degré μ ayant h points doubles est la perspective d'une courbe gauche de degré μ.

On explique ensuite la représentation d'une courbe gauche par des équations

$$\varphi(x, y) = 0,$$
$$z = \frac{\psi(x, y)}{\chi(x, y)}$$

et l'on démontre des propriétés, en partie déjà signalées par Halphen dans son Mémoire : *Sur la classification des courbes gauches algébriques* et dont le rapport avec les séries linéaires de groupes de points sur une courbe algébrique est mis en évidence dans le *Traité des fonctions algébriques de deux variables,* par Picard et Simart, tome II, pages 43 et suivantes.

Ce dernier Chapitre, où certains résultats sont rendus intuitifs par l'application aisée de théorèmes sur les intégrales abéliennes, où l'on retrouve, sans grand effort, des propositions signalées dans de savants et difficiles Mémoires, n'est lui-même qu'une introduction : il conduit à des Mémoires et à des Livres où la Science est en train de se faire. Une impression du même genre s'éprouve souvent quand on étudie ce Traité d'Analyse et cette impression devient sans doute plus distincte à mesure que l'on a des connaissances plus étendues. E. LACOUR.

BROGGI (U.). — MATEMATICA ATTUARIALE. 1 vol. in-12, xv-346 pages de la collection des Manuels Hoepli. Milan, Ulrico Hoepli, 1906.

Qu'il y ait assez de mathématiciens au monde pour qu'un éditeur ait la pensée de leur préparer des manuels analogues à ceux des élèves de nos lycées et que ces manuels trouvent un public pour les accueillir favorablement, c'est là à coup sûr un signe des temps. Celui de ces manuels que nous avons sous les yeux et qui vient seulement de paraître expose les principes fondamentaux du Calcul des probabilités et surtout les applications de ce calcul à la théorie des tables de mortalité et aux questions mathématiques qui intéressent les assurances sur la vie.

Les problèmes politiques qui sont aujourd'hui posés dans tous les pays, le désir très légitime qui se manifeste partout d'assurer au travailleur une retraite et le pain de ses derniers jours ont beaucoup accru comme on sait l'importance et l'intérêt des études de ce genre. L'auteur s'est attaché à les faire connaître le mieux et le plus simplement possible. Son manuel est divisé en quatre Chapitres.

Le premier, qui a pour titre : *I fondamenti matematici e statistici,* traite rapidement des valeurs probables, du théorème de Bernoulli, de la loi des grands nombres, de la méthode des moindres carrés, etc. Il se termine par une théorie assez développée de la mortalité et par la démonstration de quelques formules de mathématiques financières.

Le Chapitre II est intitulé : *I problemi fondamentali della matematica delle assicurizioni sulla vita.* L'auteur y étudie succinctement les principales formes d'assurances sur la vie, les rentes réversibles, à capital réservé, etc.

Le Chapitre III a pour titre : *La tecnica delle assicurazioni sulla vita.* Il traite des primes des réserves et des profits.

Le Chapitre IV qui termine l'Ouvrage est intitulé : *La teoria dei rischio.*

On voit par ce rapide exposé que l'Ouvrage sera consulté avec profit par les actuaires et les techniciens des compagnies d'assurances.

G. J.

ABRAHAM (H.) et LANGEVIN (P.). — LES QUANTITÉS ÉLÉMENTAIRES D'ÉLECTRICITÉ : IONS, ÉLECTRONS, CORPUSCULES. Premier et second fascicules. 2 vol. in-8°, XVI-1139 pages. Paris, Gauthier-Villars, 1905.

Bien que cette publication ne touche pas directement à l'objet propre de notre Recueil, nous sommes convaincus que nos lecteurs nous sauront gré d'appeler sur elle leur attention. Comme le disent très justement les auteurs, la notion de structure discontinue des charges électriques domine et pénètre la plupart des découvertes récentes en Physique; cette forme nouvelle et, il faut ajouter, terriblement complexe des conceptions atomistiques sert maintenant de guide à un grand nombre d'expérimentateurs.

Il y a quelques années, nous avions affaire à un de nos confrères qui se faisait fort de nous démontrer par des arguments mathématiques et irréfragables l'existence de l'éther. Certains seraient aujourd'hui aussi étonnés si l'on contestait en leur présence l'existence des ions et des électrons. Quoi qu'il en soit, il est certain que la théorie nouvelle s'est montrée féconde. C'est là le point essentiel; et la Société française de Physique, en prenant sous son patronage la nouvelle publication, en en confiant la direction à deux jeunes physiciens d'un mérite éprouvé, a rendu un service qui mérite d'être signalé et célébré. On trouvera dans les deux Volumes que nous avons sous les yeux les principaux travaux dans lesquels s'est constituée la nouvelle théorie. Pour le mettre en évidence, il nous suffira d'emprunter à la table des matières quelques noms, ceux de MM. Becquerel, Crookes, Curie, Deslandres, Arrhénius, Giesel, Hertz, Larmor, Lorenz, Poincaré, Righi, Rutherford, Perrin, Sagnac, Stark, Simon, J.-J. Thomson,

Townsend, etc. Et nous en oublions beaucoup, et non des moindres. L'impression, nous n'avons pas besoin de le dire, est digne de la maison Gauthier-Villars. D. J.

CHWOLSON (O.-D.), Professeur ordinaire à l'Université impériale de Saint-Pétersbourg. — TRAITÉ DE PHYSIQUE, Ouvrage traduit sur les éditions russe et allemande, par *E. Davaux*, ingénieur de la Marine. Édition revue et considérablement augmentée par l'auteur, suivie de Notes sur la Physique théorique, par *E.* et *F. Cosserat*. Tome I, premier fascicule, XIII-407 pages, 16 fr. Tome II, premier fascicule, VII-202 pages, 6 fr. Paris, Hermann, 1906.

C'est toujours avec faveur qu'est accueillie une bonne traduction. Ceux, d'abord, qui n'ont pas une connaissance suffisante des langues étrangères et qui soupçonnent, non sans quelque apparence de raison, d'ailleurs, que les auteurs d'un même pays ne soient un peu enclins à envisager les questions sous le même point de vue, et plus ou moins portés à ne refléter, dans leurs écrits, que les idées les uns des autres ou de quelque maître commun, ont le désir bien naturel de se donner de l'air, et, ne pouvant aller aux livres étrangers, se réjouissent, du moins, que ceux-ci viennent les trouver chez eux. Mais, en outre, et la raison n'est pas moins bonne, il faut observer que les Ouvrages qui ont les honneurs de la traduction sont, naturellement, les meilleurs, à quelque point de vue, de ceux qui paraissent à l'étranger; qu'ils ont dû faire leurs preuves avant que l'attention, fort éveillée et fort entendue, des éditeurs se soit fixée sur eux; et que, ainsi, chacun peut être d'avance assuré que leur lecture est « comme une conversation avec les plus honnêtes gens des *pays étrangers*, qui en ont été les auteurs, et même une conversation étudiée en laquelle ils ne nous découvrent que les meilleures de leurs pensées », et de celles de leurs compatriotes.

Le *Traité de Physique* de M. Chwolson a commencé à paraître, en russe, en 1897; dès l'année 1900, le premier Volume a eu une seconde édition; une traduction allemande est en cours de

publication depuis 1902; et maintenant, la librairie Hermann nous en offre une autre, en langue française, faite sur les éditions russe et allemande par un de nos distingués ingénieurs de la Marine, M. E. Davaux. L'Ouvrage complet comprendra quatre Volumes, le premier fascicule de chacun des deux premiers Volumes, soit déjà plus de 600 pages, a paru, et l'on peut, dès maintenant, se rendre compte de la haute valeur de l'œuvre et de l'intérêt qu'il y avait à la mieux faire connaître en France.

Le premier fascicule du premier Volume renferme les trois premières Parties de l'Ouvrage : l'*Introduction générale*, la *Mécanique* (9 Chap.) et les *Méthodes et instruments de mesure* (9 Chap.); et, de plus, deux Notes : l'une de MM. E. et F. Cosserat, *Sur la dynamique du point et du corps invariable,* est placée à la fin de la Partie consacrée à la Mécanique; l'autre, de M. E. Davaux, *Sur la théorie des intégrateurs,* fait suite à la troisième Partie.

On ne saurait trop louer la clarté de l'exposition, la belle ordonnance des matières, l'abondance des développements, que quelques-uns trouveront peut-être excessive, mais que le plus grand nombre estimera, au contraire, nécessaire et reposante; l'extrême souci du détail, la richesse des indications bibliographiques, mises sous forme de tables à la fin de chaque Partie. Mais ce qui donne à l'Ouvrage son trait le plus original, c'est le caractère philosophique, et qui frappe tout d'abord, dont il est profondément empreint : on sent immédiatement l'effort vigoureux, et couronné de succès, fait pour débarrasser enfin l'enseignement de la Physique des lisières où l'ont entravé si longtemps ces deux bonnes mères, douces et vieillottes, qui ont noms Tradition et Routine, pour engager résolument et allégrement l'étudiant dans les voies nouvelles si pleines de promesses d'avenir et de succès, pour le mettre en garde contre le mirage des mots, qui ne sont point les choses, contre les spéculations dangereuses, les idées funestes, telles l'*Actio in distans,* qui ont régné si longtemps en Physique, qui en ont retardé le développement et qui, signe trop évident de la faiblesse de l'esprit humain, semblent toujours se survivre ou sur le point de renaître.

C'est ainsi que l'on trouvera, dans la partie consacrée à la Mécanique, un beau Chapitre sur la propagation des vibrations par

rayonnement, étude purement abstraite des phénomènes d'interférence, diffraction, réflexion, réfraction, etc., à laquelle il suffira, plus tard, de se reporter, pour donner l'idée la plus nette de l'unité de tous les phénomènes vibratoires, sonores ou calorifiques, lumineux ou électriques, considérés dans les diverses branches de la Physique.

La savante Note *Sur la dynamique du point et du corps invariable*, ajoutée par MM. E. et F. Cosserat à cette Partie, et dont on regrettera l'extrême concision, mériterait, à elle seule, une analyse approfondie. Elle accuse encore plus fortement, s'il est possible, les tendances modernes de l'Ouvrage : ce n'est rien moins, en effet, qu'une tentative remarquable pour lever les difficultés, signalées de toutes parts, auxquelles donne lieu, aujourd'hui, l'application, aux phénomènes naturels, des principes de la Mécanique rationnelle. Les auteurs, suivant en cela les idées émises par M. Poincaré dans sa conférence de Saint-Louis, ont voulu parvenir au but sans abandonner aucune des acquisitions anciennes de la Mécanique, mais, simplement, en élaborant une théorie plus compréhensive. Il est impossible de donner, en quelques lignes, une idée juste de tout ce que renferment ces quarante pages. Le principe de la méthode consiste à définir l'*action d'un point en mouvement* comme une fonction de la position et de la vitesse du point *invariante* pour toute transformation infinitésimale du groupe des déplacements euclidiens; des termes mêmes qui figurent dans la variation de cette action se déduisent alors les notions de *quantité de mouvement*, de *force extérieure*, de *travail*, d'*impulsion* et d'*énergie cinétique*. Dès lors, la *masse* (*maupertuisienne*) ou le coefficient par lequel il faut multiplier le vecteur vitesse pour obtenir la quantité de mouvement, dépend de la vitesse, et ainsi s'introduisent les valeurs critiques de cette vitesse, celles pour lesquelles la masse ne serait pas définie ou continue; les mouvements particuliers pour lesquels la quantité de mouvement est constante conduisent à la notion d'*état naturel de mouvement* et la dynamique ordinaire du point matériel apparaît, alors, comme la dynamique du point dans l'état de mouvement infiniment voisin de l'état naturel du repos. Ces notions fondamentales, qui doivent former la base de Notes ultérieures, sont ensuite appliquées, ici, à la dynamique du corps invariable.

Dans son intéressante Note *Sur la théorie des intégrateurs,* M. Davaux met en lumière les liens qui rattachent la théorie des appareils d'Amsler, Lord Kelvin, Hele Schaw, etc. aux beaux théorèmes géométriques de Holditch, Liguine, Darboux, relatifs aux éléments métriques, longueurs d'arc, aires, volumes, qui dépendent du mouvement d'une figure invariable.

La fin du premier Volume, non encore parue, et comprenant quatre autres Parties et de nouvelles Notes, doit être consacrée aux propriétés des gaz et des liquides; à la théorie des solides : cristallisation, élasticité, frottement et percussion; à l'acoustique.

Le premier fascicule du second Volume traite de l'*Énergie rayonnante* (5 Chap.) : émission et absorption de l'énergie rayonnante, vitesse de propagation, réflexion et réfraction. Nous y retrouvons toutes les qualités et tendances que nous avons signalées plus haut : l'auteur y considère le rayonnement calorifique, lumineux et électrique (rayons de Hertz) comme les modalités diverses d'une seule et même forme de l'énergie, l'énergie cinétique de l'éther en vibration, ces modalités ne se différenciant les unes des autres, au point de vue physique, que par la longueur d'onde des vibrations qui leur correspondent. La fin du Volume sera consacrée à la dispersion et à l'optique ondulatoire.

Le troisième Volume traitera de la *Chaleur* et le quatrième de l'*Électricité*.

Nous n'avons pas encore parlé des qualités de la traduction; mais il nous est facile de les résumer en une seule phrase qui est, en même temps, le meilleur éloge que nous puissions adresser à son auteur, M. Davaux : à un lecteur non prévenu, il serait impossible de soupçonner qu'il se trouve en présence d'une traduction.

A qui s'adresse ce Livre ? A quel examen prépare-t-il ? Question éminemment française qui ne saurait rester sans réponse. Je crois bien, en vérité, qu'il ne prépare à aucun examen, ou, si l'on veut, qu'il est propre à la préparation de tous. L'auteur a visiblement ignoré le souci de se conformer aux exigences de tel ou tel programme, il n'a souhaité que d'enseigner la Physique en se plaçant au point de vue le plus moderne, et il a fait un beau et bon Livre auquel peu trouveront à reprendre; les méthodes mises en œuvre sont toujours aussi élémentaires que possible; il n'exige du

lecteur que la connaissance des notions expérimentales les plus simples et des premiers principes du Calcul infinitésimal. M. Chwolson a sacrifié sans regrets visibles les inutilités, les idées vieillies et caduques, belles et fécondes en leur temps, tombées maintenant dans le domaine de l'Histoire, les terminologies surannées et devenues trompeuses, pour regarder résolument vers l'avenir et orienter l'enseignement dans les voies nouvelles; il déclare modestement qu'il a voulu simplement que « l'étudiant trouve dans son Livre ce dont il a besoin et ait besoin de ce qu'il y trouve ». Je crois qu'on lui accordera davantage; mais, même à s'en tenir là, quel auteur désavouerait un tel programme ?

H. PADÉ.

VAN VLECK (E.-B.), WHITE (H.-S.), WOODS (F.-S.). — LECTURE ON MATHEMATICS DELIVERED FROM SEPTEMBER 2 TO 5, 1903, BEFORE MEMBERS OF THE AMERICAN MATHEMATICAL SOCIETY IN CONNECTION WITH THE SUMMER MEETING HELD AT THE MASSACHUSETTS INSTITUTE OF TECHNOLOGY. 1 vol. in-8°, XII-187 pages. New-York, Macmillan et Cie, 1905.

Tous les deux ou trois ans, l'*American mathematical Society* tient un *Colloquium* qui se relie à l'assemblée régulière de l'été. On se rappelle l'*Evanston Colloquium* de 1893 et les douze Lectures de M. Klein; depuis ont eu lieu le *Buffalo Colloquium* (1896), le *Cambridge Colloquium* (1898), l'*Ithaca Colloquium* (1901), le *Boston Colloquium* (1903). De 1896 à 1901, MM. M. Bôcher, J. Pierpont, F. Osgood, G. Webster, O. Bolza, E. Brown ont traité, d'une façon très actuelle et élevée, des sujets divers, et de leurs lectures, plus ou moins amplifiées, sont sortis des Mémoires ou des Livres importants. Le *Bulletin* a rendu compte récemment des *Lectures on the Calculus of variations*, de M. O. Bolza, qui viennent de l'*Ithaca Colloquium*. Le présent Volume contient les Lectures faites au *Boston Colloquium* par MM. H.-S. White, S. Woods et B. van Vleck. On trouvera ci-dessous la Table des matières, qui donnera quelque idée à ceux

qui n'y ont pas assisté de la nature et de l'importance de ces Lectures. On voit que chaque lecteur a choisi un sujet de prédilection, qu'il connaît à fond, et sur lequel ont roulé ses travaux personnels.

WHITE (HENRY-S.). — *Systèmes linéaires de courbes sur les surfaces algébriques* (p. 1-30).

Les transformations de Cremona et la Géométrie sur une courbe. Définition des surfaces rationnelles. Systèmes linéaires de courbes sur une surface algébrique quelconque. Le théorème d'Enriques et les deux définitions de la linéarité. Courbes planes hyperelliptiques; les deux espèces de systèmes linéaires. Surfaces dont les sections planes sont hyperelliptiques; théorème de Castelnuovo sur leur rationalité. Différentielles linéaires exactes (Picard) sur une surface; celles de première espèce existent seulement sur des surfaces singulières. Surfaces quartiques spéciales de Poincaré et de Berry. Surfaces hyperelliptiques du sixième ordre (Humbert).

WOODS (FRIEDERICK-S.). — *Les formes de l'espace non-euclidien* (p. 31-74).

Les deux premières hypothèses. Définitions. La troisième hypothèse. L'élément linéaire. Géométrie dans une portion restreinte de l'espace. La quatrième et la cinquième hypothèses. Extension du système de coordonnées. L'espace auxiliaire Σ. Formes de l'espace qui permettent le libre mouvement d'un corps : les espaces de courbure nulle; les espaces de courbure négative constante; les espaces de courbure positive constante. Formes de l'espace qui ne permettent pas le libre mouvement d'un corps : les espaces de courbure nulle; les espaces de courbure positive constante; la surface de Clifford à courbure nulle; les espaces de courbure négative constante.

B. VAN VLECK. — *Choix de topiques dans la théorie des séries divergentes et des fractions continues* (p. 75-187).

Première Partie : séries divergentes. — Introduction. Convergence asymptotique. Application des intégrales aux séries divergentes. Sur la détermination des singularités des fonctions définies par des séries de puissances. Sur les séries de polynomes et de fractions rationnelles.

Seconde Partie : fractions continues algébriques. — La Table des approximants de Padé et ses applications. La généralisation des fractions continues. Bibliographie. J. T.

ARNAUDEAU (A.). — TABLES DES INTÉRÊTS COMPOSÉS, ANNUITÉS ET AMORTISSEMENTS POUR DES TAUX VARIANT DE DIXIÈMES EN DIXIÈMES ET DES ÉPOQUES VARIANT DE 100 A 400 SUIVANT LES TAUX. 1 vol. in-4° [IX, (15), 125 pages]. Paris, Gauthier-Villars, 1906.

Un mathématicien, qui ne manque pas d'humour, m'a fait jadis observer que si, conformément à une proposition de M. Klein, où se mêlent le sérieux et la fantaisie, on classait les sciences appliquées d'après le nombre de chiffres que l'on y garde, ce n'est point l'Astronomie qui viendrait en tête, mais bien les sciences financières. Les Tables que publie M. Arnaudeau viennent à l'appui de cette remarque plaisante, puisque les nombres qui figurent dans l'une de ces Tables ont jusqu'à douze chiffres. C'est assez dire la précision que l'auteur a voulu atteindre.

La Table I contient, avec dix décimales, la valeur de 1^{fr} placé à intérêt composé après un certain nombre de trimestres, de semestres ou d'années. Les taux varient par dixièmes; pour les taux de 0,5 à 0,9, le temps varie de 1 à 400 par trimestres; pour les taux de 1 à 2,9, il varie de 1 à 200 par semestres; enfin, pour les taux de 3 à 6,4, il varie, par années, de 1 à 100.

La Table II contient, avec six décimales, la valeur de 1^{fr} placé à intérêt composé après un certain nombre de mois. Le taux varie, par dixièmes, de 1 à 5.9.

La Table III fournit, avec sept décimales, la valeur actuelle de 1^{fr} payable au bout de 1, 2, ..., 100 années : les taux varient, par dixièmes, de 2 à 6,4.

La Table IV fournit, avec six décimales, la valeur actuelle d'un certain nombre d'annuités de 1^{fr} payables à la fin de chaque trimestre, semestre ou année, à savoir jusqu'à 200 trimestres pour les taux de 0,5 à 0,9, jusqu'à 100 semestres pour les taux de 1 à 3,4, jusqu'à 100 années pour les taux de 3,5 à 6,4.

Enfin, la Table V donne, avec sept décimales, l'annuité par laquelle on peut amortir un capital de 1^{fr} au bout d'un certain nombre de trimestres, semestres ou années. Pour les taux de 0,5 à 0,9, le temps varie, par trimestres, de 1 à 400; il varie, par semestres, de 1 à 100 pour les taux de 1 à 2,9, et, par années, de 1 à 100 pour les taux de 3 à 6,4.

La considération des taux variant par dixièmes rend très praticable l'interpolation par la formule de Newton; en allant jusqu'à la troisième différence, on obtient une approximation très suffisante pour les taux intermédiaires. C'est ce que M. A. Achard a clairement expliqué en quelques pages placées en tête du Livre.

Une introduction montre, pour quelques cas pratiques, de quel usage peuvent être les Tables. J. T.

DUHEM (P.). — Les origines de la Statique. T. I. In-8°, IV-360 pages. Paris, Hermann, 1905.

L'activité de M. Duhem est admirable : ses travaux considérables sur la Physique mathématique, sur la Chimie physique, sur la Mécanique, sur l'Hydrodynamique lui ont laissé le temps d'écrire de très beaux articles philosophiques : son Livre récent sur *la théorie physique*, d'une haute portée scientifique, est une œuvre d'art, par la vie et la passion qui l'animent. Diverses mo-

nographies, d'importants articles publiés par les Revues ont déjà montré l'intérêt qu'il apporte à l'histoire des découvertes, à la succession et à l'enchaînement des idées. Voici, cette fois, un gros livre d'histoire scientifique, qui va d'Aristote à Descartes; et c'est de l'Histoire proprement dite, l'œuvre d'un érudit qui remonte aux textes, qui compulse et compare les manuscrits, qui les date, qui examine les écritures, reconnaît la main des copistes, propose des corrections de texte, devine ou suppose des noms propres, qui, sous Charasto, Karisto, Baracto, Heriston, découvre un Charistion qui est à la fois l'inventeur de la balance romaine et la balance romaine elle-même, comme Vernier est aussi un instrument de mesure, qui fait naître à Nemi Jordanus nemorarius ou de Nemore; c'est aussi l'œuvre d'un philosophe qui se plaît à remonter aux origines, à suivre la filiation et la transformation des idées. Sans la belle sincérité de M. Duhem, qui est toujours nue, je dirais aussi que c'est l'œuvre d'un polémiste, tant on sent, malgré tout, déborder chez lui la joie d'élever ce que l'on a rabaissé, d'établir l'importance de la doctrine d'Aristote, d'apercevoir, dans la *nuit* du moyen âge, non seulement des lueurs éparses, mais des flambeaux qui ont passé de main en main, de rendre justice aux inconnus et aux anonymes, de montrer ce que les plus illustres doivent à ces inconnus, de s'attaquer aussi aux gloires les plus éclatantes. Mais l'historien, dans son impartialité, doit-il être si froid qu'il ne se passionne pas pour la vérité?

Quoi qu'il en soit, voici la conclusion à laquelle arrive M. Duhem :

« La science mécanique et physique dont s'enorgueillissent à bon droit es temps modernes, découle, par une suite ininterrompue de perfectionnements à peine sensibles, des doctrines professées au sein des écoles du moyen âge; les prétendues révolutions intellectuelles n'ont été, le plus souvent, que des évolutions lentes et longuement préparées; les soi-disant renaissances que des réactions fréquemment injustes et stériles; le respect de la tradition est une condition essentielle du progrès scientifique. »

Citons, d'après M. Duhem, quelques passages détachés, tirés d'Aristote, ou attribués à lui :

« Quelle que soit la puissance qui produit le mouvement, ce qui est moindre et plus léger reçoit d'une même puissance plus de mouvement.

... En effet, la vitesse du corps le moins lourd sera à la vitesse du corps le plus lourd comme le corps le plus lourd est au corps le moins lourd. »

« Le poids qui est mû est au poids qui meut en raison inverse des bras du levier; toujours, en effet, un poids mouvra d'autant plus aisément qu'il sera plus loin du point d'appui. La cause en est celle que nous avons déjà mentionnée : la ligne qui s'écarte davantage du centre décrit un plus grand cercle. Donc, en employant une même puissance, le moteur décrira un parcours d'autant plus grand qu'il est plus éloigné du point d'appui. »

« Si un mobile se meut à la fois de deux mouvements tels que les espaces parcourus en même temps soient dans un rapport invariable, le mobile se meut en ligne droite suivant la diagonale du parallélogramme qui a pour côtés deux lignes dont les longueurs sont dans ce rapport. »

« ... En sorte qu'une trajectoire courbe est engendrée lorsque le mobile est animé de deux mouvements dont le rapport ne demeure point fixe d'un instant à l'autre. »

Il y a là, incontestablement, des vues scientifiques. Mais Aristote n'est pas géomètre et il sait mal tirer les conséquences de ses principes. Quant à l'axiome de la proportionnalité de la force à la vitesse, M. Duhem en poursuit la longue histoire et en montre l'influence jusque sur Galilée. « Le grand géomètre, dit-il, continuait à relier ses déductions à l'ancienne Dynamique, à celle qu'Aristote avait professée, que l'École avait commentée, dont Léonard de Vinci, puis Cardan avaient tiré tant d'importantes conséquences. Jamais Galilée n'a cessé de croire à l'axiome péripatéticien qui proclamait la proportionnalité entre la force et la vitesse; l'opinion qui en fait le créateur de la Dynamique moderne est une légende controuvée. »

Un Chapitre très intéressant et très érudit sur les sources alexandrines de la Statique du moyen âge conduit M. Duhem aux conclusions suivantes :

« Le fragment *De ponderoso et levi* attribué à Euclide, les quatre propositions nommées *Liber Euclidis de ponderibus secundum terminorum circumferentiam*; le traité *De canonio*, le *Liber Karastonis* publié par Thâbit ibn Kurrah : tels paraissent être, avec les *Quæstiones mechanicæ* d'Aristote, les seuls débris de la Statique hellène qui aient été utilisés par les géomètres du moyen âge. De la méthode d'Archimède, ils ne paraissent pas avoir eu connaissance; ils ne l'ont jamais suivie en leurs travaux.

Quant aux Arabes, ils semblent n'être intervenus que pour transmettre aux Occidentaux les reliques de la science alexandrine. »

Nous savons peu de chose de Jordanus de Nemore, qui vécut sans doute vers le XIIIe siècle et dont l'influence sur le développement ultérieur de la Statique semble avoir été considérable; il paraît avoir été très fécond et avoir joui, dès le XIIIe siècle, d'une assez grande réputation pour que l'on ait mis sous son nom des travaux qui ne lui appartiennent pas. La Bibliothèque nationale possède un excellent manuscrit des *Elementa Jordani super demonstrationem ponderis*, dont M. Duhem montre l'importance pour l'histoire de la Statique : il suggère une ingénieuse hypothèse d'après laquelle Jordanus aurait écrit ce petit Traité pour servir d'introduction au *De canonio*, livre grec qui ne nous est connu que par une traduction latine, due peut-être à Jordanus lui-même et dont l'objet est la solution du problème suivant : Quel poids faut-il suspendre à l'extrémité du petit bras d'un fléau de romaine pour corriger l'excès de pesanteur du grand bras et pour pouvoir raisonner sur cet instrument comme si le fléau était une ligne sans poids ?

« Ce qui fait l'intérêt principal de cette Introduction, ce qui la distingue de tous les écrits précédemment étudiés, sauf des Μηχανικὰ προβλήματα, ce qui la rapproche jusqu'à un certain point de ce dernier Ouvrage, c'est que la décomposition du poids suivant diverses directions y joue un rôle essentiel.

» Jordanus considère un mobile assujetti à descendre suivant un chemin vertical et il introduit dans ses raisonnements, comme représentant la seule force efficace, la composante du poids selon la direction de la trajectoire; cette composante, il la nomme la *pesanteur relative à la situation* du mobile, *gravitas secundum situm*. La relation quantitative qui unit cette gravité relative au poids proprement dit, Jordanus ne la connaît point : il énonce seulement une règle qualitative : Plus la trajectoire est oblique, plus est faible la *gravitas secundum situm*. D'ailleurs, pour comparer l'obliquité de diverses trajectoires, il faut prendre sur ces trajectoires des chemins de même longueur et évaluer la descente verticale à laquelle ils correspondent; celui qui correspond à la plus petite descente verticale est le plus oblique. »

Il est assez curieux de voir Jordanus, dans l'application de ce principe, entrevoir un instant, au moins comme une lueur très fugitive, la méthode infinitésimale. Il n'est pas moins intéressant

de trouver dans sa démonstration de la loi de l'équilibre du levier un appel implicite, mais incontestable, au principe que Descartes prendra pour fondement de la Statique et qui, grâce à Jean Bernoulli, deviendra le principe des déplacements virtuels : « Ce qui peut élever un certain poids à une certaine hauteur peut aussi élever un poids k fois plus grand à une hauteur k fois plus petite. »

La Bibliothèque nationale contient dans son fonds latin (n° 7378 A) un Recueil de pièces disparates qui semblent être les unes du XIIIe, les autres du XIVe siècle, et dont l'une, qui commence par les mots *Incipit liber Jordani de ponderibus*, se compose, en réalité, de trois textes distincts : le premier est un commentaire, dans le sens péripatéticien, des recherches de Jordanus, commentaire qui semble avoir eu plus d'influence qu'il n'a d'importance mathématique; le second, au contraire, qui a été édité en 1565 par Curtius Trojanus, sur un manuscrit légué par Tartaglia, est une œuvre considérable au point de vue scientifique : M. Duhem en désigne l'auteur inconnu sous le nom de *Précurseur de Vinci*. M. Duhem analyse soigneusement cette œuvre et montre, en particulier, comment on y trouve la notion de *moment*, la solution correcte du problème de l'équilibre pour le levier coudé et sur le plan incliné.

« La démonstration (que M. Duhem cite tout au long) est calquée sur celle que Jordanus a donnée de la loi d'équilibre du levier : elle met en jeu le même postulat implicite : *Ce qui peut élever le poids* P *à la hauteur* H *peut aussi élever le poids* $\frac{P}{\lambda}$ *à la hauteur* λH. Après avoir donné à Jordanus une preuve convaincante de la loi d'équilibre du levier droit, ce postulat a permis au Précurseur de Léonard de Vinci de résoudre les deux problèmes du levier coudé et du plan incliné. La fécondité de ce principe se manifeste donc clairement dès le XIIIe siècle; jusqu'à nos jours, elle ne cessera plus de produire ses conséquences. Ce principe est la véritable origine de la méthode des variations virtuelles dont l'ampleur et la puissance font l'admiration des physiciens modernes. Né des méditations de Jordanus et du Précurseur de Léonard de Vinci, il se développera en l'œuvre de Léonard, de Guido Ubaldo, de Galilée, de Roberval, de Descartes, de Jean Bernoulli, pour prendre son plein épanouissement dans les écrits de Lagrange et de F.-Williams Gibbs. »

Le Traité des poids de Biagio Pelacani ou Blaise de Parme, que

M. Duhem analyse ensuite, n'a guère d'intérêt que parce qu'il s'est trouvé l'un des canaux par lesquels la Mécanique du moyen âge est parvenue jusqu'à Léonard de Vinci, qui a réfuté sur des points essentiels les erreurs de Jordanus et de Blaise de Parme.

Nous voici arrivés à la Renaissance : à Léonard de Vinci, « au grand initiateur de la pensée moderne », sur lequel il revient à deux fois, M. Duhem consacre de belles et nombreuses pages. Comment ne pas s'émouvoir devant la fermentation continuelle de ce grand esprit, telle que nous la montre le peu qui nous reste de lui, devant les vues profondes et perçantes, les éblouissements, les obscurcissements, les hésitations, les retours en arrière, les bonds en avant que nous révèlent ses carnets de notes, les pages détachées de ses manuscrits ? M. Duhem analyse ses recherches sur le levier, les poulies, les moufles, le plan incliné, reproduit ses schémas et les parties les plus importantes de son texte, montre comment il utilise de mieux en mieux la notion de moment, nous fait soupçonner qu'il a entrevu le théorème de la composition des moments; mais il y a plus.

« Une revision des notes de Léonard, entreprise postérieurement à l'impression de notre Chapitre II, a appelé notre attention sur quelques feuillets du manuscrit E de la Bibliothèque de l'Institut (¹); l'inspection de ces feuillets confirme pleinement l'hypothèse que nous avions émise: Léonard a connu et employé ce théorème :

» *Si l'on considère deux forces concourantes et leur résultante, le moment de la résultante par rapport à un point pris sur l'une des deux composantes est égal au moment de l'autre composante par rapport au même point.*

» Dans les raisonnements de Léonard, les deux composantes sont les tensions de deux cordes, tensions dont la résultante est directement opposée à un poids que supportent les deux cordes.

» A maintes reprises, le grand artiste applique le théorème que nous avons énoncé à un poids N suspendu au milieu B d'une corde dont les extrémités A, C sont sur une même horizontale. Du point A, il abaisse une perpendiculaire AF sur la corde CB ou sur son prolongement et une autre perpendiculaire AD sur la verticale du point B. Il déclare que la tension de la corde CB et le point N maintiendraient en équilibre un corps rigide

(¹) Les manuscrits de Léonard de Vinci, publiés par Ch. Ravaisson-Mollien. Manuscrits E de la Bibliothèque de l'Institut. Paris, 1883.

formé des deux bras de levier *potentiels* AF, AD, si ce corps était simplement susceptible de tourner autour du point A. Comme d'ailleurs Léonard, nous l'avons vu au Chapitre II, sait exprimer la condition d'équilibre d'un tel corps *circonvolubile*, qui est l'égalité des moments des poids et de la tension par rapport au point A, il obtient de suite le théorème que nous avons énoncé ci-dessus. »

M. Duhem cite divers passages dont la netteté ne laisse guère de place au doute.

Il analyse ensuite minutieusement les recherches de Léonard sur le plan incliné, ses étonnantes intuitions, qui lui font apercevoir un moment la règle du parallélogramme des forces, rejetée malheureusement ensuite. Il conclut ainsi :

« Grâce aux réflexions de Léonard de Vinci, ajoutées aux œuvres de l'École de Jordanus, il n'est guère, en Statique, d'idée essentielle qui n'ait été clairement aperçue et formulée au moment où s'ouvre le XVIe siècle. Combien il s'en faut, cependant, que cette science soit, dès lors, définitivement constituée ! Les vérités qui, pour la composer, doivent se souder les unes aux autres en un corps de doctrine sont encore éparses et disséminées; elles apparaissent mêlées à beaucoup d'erreurs; la clarté des postulats exacts qui doivent justifier ces vérités n'est pas encore perçue par des yeux trop accoutumés aux fausses évidences.

» Le XVIe siècle tout entier et le début du XVIIe siècle suffiront à peine à faire le tri entre les théorèmes vrais et les propositions erronées, à dissiper les malentendus nés d'un langage non encore fixé, à faire disparaître les fausses évidences, à montrer l'accord de vérités qui semblaient contradictoires, à retrouver, en un mot, ce qui était déjà inventé au XIIIe siècle. »

Les points qu'a établis M. Duhem, avec un luxe de détails qui, je crois, convaincront tous ses lecteurs, sont assurément très importants : la valeur des écrits de Jordanus et de son école, où il convient de ranger celui que M. Duhem appelle le Précurseur de Léonard de Vinci, leur influence sur Léonard, le prodigieux génie de celui-ci, tout cela me semble hors de doute. Y a-t-il eu ensuite une coupure ? Galilée, Stevin, Roberval, Descartes ont-ils constitué une Science vraiment nouvelle, et qui leur appartenait en propre ? Ont-ils connu les recherches antérieures, les ont-ils continuées en se les appropriant en partie ? M. Duhem n'hésite guère à se prononcer pour la dernière alternative, et il apporte ici des preuves très fortes, là des présomptions sérieuses. Il est bien certain que Cardan et Tartaglia ont pillé ces manuscrits de Léonard,

dont M. Duhem nous conte la lamentable histoire; ils ont d'ailleurs apporté leur contribution propre à la science en formation. Que Tartaglia ait connu l'écrit du Précurseur, c'est ce qui n'est pas douteux, puisque c'est sur un manuscrit légué par Tartaglia que cet écrit a été publié. Benedetti, qui, le premier peut-être, a su démontrer que des corps de même substance et de volume différent doivent tomber avec la même vitesse, semble bien avoir profité aussi, plus qu'il ne le dit, des écrits de ses précurseurs. Mais Galilée, Stevin, Roberval, Descartes? Ici M. Duhem n'apporte que des présomptions.

« ... Or comment admettre que Galilée ait ignoré l'œuvre de ce grand géomètre inconnu (*le Précurseur*)? Les cinq éditions des *Quesiti et inventioni diverse,* le Recueil des *Opere* du même auteur, le *Jordani opusculum de ponderositate,* imprimé par Curtius Trojanus, l'ont publiée à sept différentes reprises. Cardan, Guido Ubaldo, Benedetti ont critiqué cette œuvre, qu'ils attribuent à Jordanus. Cette œuvre, enfin, est lue par les disciples de Galilée... »

Ces cinq éditions des *Quesiti* reviendront plusieurs fois, à propos d'autres que Galilée. Sans doute, M. Duhem ne donne pas ses présomptions comme des preuves; son respect de la vérité scientifique est hors de cause, mais on sent combien il serait heureux de convaincre le lecteur : ce qu'il dit des mauvaises habitudes des savants et de la façon dont ils prenaient, sans le dire, leur bien où ils le trouvaient n'est guère contestable, et je crois, comme lui, que les habitudes, sur ce point, se sont fortement améliorées; lui-même, toutefois, à propos de Roberval, je crois, montre avec quelle légèreté Descartes lisait, quand il lisait : cela n'excuse ni l'orgueil de Descartes, ni son impertinence, et ne prouve pas qu'il ait tiré tout de lui-même : cela permet de penser cependant qu'il n'avait pas nécessairement lu les livres dont on avait fait cinq éditions; j'imagine aussi qu'il passait beaucoup de temps à réfléchir et qu'il avait parfois plus de satisfaction à suivre sa propre pensée que celle des autres. Chacun de nous connaît des gens qui ont cette manie, peu modeste, et qui ne trouvent pas, dans leur génie, l'excuse qu'avait Descartes. Au reste, je ne sais pourquoi j'ai pris la défense de ce dernier, plutôt que d'un autre. Mais je tenais à faire ressortir la thèse du Livre de M. Duhem, indiquée dans les quelques lignes que j'ai citées au

début : si rare qu'elle ait été, la science du moyen âge n'a point, d'après lui, été une lumière inutile, qui s'est éteinte dans la nuit : elle a guidé et éclairé ceux que l'on regarde comme les créateurs de la science moderne. Je n'ai nullement qualité pour discuter cette thèse, dont l'intérêt n'est pas contestable. Naturellement, elle n'excite pas M. Duhem à exalter ces créateurs : dans le Chapitre consacré à Galilée, et dont j'ai déjà cité quelques lignes, nous voyons celui-ci plus pénétré de la doctrine aristotilicienne qu'on ne se le figure habituellement; et nous pouvons suivre, grâce à de nombreuses et d'intéressantes citations, l'évolution de sa pensée. L'une de ces citations, au moins, montre chez lui une tendance à substituer au principe erroné d'Aristote, concernant les vitesses, le principe vrai des *déplacements virtuels :* le progrès est à coup sûr capital, bien que cette tendance ne soit pas suffisamment nette, et qu'elle ne se manifeste que « d'une manière incidente, en de rares occasions »; si elle s'était manifestée aussi clairement chez le Précurseur. M. Duhem n'en aurait-il pas éprouvé une satisfaction plus vive ?

La plupart des écrits dont il a été question jusqu'ici peuvent être rattachés à l'influence aristotélicienne. Stevin, par sa façon de raisonner, par ses habitudes de logicien méticuleux, se rapproche plutôt d'Archimède. M. Duhem fait ressortir le caractère original de la solution que Stevin a donnée du problème du plan incliné, au moyen de son collier de boules, et qui est fondée sur l'impossibilité du mouvement perpétuel. C'est d'ailleurs cette solution qui a conduit Stevin à la règle du parallélogramme. M. Duhem appuie sur ce que le principe de l'impossibilité du mouvement perpétuel ne se fonde pas sur la pure logique, et qu'il n'est pas par lui-même un postulat évident.

« Où donc Stevin a-t-il puisé cette confiance absolue dans l'axiome de l'impossibilité du mouvement perpétuel, sinon dans les raisonnements de Cardan, raisonnements que Cardan lui-même a empruntés à Léonard de Vinci ? Sans doute Stevin ne mentionne qu'un seul Ouvrage de Cardan, l'*Opus novum de proportionibus;* mais alors qu'il a lu attentivement et critiqué ce dernier Ouvrage, comment ignorerait-il le *De subtilitate,* dont la vogue a été si grande ? »

Si Stevin a formulé la règle de la composition des forces, sa

démonstration est longue et embarrassée. C'est Roberval qui, le premier, apporte une démonstration claire. Quant à Descartes, voici comment M. Duhem caractérise son œuvre :

« La grandeur qui, dans la Statique de Descartes, joue le rôle essentiel, le produit du poids d'un corps par la longueur dont ce corps s'est abaissé, a déjà été rencontrée par Stevin et par Galilée; mais cette rencontre a été fortuite et passagère; ni le géomètre belge, ni le géomètre italien n'ont signalé l'importance de cette grandeur: l'École de Jordanus, Roberval et Heerigone ont fait jouer un rôle essentiel, en certaines de leurs démonstrations, au produit du poids par son abaissement vertical, sans proclamer cependant que toute la Statique pouvait être ramenée à la comparaison de pareils produits; Descartes, le premier, a vu en ce produit le concept fondamental de la Mécanique; par là, il est, sinon le véritable, du moins le plus influent promoteur de la notion du *travail*, autour de laquelle pivote toute notre Science actuelle de l'équilibre et du mouvement.

» Ses efforts pour préciser cette notion de travail et la distinguer de la notion que Mersenne et Desargues confondaient avec elle, ont contribué, pour une large part, à définir exactement la notion de *force*, telle que nous l'entendons aujourd'hui; car c'est celle-ci qui hantait l'esprit de ses contradicteurs.

» Descartes a saisi et marqué nettement le caractère infinitésimal du principe des déplacements virtuels; il a affirmé, ce que nul n'avait explicitement énoncé avant lui, l'obligation d'appliquer toujours ce principe à un déplacement infiniment petit issu de l'état d'équilibre; il en a conclu l'équivalence de liaisons qui correspondent à un même chemin virtuel infinitésimal; par là, il a donné à ce principe sa forme définitive.

» On objectera peut-être que la Statique dont il a tracé le plan manque de généralité; il n'y considère d'autres forces que des poids. Ce défaut de généralité n'est qu'apparent; pour raisonner sur une force quelconque, tous les géomètres du XVIIe siècle, Stevin, Galilée, Roberval, la remplacent par un fil tendu dans la direction où elle doit agir, qui passe sur une poulie et soutient un poids égal à la force que l'on doit exercer; par cet artifice, la Statique du poids comprend la Statique tout entière. En fait, au moyen de cet artifice, un géomètre pourra, sans le moindre effort, tirer, du principe énoncé par Descartes, le principe des déplacements virtuels sous la forme même que Bernoulli communiquera en 1717 à Varignon; il est infiniment probable que ce procédé est celui-là même qui suggérera à Bernoulli sa découverte; et lorsque Lagrange, dans sa *Mécanique analytique*, le proposera comme un moyen propre à établir le principe des déplacements virtuels, il ne fera, sans doute, que reprendre la méthode de l'inventeur. En sorte que le principe formulé par Descartes renferme d'une façon implicite, mais toute prochaine, l'axiome duquel nous savons aujourd'hui déduire toutes les lois de la Statique.

» La Statique de Descartes est donc le fruit mûr qu'a produit une longue

végétation. Pour retrouver la graine d'où cette végétation est issue, il nous a fallu remonter bien haut le cours des temps; il nous a fallu recueillir, à l'origine du XIIIe siècle, les enseignements de l'École de Jordanus. A partir de ce germe, engendré par la Science occidentale en sa première jeunesse, nous pouvons suivre chacun des accroissements, chacune des transformations, par lesquelles la science de l'Équilibre s'est graduellement développée. Et lorsque enfin elle parvient, en la mécanique cartésienne, à donner son fruit mûr, nous pouvons marquer la provenance de chacune des enveloppes, de chacun des tissus qui composent ce fruit.

» A la formation de cette statique cartésienne, quelle a été l'exacte contribution de Descartes ? Il lui a donné, assurément, l'ordre et la clarté qui seront l'essence même de sa méthode, qui caractérisent si parfaitement son génie éminemment français. Mais, non content d'imposer une forme à la science de l'Équilibre, en a-t-il accru la matière ? Y a-t-il ajouté quelque vérité inconnue avant lui ? D'un tel apport, nous chercherions en vain la trace. En la Statique de Descartes, il n'est aucune vérité que les hommes n'aient connue avant Descartes. »

J. T.

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE.

Blythe (W.-H.). — *On models of cubic surfaces.* In-8°, 116 p., London, Clay. 4 sh.

Bucherer (A.-H.). — *Elemente der Vektor-Analysis. Mit Beispielen aus der theoret. Physik.* 2. Aufl. In-8°, VIII-103 p. Leipzig, Teubner. Relié 2 m. 40 pf.

Carslaw (H.-S.). — *Introduction to infinitesimal Calculus.* In-8°, London, Longmans. 5 sh.

Dostor (G.). — *Éléments de la théorie des déterminants, avec applications à l'Algèbre, la Trigonométrie et la Géométrie analytique.* 2e édit. (nouveau tirage). In-8°, XXXIII-362 p. avec fig. Paris, Gauthier-Villars. 8 fr.

1re Partie

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

GIBBS (J. Willard). — Elementary Principles in Statistical Mechanics, Developed with especial Reference to the Rational Foundations of Thermodynamics, Yale Bicentennial Publications. New-York, Scribner and Sons; London, Arnold; 1902.

Peut-être les lecteurs du *Bulletin* ne s'étonneront-ils pas trop de l'époque tardive à laquelle ils liront le compte rendu des Elementary Principles. Non seulement (est-il besoin de le dire?) ce livre n'est point de ceux que l'on analyse hâtivement; mais, d'autre part, les questions qu'il traite ont été vivement agitées dans ces derniers temps; les idées défendues par Gibbs ont fait l'objet de nombreuses controverses; les raisonnements par lesquels il les a appuyées ont, eux aussi, subi la critique. Il me paraît intéressant d'étudier son œuvre à la lumière de ces controverses et en discutant ces critiques.

Gibbs craignait que sa Mécanique statistique ne semblât trop physique aux mathématiciens, trop mathématique aux physiciens. Nous ne ferons qu'énoncer un truisme en disant que ce scrupule exprime une des qualités précieuses de l'Ouvrage. La nécessité d'associer, de la manière la plus intime possible, deux branches de la Science qui s'étaient trop longtemps perdues de vue, n'est plus à démontrer, et il faut espérer qu'elle continuera à être comprise.

En fait, les physiciens ont déjà apprécié le livre de Gibbs et l'ont utilisé. On ne saurait mettre en doute son importance au point de vue des mathématiciens. Ceux-ci connaissent encore insuffisamment les théories cinétiques, où il semble que leur activité pourrait si utilement s'exercer. Non seulement ils ont besoin d'y être initiés; mais il ne leur est pas indifférent d'y être introduits par un des leurs, d'y trouver un guide qui d'abord s'appelle Gibbs et, ensuite, leur parle leur propre langue : on sait qu'à

cette fusion des différentes branches de la Science dont nous rappelions tout à l'heure l'importance, la discordance des points de vue auxquels elles se placent et la différence des éducations qu'elles supposent sont un obstacle souvent plus sérieux que la multiplicité des connaissances qu'elles embrassent.

La *Mécanique statistique* est, en somme, une question purement mathématique. Elle n'est autre chose que l'application du calcul des probabilités à la mécanique, que la dynamique d'un grand nombre de systèmes régis (dans le cas le plus simple) par les mêmes équations, mais avec des circonstances initiales différentes. Ce qui est observable et, par conséquent, important, c'est la valeur moyenne de telle ou telle quantité, fonction de l'état du système. A cette recherche, on substitue, avec Maxwell, celle du nombre de systèmes pour lesquels la quantité ainsi envisagée est (à un instant donné quelconque) comprise entre des limites données. Ce nombre sera, en général, très grand, si grand que, par un raisonnement logiquement absurde, fécond et rarement trompeur en fait (du moins lorsqu'on n'entend pas le poursuivre jusque dans ses dernières conséquences), on applique la loi des grands nombres, même lorsque les limites dont il s'agit sont infiniment rapprochées.

Que seront, individuellement, les systèmes S auxquels s'appliqueront ces considérations? Gibbs, à l'exemple de plusieurs de ses prédécesseurs, fait abstraction de toute supposition particulière à leur égard : il part des équations canoniques d'Hamilton sous leur forme la plus générale, avec les coordonnées de position q_1, q_2, ..., q_n et les *moments généralisés* p_1, p_2, ..., p_n substitués aux vitesses.

Il y a là autre chose qu'une généralisation toute théorique. D'une part, on ne sait encore trop sous quelle forme on arrivera à se représenter ces éléments matériels ou électriques, dont les évolutions compliquées seront chargées de rendre compte des propriétés des corps naturels.

D'autre part, les principes de la mécanique, eux-mêmes, sont en train de se recodifier : voici que la masse n'est plus une constante, mais une fonction de la vitesse. Une seule chose semble devoir subsister. Les nouvelles équations pourront, comme les anciennes, être déduites du calcul des variations; la nouvelle mé-

canique admettra, elle aussi, un *principe de moindre action*, que l'on s'est déjà occupé de formuler ([1]).

Or cela suffit pour que les équations canoniques continuent à être valables.

Gibbs les considère d'une manière presque exclusive : il ne fait jouer qu'un rôle tout épisodique au cas particulier où il s'agit de points matériels isolés. Par là, son travail gagne singulièrement en importance. Il gagne aussi en simplicité : j'entends cette vraie simplicité qui consiste à débarrasser la question de tous les éléments inutiles. Je ne crois pas qu'une autre forme d'exposition soit aussi propre à montrer aux mathématiciens ce qu'ils ont surtout intérêt à savoir : la voie qu'ils doivent suivre pour le progrès de cette théorie qui est de leur domaine et qui s'est fondée sans leur concours. A la lecture des *Elementary principles*, cette voie se dégage clairement : c'est le développement des principes que la théorie générale des équations différentielles et la mécanique analytique doivent à M. Poincaré.

Tout d'abord, la notion d'*invariant intégral*, qui, dans les *Méthodes nouvelles de la Mécanique céleste*, a reçu les belles applications que l'on sait, a été mise dès l'abord à la base de la mécanique statistique. Les trois premiers Chapitres de l'Ouvrage qui nous occupe sont un commentaire de cette double proposition :

1° L'unité est un multiplicateur des équations canoniques;
2° On connaît donc un invariant intégral de ces équations.

Cet invariant intégral est le *volume* dans la terminologie de M. Poincaré. Gibbs lui donne le nom d'*extension en phase*. Une *phase* est un état du système S, caractérisé par sa position et ses vitesses, autrement dit, par les valeurs de $q_1, q_2, \ldots, q_n; p_1, \ldots, p_n$ et que l'on peut, par conséquent, représenter par un point dans l'espace E_{2n}, à $2n$ dimensions. Il arrivera d'ailleurs, en général, que ce point ne pourra pas occuper une position absolument quelconque dans l'espace E_{2n}, mais devra se trouver dans une certaine région limitée R_0 de cet espace. L'extension en phase est relative

---

([1]) *Voir*, entre autres, deux Notes récentes présentées à l'Académie des Sciences de Paris, l'une par MM. E. et Fr. Cosserat, l'autre par M. Langevin.

à une portion quelconque R de R_0 : c'est l'intégrale

$$\int\int\cdots\int_R dq_1\ldots dq_n\, dp_1\ldots dp_n.$$

Si l'on donne la position du point représentatif au temps t, on détermine implicitement, par cela même, sa position à un autre instant quelconque t'. Si l'on prend, pour le premier point, successivement chacun de ceux de la région R, le second point décrira une nouvelle région R'. Celle-ci a même extension en phase que la première : l'extension en phase est invariante dans le temps (sur une même série de trajectoires).

Mais Gibbs attire l'attention sur une autre propriété que possède ce même symbole et qui, moins remarquable sans doute que la première, n'en est pas moins des plus importantes. L'extension en phase est aussi invariante par rapport au système de coordonnées employé. Quel que soit le choix des q_i, du moment que les p_i sont choisis en conséquence, les extensions en phase sont conservées. On peut donc parler de *régions dynamiquement équivalentes* (1) de l'espace à $2n$ dimensions, ce qui n'aurait pas de sens absolu sans la propriété d'invariance dont nous parlons (ce qui n'aurait aucun sens, par exemple, si les équations n'étaient pas canoniques).

On peut aller plus loin : Gibbs opère sur les positions seules, ou sur les vitesses seules, comme il a opéré sur l'ensemble des deux. Il peut ainsi définir une *extension en vitesse* et une *extension en configuration*.

Si étroitement liées à l'extension en phase que soient les deux notions précédentes, c'est intentionnellement que Gibbs en ajourne l'étude à son sixième Chapitre. Il doit d'abord aller au plus pressé, au but principal du livre et introduire les notions statistiques sur lesquelles il raisonnera.

Grâce à la convention qui permet d'appliquer la loi de grands nombres à un élément infinitésimal, on représentera le nombre des systèmes S contenus (à un instant donné) dans une extension en phase donnée (c'est-à-dire dont le point représentatif est dans une

(1) L'extension en phase est une notion de dynamique (et non de cinématique), quoique les forces n'y entrent pas, parce qu'elle dépend des masses.

région donnée R de l'espace E_{2n}) par l'intégrale

$$\int\int\cdots\int_R D\,dq_1,..dq_n\,dp_1...dp_n,$$

où D est une fonction des q et des p, *la densité en phase*. La connaissance de la valeur de D en fonction de $q_1, \ldots, q_n; p_1, \ldots, p_n$ donne la distribution absolue des systèmes donnés entre leurs différentes phases. En général, la distribution relative, proportionnelle, intervient seule, et il suffit d'étudier, N étant le nombre total des systèmes S, le quotient

$$P = D/N$$

ou *coefficient de probabilité, la probabilité en phase* étant l'intégrale

$$\int\int\cdots\int P\,dq_1...dq_n\,dp_1...dp_n.$$

Enfin, la quantité

$$\eta = \log P$$

est l'*indice de probabilité*.

L'équilibre moyen d'un ensemble de systèmes S tel que celui que nous considérons (ou, plus généralement, le régime permanent) correspond à un *équilibre statistique,* caractérisé par ce fait que la distribution en phase est indépendante du temps.

Toutes les quantités que nous avons définies plus haut, probabilité en phase, coefficient de probabilité, indice de probabilité, qui sont invariantes dans le temps sur chaque trajectoire, sont des intégrales des équations différentielles. La condition d'équilibre statistique est que ces intégrales ne contiennent pas t.

Gibbs considère, en particulier, la distribution dans laquelle l'indice de probabilité est une fonction, et même une fonction linéaire, de l'intégrale la plus simple, l'énergie : c'est la *distribution canonique,* qu'il introduit ainsi *a priori* (et qui, d'après ce qui précède, reste telle dans tout système de coordonnées).

La probabilité en phase est-elle, en réalité, une fonction de l'énergie seule? C'est, on le sait, une des questions qui ont été le plus fréquemment discutées dans cette théorie. Gibbs montre

comment elle se pose. Un exemple simple fait voir que, au moins *a priori*, des intégrales autres que l'énergie peuvent jouer le même rôle et régler les valeurs de la probabilité en phase. Il suffit de considérer des points matériels placés, soit dans une sphère donnée, soit (c'est le cas considéré par Gibbs) entre deux sphères limites. Ce dernier résultat s'obtient pour Gibbs, en faisant intervenir des forces centrales attractives ou répulsives suffisamment intenses; on peut aussi imaginer que ces sphères soient des parois solides le long desquelles les points considérés se réfléchissent (élastiquement). L'hypothèse de Gibbs a l'avantage de faire intervenir des vibrations qui offrent une certaine analogie avec la théorie des radiations. Mais, dans l'un ou l'autre cas, les moments cinétiques par rapport à trois axes rectangulaires issus du centre sont constants pour chaque point : rien n'empêchera de concevoir la probabilité en phase comme dépendant, non seulement de l'énergie, mais encore de ces trois moments ou du moins (si l'on veut sauvegarder l'isotropie de l'ensemble) de la somme de leurs carrés.

Rien ne dit même que les choses ne se passent pas de façon plus compliquée encore. Tout ce que l'on peut dire en considérant, *a priori*, la probabilité en phase, comme une fonction régulière est qu'elle constitue une intégrale *uniforme* des équations de la dynamique. Mais l'*uniformité* n'a pas ici le même sens que dans les recherches de M. Poincaré, puisqu'il ne s'agit plus nécessairement de fonctions analytiques. Elle serait encore, cependant, de nature à restreindre d'une manière notable la catégorie des expressions acceptables pour P.

Quant au mode de continuité de cette fonction, nous ne possédons qu'une proposition capable (autant qu'on en peut juger actuellement) de nous éclairer à ce sujet : c'est celle que M. Poincaré a déduite de la notion d'invariant intégral. D'après ce théorème, que Gibbs énonce à une autre occasion (au Chap. XII), les solutions des équations de la dynamique possèdent, en général, la *stabilité à la Poisson*, c'est-à-dire que le point représentatif M repasse, en général, une infinité de fois dans le voisinage (aussi immédiat qu'on le veut) de toute position M_0 déjà occupée. Les trajectoires pour lesquelles cela n'a pas lieu sont *exceptionnelles :* leurs points de départ ne peuvent former une extension en phase finie, si petite soit-elle.

Si le point M pouvait s'approcher de M_0 dans toute direction tangente à la multiplicité $\varepsilon =$ const. (ε désignant l'énergie), il n'y aurait point d'autre intégrale uniforme possédant des dérivées partielles que l'intégrale des forces vives. Si M pouvait, dans le cours du mouvement, passer infiniment près de tout point de cette même multiplicité, l'intégrale des forces vives serait la seule intégrale continue.

Ce n'est pas, bien entendu, ce qui a lieu dans l'exemple choisi tout à l'heure. Mais n'en est-il pas autrement dans des problèmes moins particuliers? Cette question, de pur calcul intégral, reste sans solution mathématique. Les physiciens sont obligés de la discuter comme bien d'autres (voire, de l'aborder expérimentalement, ainsi que l'a fait Lord Kelvin), sans attendre notre jugement sûr, mais par trop tardif.

Après avoir indiqué que la distribution canonique peut ne pas être la seule imaginable, Gibbs retourne à cette distribution canonique, pour y mettre en évidence les propriétés que possède le coefficient de ε dans l'expression linéaire

$$\eta = \frac{\psi - \varepsilon}{\Theta}$$

(qui représente l'indice de probabilité η) ou plutôt l'inverse Θ de ce coefficient. *Ces propriétés sont toutes analogues à celles de la température absolue.* Par exemple, la quantité Θ se comporte comme la température dans le mélange de deux ensembles, et, surtout, elle donne lieu, lorsqu'on la multiplie par $d\varepsilon$ et qu'on tient compte, s'il y a lieu, des forces extérieures, à une équation toute semblable à celle que donne le principe de Carnot. Le rôle de l'entropie (changée de signe) est alors joué par la valeur moyenne $\bar{\eta}$ de l'indice de probabilité.

C'est seulement à ce moment que sont introduites les notions, mentionnées tout à l'heure, d'extension en configuration et d'extension en vitesse et, comme conséquence, l'étude des valeurs moyennes (ainsi que des anomalies correspondantes) qui se rapportent non plus seulement à l'énergie totale, mais à l'énergie cinétique et à l'énergie potentielle, considérées isolément.

Les quantités Θ, $-\bar{\eta}$, que nous avons vues jouer respectivement, dans une distribution canonique, le rôle de la température

et celui de l'entropie, sont-elles seules susceptibles de correspondre à ces deux notions? Et, si la distribution cesse d'être canonique, sommes-nous sûrs que l'entropie sera encore (aux signes près) la valeur moyenne de l'indice de probabilité?

La réponse, au moins sous réserve de considérations nouvelles, est négative. On peut former d'autres expressions de formes différentes, coïncidant d'ailleurs avec les premières dans le cas de la distribution canonique et possédant, elles aussi, les deux propriétés auxquelles nous avons trouvé plus haut une analogie thermodynamique.

Pour arriver à ce résultat, Gibbs considère toutes les phases pour lesquelles l'énergie est inférieure à une certaine quantité ε. L'extension en phase V de l'ensemble des états ainsi définis est une certaine fonction de ε, dont la dérivée est désignée par ε^{Φ}.

Il est clair que les fonctions V et Φ de l'énergie ε ont une importance toute particulière. Leur introduction dans l'étude d'un ensemble canonique revient à classer les systèmes S dont il se compose d'après leurs énergies, à le décomposer, autrement dit, en parties dont chacune contient les systèmes pour lesquels cette énergie est comprise entre des limites données. Si ces limites sont suffisamment rapprochées, on peut regarder, dans l'intervalle qu'elles déterminent, l'énergie comme constante, et l'on a la distribution que Gibbs appelle *microcanonique,* sorte d'élément de la distribution canonique.

Ce sont des combinaisons diverses des fonctions V et Φ qui, dans le cas de la distribution microcanonique, puis même (par la considération de leurs valeurs moyennes) en dehors de ce cas, fournissent des quantités substituables à Φ et à $-\overline{\eta}$.

Il reste à traiter la question la plus importante et la plus délicate que soulève cette étude de la distribution en phase. Que devient cette distribution au cours du mouvement, lorsqu'on part d'un état quelconque : tend-elle, par exemple, à se rapprocher de la distribution canonique ou d'une distribution présentant des propriétés analogues?

C'est, en somme, la question vitale pour les théories cinétiques. Le paradoxe qui s'y rattache et qui semble, au premier abord,

ruiner par avance toute théorie de cette nature est, en effet, le suivant. Comment, en partant d'équations de la dynamique, toutes *réversibles,* parviendra-t-on à des lois *irréversibles,* à la croissance de l'entropie?

Gibbs se demande donc (après avoir établi une série de propriétés de minimum qui doivent jouer un rôle essentiel dans cette étude) ce que devient le mouvement lorsqu'on le considère à de longs intervalles de temps. Il commence par indiquer, à cette occasion, le théorème de M. Poincaré sur la stabilité à la Poisson auquel nous faisions allusion un peu plus haut.

La contradiction apparente qu'il s'agit d'élucider est ensuite posée, sous une forme nouvelle et plus frappante encore que celle qui a été rappelée tout à l'heure. Cette entropie qui doit être croissante, les calculs précédents conduisent, comme le veut d'ailleurs la théorie de M. Boltzmann, à la rattacher à la valeur moyenne de l'indice de probabilité. Or nous savons que cet indice est constant dans le temps. Comment sa valeur moyenne pourra-t-elle varier de quelque manière que ce soit?

La comparaison employée par Gibbs montre avec évidence comment des singularités de cette nature s'introduisent nécessairement dans l'application des considérations statistiques à des systèmes dont les différentes parties se mélangent entre elles.

Soit un vase de forme cylindrique (dont, pour simplifier, on pourra considérer exclusivement une section droite), et supposons ce vase rempli de deux liquides A et B de telle manière qu'à l'origine des temps ces liquides soient distribués par secteurs : par exemple, deux diamètres perpendiculaires seront supposés diviser le cercle en quatre parties dont deux opposées contiendront exclusivement du liquide A et les deux autres du liquide B.

Imaginons maintenant que les différentes couches circulaires concentriques dont est composé le milieu soient animées chacune d'un mouvement de rotation, mais avec des vitesses angulaires différentes. Si nous suivons dans son mouvement une portion quelconque du liquide A, par exemple, son volume ne changera pas, et sa densité restera également invariable. La connexion de ce volume ne sera même modifiée à aucun moment.

Cependant, une portion déterminée quelconque de l'espace intérieur au vase, si petite qu'elle soit et qui, à l'origine, renfermait

exclusivement du liquide A ou du liquide B, renfermera, pour peu qu'on suive le mouvement pendant un temps suffisamment prolongé, un mélange des deux fluides, mélange sensiblement homogène ([1]) pour t suffisamment grand. En particulier la densité, tout invariante qu'elle soit, ne sera plus nulle part celle de A ou celle de B, mais aura pris une valeur intermédiaire.

Si l'on suit le mouvement à partir de l'origine, on verra cette densité s'égaliser; l'homogénéité du liquide (et il est clair qu'on pourrait, de bien des manières, définir un nombre qui serve de mesure à cette homogénéité) ira d'une manière générale croissant.

Le parallélisme est, on le voit, complet avec le phénomène qui est en question pour la quantité $\bar{\eta}$, et, plus loin, Gibbs sera conduit à préciser et à montrer, comme Boltzmann, que cette quantité doit être décroissante.

Seulement, comme l'a remarqué M. Brillouin, il ne faut pas se hâter de se féliciter de la concordance qui existe entre les résultats des deux auteurs. Ils ont, en réalité, des sens différents, et l'on pourrait même être tenté de les regarder comme presque contradictoires.

L'analyse de M. Boltzmann ([2]) repose essentiellement sur l'intervention des *chocs :* la condition nécessaire et suffisante pour qu'elle soit valable est que ces chocs se produisent en grand nombre : il en résulte même qu'elle peut être applicable dans un intervalle de temps très court, si le nombre des molécules est assez considérable pour cela.

Gibbs ne considère pas les chocs : nous sommes arrivé au XII[e] Chapitre de son Ouvrage sans qu'il y ait fait la moindre allusion. Ses démonstrations concernent des ensembles composés de systèmes sans action les uns sur les autres, ensembles *différents,* par conséquent, de ceux de Boltzmann. Elles font intervenir, au lieu des chocs, des phénomènes de mélange analogues à ceux auxquels nous avons fait allusion tout à l'heure pour le cas des liquides. Quel que soit le nombre des systèmes, elles ne s'appliquent qu'à un intervalle de temps $t'-t$ relativement long, assez long

---

([1]) Ou, du moins, dont la densité n'est fonction que de la distance au centre.

([2]) *Voir* Leçons sur la théorie des gaz, t. I.

pour que deux systèmes S très voisins au temps t puissent correspondre, au temps t', à des points représentatifs très différents, ou inversement.

Malgré cela, nous verrons plus loin que l'identité des deux conclusions n'est probablement pas fortuite, qu'elle est, au contraire, dans la nature des choses. Mais ceci nous amène à un sujet important, aux objections qu'à l'exemple de M. Brillouin ([1]) beaucoup de physiciens ont opposées à ces idées de Gibbs et de Boltzmann.

Il est reproché tout d'abord à la démonstration de M. Boltzmann de ne considérer l'effet des chocs que sur les vitesses et de supposer constamment l'homogénéité parfaite en ce qui regarde les positions, alors que cette homogénéité (à supposer qu'elle existât à un instant quelconque) serait manifestement détruite aux instants suivants par le mouvement lui-même. On introduirait ainsi constamment l'inorganisation parfaite (à savoir, l'homogénéité) à un point de vue, et c'est ainsi qu'au bout du compte cette inorganisation paraîtrait être la tendance générale du mouvement, tendance qui n'existerait nullement en réalité. En un mot, l'analogie de Boltzmann, radicalement fausse, ne serait pas une réponse à la contradiction signalée plus haut.

M. Brillouin écarte à plus forte raison le raisonnement de Gibbs, image plus grossièrement approchée de la réalité que celui de Boltzmann et qui même, nous l'avons vu, porte sur des phénomènes essentiellement différents.

Je serais, pour ma part, tenté de donner raison à Gibbs et à Boltzmann contre mon savant ami M. Brillouin. Je vais essayer ici d'expliquer pourquoi et de faire à sa critique pénétrante une réponse que le lecteur ne s'étonnera sans doute pas de trouver longue.

Remarquons d'abord que la question est double. La conclusion contestée se compose de deux parties, une négative et une positive. Elle exprime :

1° Que l'objection tirée de la réversibilité des équations du pro-

---

([1]) Notes pour la traduction française des *Leçons sur la théorie des gaz* de Boltzmann, Paris, Gauthier-Villars, 1901-1905.

blème n'est pas valable, qu'elle ne prouve pas l'impossibilité de lois finales irréversibles;

2° Qu'en fait, de telles lois irréversibles existent, et qu'une certaine quantité (dont on donne l'expression) va, en général, en croissant.

Or, tant qu'on se borne à affirmer la première partie, c'est-à-dire à prétendre que la seconde est *possible*, il ne paraît guère y avoir de doute. Dans ce cas, en effet, il importe peu que les raisonnements présentés correspondent à la réalité physique; il suffit qu'ils portent sur des phénomènes logiquement concevables. Dès lors, les déductions de Gibbs et de Boltzmann ne sont pas, à ce point de vue, atteintes par les objections précédentes. On peut, au reste, se dispenser d'examiner longuement la question en recourant aux exemples les plus simples, tels que celui des projectiles, la pesanteur étant considérée comme un champ de forces constant en grandeur et en direction. Là encore, les équations du problème sont réversibles et, cependant, si un certain nombre de tels projectiles sont lancés *au hasard*, qui doutera que, d'une manière globale, ils n'aillent en descendant?

Soit encore un système sans forces accélératrices dépendant de deux paramètres ρ, θ, et dont la force vive est donnée par

$$2T = f(\rho)\left(\frac{d\rho}{dt}\right)^2 + \Phi(\rho)\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2.$$

Supposons que $f(\rho)$, mais non $\Phi(\rho)$, soit très grand pour ρ voisin d'une certaine valeur ρ_0 et très petit partout ailleurs. Alors toute trajectoire de ce système restera, sauf pendant des intervalles de temps très petits et très éloignés, au voisinage de la ligne $\rho = \rho_0$. Dès lors, la différence $|\rho - \rho_0|$ sera, en général, décroissante pour tout intervalle de temps non très petit, si elle n'est pas initialement très petite. Il est clair qu'un tel résultat n'est irréversible qu'en apparence; il tient évidemment à ce que les régions du plan (ρ, θ) non très voisines de $\rho = \rho_0$ doivent être considérées comme très petites au point de vue du problème actuel : il y aurait, autrement dit, lieu de définir ici, d'une manière plus ou moins analogue à celle qui a été mentionnée plus haut, des *régions dynamiquement équivalentes*, et cette définition

serait très différente de la définition géométrique. Nous trouverons d'ailleurs plus loin le point précis par lequel pèche, dans des exemples de cette espèce, l'objection générale.

Employons auparavant une autre comparaison plus lointaine en apparence, beaucoup plus exacte, cependant, à mon avis. Considérons ce qui se passe lorsqu'on bat un jeu de cartes. C'est ce que l'on fait le plus généralement par une série de coupes successives, l'opération élémentaire consistant à diviser le jeu, d'une manière arbitraire, en trois parties et à intervertir l'ordre de deux consécutives d'entre elles. Il est clair qu'une telle manière de procéder est parfaitement réversible. Cependant, il est non moins évident qu'elle tend à une certaine régularisation du jeu. Si, par exemple, une fois les cartes battues, nous trouvions toutes les rouges d'abord et toutes les noires ensuite, nous croirions à une fraude. On peut mesurer cette régularisation par un nombre. Considérons, pour fixer les idées, le nombre V de cartes rouges suivies d'une noire. Il est aisé de calculer la valeur moyenne V_0 et V pour tous les ordres possibles dans lesquels les cartes peuvent être rangées. Si maintenant on part d'un jeu donné pour lequel V a une valeur déterminée V', la valeur probable de ce nombre après battage se rapprochera de V_0. J'entends par là que si, au lieu d'un seul jeu, nous en considérons un très grand nombre, tous identiques entre eux initialement, mais battus de toutes les façons possibles et au hasard, la moyenne des valeurs de V pour ces différents jeux sera comprise entre V' et V_0.

Cette opération du battage est tout à fait comparable aux phénomènes qui ont lieu pour nos systèmes S, même lorsqu'on reste au point de vue de Gibbs. La position P' d'un point représentatif au temps t' étant une fonction *pratiquement discontinue* de la position P du même point au temps t, lorsque l'intervalle $t' - t$ est très long (c'est-à-dire qu'un changement très petit de P produit un changement très grand de P'), tout se passe comme si, P étant donné, P' était plus ou moins indéterminé, comme si la donnée de P équivalait au lancé d'une roulette dont l'arrêt marquerait la position de P'. Cette roulette fonctionnerait aussi parfaitement que possible si l'indétermination de P' était absolue (sauf la condition $\varepsilon =$ const.).

C'est l'hypothèse dont nous avons parlé précédemment et sur

le bien fondé de laquelle on ne peut se prononcer avec certitude. Mais, même si elle était inexacte, il n'en est pas moins vrai que des points représentatifs primitivement rapprochés les uns des autres se dispersent avec le temps et que notre ensemble de systèmes S est ainsi *battu*.

Il est clair également que les chocs agissent dans le même sens et d'une manière beaucoup plus efficace encore. Nous voyons maintenant comment les procédés si différents de Gibbs et de Boltzmann peuvent conduire au même résultat. C'est ainsi que la valeur moyenne du nombre V considéré plus haut tendrait encore vers V_0 si l'on employait pour battre les cartes, au lieu du procédé auquel nous avons fait allusion, un autre quelconque de ceux qui sont usités dans ce but.

Ceci tient, remarquons-le, à ce que ces procédés, si différents qu'ils puissent être, ne favorisent pas une permutation plutôt qu'une autre. Il faudrait donc savoir de même, dans le cas de nos systèmes S, quelles sont les distributions également favorisées, et leur définition dépendra du mode de *battage*. Toutefois l'exemple même qui précède montre que cette définition pourra être la même pour des modes de battage très différents.

Passons à la seconde partie de la thèse, à la question de savoir si, en effet, la valeur moyenne de l'indice de probabilité changé de signe est, en général, croissante.

Du moment que M. Boltzmann est obligé d'attribuer aux molécules d'autres positions que celles qu'elles ont en réalité, son raisonnement doit, si l'on veut prendre les choses à la lettre, être considéré comme inexistant.

Disons tout de suite que Gibbs, de son côté, n'apporte pas de démonstration rigoureuse.

Non seulement il admet l'absence de chocs, mais (si j'ai bien compris son raisonnement) il ne tient pas suffisamment compte du phénomène même de mélange sur lequel il se base. Ce phénomène a, en effet, pour résultat, me semble-t-il, de rendre l'application de la loi des grands nombres aux extensions en phase infiniment petites (fondement premier de toute cette analyse), sinon douteuse du moins plus délicate que la brève rédaction de Gibbs ne le comporterait. La conclusion même serait de nature à faire mettre en doute la légitimité de la démonstration, en vertu

du principe *qui veut trop prouver ne prouve rien*. Elle n'admet, en effet, d'autres cas d'exception que ceux où il n'y a pas mélange, où les équations différentielles données définissent des trajectoires toutes stables au sens de M. Liapounoff : l'inégalité qui exprime le théorème serait alors remplacée par une égalité. Or il y a lieu, en l'espèce, de prévoir des cas d'exception beaucoup plus étendus, correspondant non à des formes particulières des équations différentielles, mais à certaines distributions initiales des systèmes S, et pour lesquels l'inégalité serait *renversée*.

Mais, si nous ne nous autorisons pas des raisonnements de Gibbs et de Boltzmann pour énoncer une affirmation rigoureuse, quelles présomptions ces raisonnements créent-ils? S'ils sont défectueux, dans quel sens pèchent-ils?

Devons-nous, par exemple, croire avec M. Brillouin qu'en introduisant l'homogénéité, on introduit du même coup l'inorganisation? Je ne le pense pas. Le sens du mot *inorganisé* demanderait à être défini; mais, en tout cas, la distribution la plus *inorganisée* possible n'est pas plus la distribution homogène que n points pris au hasard sur une circonférence n'ont de chance pour être les sommets d'un polygone régulier. Pour revenir à notre comparaison de tout à l'heure, un jeu de cartes, une fois battu, où les rouges seraient toutes réunies, ainsi que les noires, serait suspect; mais un jeu où il y aurait alternance parfaitement régulière entre les unes et les autres ne le serait pas moins. Si (ce qui est certain) une distribution homogène des systèmes S dans l'espace à n dimensions à un instant t est remplacée aux instants suivants par une distribution non homogène, celle-ci est, selon toute vraisemblance, beaucoup plus inorganisée que la première. Non seulement, si erreur il y a, c'est dans le sens de l'organisation, mais on pouvait être presque sûr, *a priori*, qu'il en serait ainsi. Une erreur de cette espèce a, en effet, toujours pour origine le désir de simplifier le raisonnement. Or simplifier, en Mathématique, c'est débrouiller un peu le chaos des hypothèses possibles : en un mot, c'est organiser.

Quant à une définition satisfaisante de l'inorganisation, elle est évidemment difficile à donner. Je proposerai, faute de mieux, l'une ou l'autre des deux suivantes.

On peut d'abord ([1]) considérer comme type de distribution inorganisée l'ensemble de toutes les distributions possibles des systèmes S. Une distribution déterminée D serait alors dite *inorganisée* si elle ne se distinguait en rien, *au point de vue de la question étudiée*, de la distribution totale dont nous venons de parler. On pourrait donc, dans le raisonnement, substituer cette dernière à la distribution considérée (par exemple, prendre, pour valeur d'une quantité qui dépend de la distribution D, sa valeur moyenne dans toutes les distributions possibles), et c'est la possibilité de cette substitution qui exprimerait le caractère inorganisé de D.

Dans cette conception, une distribution pourrait (conformément à la nature des choses) être considérée comme inorganisée relativement à telle question et comme organisée relativement à telle autre. Cela peut être le cas, par exemple, pour la distribution homogène (en position) des systèmes S : il est possible que l'organisation ainsi introduite soit sans influence dans la question qui nous occupe.

On peut aussi admettre simplement que les distributions *organisées* sont des distributions *exceptionnelles*, au sens adopté par M. Poincaré à propos de son théorème sur la stabilité à la Poisson. L'hypothèse, faite au cours du raisonnement, que le mouvement est inorganisé, reviendrait alors à dire, sans plus préciser, que le théorème est vrai, sauf pour certaines distributions exceptionnelles.

L'une ou l'autre des deux définitions précédentes suppose, d'ailleurs, la connaissance de ce que l'on doit appeler *distributions également probables*. Toutefois, on sait que la notion de distributions exceptionnelles est, en somme, indépendante de la convention adoptée à cet égard.

Mais la notion de mouvement inorganisé absolument parlant n'est pas la seule qu'il convienne d'introduire. Il y a lieu d'y joindre, suivant un procédé classique en calcul des probabilités, celle de mouvement inorganisé parmi ceux qui satisfont à des conditions données.

L'adaptation, à cet effet, des deux définitions données tout à

([1]) C'est ce que propose Gibbs à la fin du Chapitre XI (p. 251).

l'heure ne souffre évidemment aucune difficulté. Si j'insiste sur cette extension, c'est qu'elle permet, à mon sens, de mettre en évidence le véritable vice de l'objection que je m'étais proposé de discuter.

Celle-ci repose, en effet, sur ce fait que tout mouvement qui a existé du temps t au temps postérieur t' peut être renversé, le temps t' étant considéré comme antérieur à t et que, *inorganisé dans le premier cas, il le sera également* dans le second.

C'est ce dernier point qui ne me paraît pas exact.

Reprenons le cas des projectiles pesants, en supposant donnée, pour fixer les idées, la constante des forces vives. Considérons une série de ces projectiles lancés au hasard à une même hauteur h et dont, par conséquent, les mouvements ne seront pas exceptionnels, au moins à ce moment-là. Tous passeront ensuite à la hauteur h', celle-ci étant supposée inférieure, et inférieure d'une quantité très grande, à h. Mais, dans cette nouvelle situation de nos projectiles, leurs mouvements seront devenus exceptionnels : ils seront tous sensiblement verticaux et descendants.

L'explication du paradoxe est immédiate : au premier instant, nos mobiles ne sont pas exceptionnels parmi ceux qui sont, à cet instant-là, à la hauteur $z = h$; au second instant, ils sont exceptionnels parmi ceux qui (toujours avec la vitesse correspondant à la valeur donnée de la constante des forces vives) sont à la hauteur h' : question toute différente de la première.

Autrement dit, le fait, pour un mouvement, d'être organisé ou inorganisé dépend de ce que l'on suppose préalablement connu à son sujet.

Si donc H est une certaine fonction de la distribution des systèmes S, la propriété suivante :

La quantité H *est croissante si la distribution est inorganisée*

est susceptible d'un énoncé du genre de celui-ci, où je ne vois plus de prise pour l'objection de réversibilité :

Soient H_1 *et* $H_2 < H_1$ *deux valeurs de* H, T *un intervalle de temps convenablement choisi.*

Désignons par M_1 *les mouvements pour lesquels, pendant*

l'intervalle T, *la quantité* H *prend au moins une fois la valeur* H_1: *par* M_2 *les mouvements pour lesquels* (*au cours du même intervalle de temps*) H *prend au moins une fois la valeur* H_2; *par* M_3 *ceux qui satisfont à l'une et à l'autre des deux conditions précédentes; autrement dit, qui sont à la fois des mouvements* M_1 *et des mouvements* M_2.

Les M_3 *sont exceptionnels parmi les* M_1, *mais non parmi les* M_2.

Je ne doute guère, pour ma part, de l'existence d'un pareil énoncé après les déductions de Gibbs et de Boltzmann, et, si leur conclusion était erronée, l'erreur ne me paraîtrait pouvoir porter que sur l'expression de la quantité H.

Je me suis laissé entraîner à commenter longuement cette partie si essentielle de l'œuvre de Gibbs, et je craindrais d'abuser de l'attention du lecteur en insistant sur les trois derniers Chapitres.

Nous avons, au reste, déjà parlé du sujet (le plus important peut-être après celui qui vient de nous occuper) auquel se rapportent les Chapitres XIII et XIV : les définitions de la température et de l'entropie, dans l'hypothèse cinétique : définitions qui sont examinées (toujours, il est vrai, en admettant la distribution canonique ou microcanonique) à la lumière des principales propriétés des deux notions à définir.

Le dernier Chapitre de l'Ouvrage mériterait une attention spéciale. Gibbs y considère des ensembles (*grands ensembles*) dont les systèmes constituants sont eux-mêmes des ensembles (*petits ensembles*) de molécules. Le nombre de ces molécules varie, d'ailleurs, d'un *petit ensemble* à un autre, comme leurs positions et leurs vitesses, et, d'autre part, on admet l'échange des particules entre les différents *petits ensembles*. C'est dans les phénomènes de diffusion, particulièrement dans ceux qui ont lieu au contact des membranes semi-perméables, que Gibbs fait intervenir cette nouvelle catégorie d'ensembles, laquelle présente, on le voit, un caractère nouveau et important au point de vue théorique, puisque les différents systèmes partiels cessent d'être entièrement indépendants.

Telle est, dans ses grandes lignes, la dernière œuvre de Gibbs.

Il ne pourrait en exister de plus actuelle et de plus importante, en dépit de la modestie de son titre. Cette modestie n'est, d'ailleurs, pas de pure forme : elle correspond bien à la pensée arrêtée de l'auteur. Gibbs, nous l'avons vu, n'a pas abordé la théorie des chocs : il a voulu, sauf en son dernier Chapitre, se borner au cas le plus simple, celui où le mouvement d'un des systèmes n'est pas troublé par la présence des autres. Son but n'a pas été, en un mot, de remplacer des ouvrages comme les *Leçons sur la théorie des gaz* de Boltzmann, mais de leur servir de base, ainsi qu'aux autres études qu'on pourra entreprendre sur le même sujet. C'est en ce sens surtout, peut-être, qu'il a fait œuvre de mathématicien ; cette sorte de besogne préparatoire est, il faut nous l'avouer, la seule qui nous incombe le plus souvent. Encore si nous pouvions la mener assez vite pour fournir aux besoins des sciences de la nature ; mais rien que dans les *Principes élémentaires de Mécanique statistique,* combien de questions avons-nous rencontrées auxquelles notre théorie des équations différentielles est actuellement incapable de répondre ! Cependant, pour effacé qu'il soit, ce rôle n'en est pas moins essentiel. Les successeurs de Boltzmann ne pourront se dispenser d'utiliser l'Ouvrage de Gibbs : lui seul, en maintes circonstances, peut leur assurer l'instrument commode (et, avant tout, l'instrument sûr) dont ils ont besoin.

JACQUES HADAMARD.

(Extrait du *Bulletin of the American mathematical Society,* 2e série, t. XII.)

TANNERY (J.). — LEÇONS D'ALGÈBRE ET D'ANALYSE A L'USAGE DES ÉLÈVES DES CLASSES DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES. 2 vol. grand in-8° de 419 et 633 pages. Gauthier-Villars, Paris.

Le programme que développent ces *Leçons* comprend les équations du premier degré et les déterminants, les fonctions ration-

nelles d'une variable complexe, les séries, les dérivées d'une fonction de variable réelle, les fonctions symétriques et l'élimination, des notions de Calcul Intégral — en somme, les commencements de l'Analyse et les parties de l'Algèbre les plus indispensables dans les applications. Il ne s'agit pas, d'ailleurs, d'un enseignement d'Université spécialement dirigé pour former des mathématiciens.

Le nouveau Livre de M. Tannery est à la fois plus accessible et plus pratique que son Ouvrage, partout connu maintenant, *Introduction à la théorie des fonctions*. On peut indiquer, en gros, le caractère de ce Livre par les traits que voici : précision et rigueur dans l'exposé des idées fondamentales, abondance et netteté parfaite des explications, préoccupation de préparer une application correcte et sûre des règles, et d'exercer à la pratique des calculs numériques. Des passages imprimés en petits caractères relient aux parties plus élevées de la Science ce livre d'initiation et peuvent orienter les meilleurs esprits. 400 exercices sont proposés à la fin des Chapitres auxquels ils se rapportent. Je donnerai seulement quelques exemples pour éclairer un peu les indications précédentes.

Le premier Chapitre est consacré aux nombres irrationnels. M. Tannery part d'une séparation des nombres rationnels en deux classes, d'une coupure, comme on dit maintenant; il précise les définitions et explique les sens des opérations faites sur les symboles qui représentent des nombres définis à l'aide de coupures. L'introduction des exposants fractionnaires ou irrationnels conduit déjà à une généralisation d'après laquelle les deux classes à considérer ne sont plus formées seulement de nombres rationnels. Mais M. Tannery s'interdit la théorie des ensembles et même la définition de la limite supérieure d'un ensemble, notion pourtant commode pour abréger et rendre intuitives bien des démonstrations.

Dans le Chapitre sur les séries, il choisit les démonstrations les plus élémentaires, ne cite qu'en passant la condition de convergence de Cauchy; mais il démontre rigoureusement le théorème : Un nombre qui va constamment en croissant et qui reste inférieur à un nombre fixe tend vers une limite.

Il traite, avec détails et en donnant des exemples, la question : Calculer avec une approximation donnée la somme d'une série

dont on sait calculer les termes avec telle approximation qu'on veut. A propos des séries de fonctions, il ne traite pas, en général, des séries uniformément convergentes; mais il signale le cas où les termes de la série sont des fonctions continues de x et restent, dans un certain intervalle, inférieurs en valeur absolue aux termes, tous positifs et fixes, d'une série convergente. Cela lui permet de trouver directement la dérivée d'une série entière et de bien marquer l'analogie entre les propriétés des séries entières et celles des polynomes entiers.

A propos de l'intégrale définie, comment introduire la notion d'aire? Dès le début, l'auteur a montré que l'aire d'une courbe fermée peut être définie comme un nombre plus grand que l'aire de tout polygone intérieur, plus petit que l'aire de tout polygone extérieur, si l'on a établi que, parmi les polygones intérieurs à la courbe et les polygones extérieurs, il y en a dont les aires diffèrent aussi peu que l'on veut. Il lui est facile, après cela, de définir l'aire d'un trapèze curviligne et de démontrer l'existence d'une limite pour la somme qui conduit à une intégrale définie. Le paragraphe consacré à l'évaluation approchée d'une intégrale définie montrera bien jusqu'où l'auteur veut pousser les calculs numériques et la discussion de l'approximation.

La partie algébrique de ces *Leçons* contient, soit dans le texte, soit dans les additions en petits caractères, des éclaircissements sur bien des points délicats et des indications suggestives.

Les nombres complexes ont été introduits, dans le premier volume, avec les explications nécessaires et en faisant intervenir la notion de résidu d'un polynome entier en i par rapport au module i^2+1.

A propos des fonctions symétriques l'auteur distingue soigneusement les fonctions symétriques de n variables et les fonctions symétriques des racines d'une équation de degré n. Il montre que le calcul de ces dernières se ramène à celui des précédentes. (Dans le cas d'une fonction rationnelle la démonstration suppose écarté un cas singulier; mais, si l'on veut éviter cette restriction, il suffit de reprendre le raisonnement fait pour une fonction entière.)

Le problème : Examiner les cas particuliers et définir les solutions multiples dans la recherche des points communs à deux courbes algébriques sort du cadre de ces *Leçons*. On verra pour-

tant une façon méthodique et précise de traiter ce qui se rapporte aux points à l'infini communs aux deux courbes, et, pour les solutions multiples, l'introduction de l'équation tangentielle de l'ensemble des points communs.

Les *Leçons* de M. Tannery ne font double emploi avec aucun des Traités en usage sur les commencements de l'Algèbre et de l'Analyse; elles peuvent rendre de grands services à tous ceux qui étudient ces commencements, et apporter une aide très précieuse à ceux qui sont chargés de les enseigner.

E. LACOUR.

NIELS NIELSEN. — HANDBUCH DER THEORIE DER GAMMAFUNKTION. 1 vol. in-8°, X-326 pages. Leipzig, Teubner, 1906.

L'étude des fonctions particulières est une partie essentielle de la formation mathématique. M. Niels Nielsen, qui a publié naguère un excellent manuel des fonctions cylindriques, rend aujourd'hui un nouveau et éminent service en publiant un livre semblable sur la fonction Γ. Il me paraît conçu dans un excellent esprit : d'une part, l'étude des propriétés est poussée aussi loin que possible et l'auteur s'est attaché soigneusement à la forme des démonstrations, afin d'en faire ressortir la beauté et l'élégance; d'autre part, il a su mettre en lumière les idées générales et leur application aux faits particuliers qu'il avait en vue. Les deux points sont importants : les plus grands mathématiciens du siècle dernier, ceux mêmes qui ont le plus contribué à la formation de la théorie des fonctions, Gauss, Cauchy, Weierstrass, Hermite, se sont occupés avec prédilection de la fonction Γ, et l'on se plaît chez ceux qui, comme M. Niels Nielsen lui-même, M. Jensen ou M. Lerch s'adonnent encore à ce culte spécial, à retrouver ce sens esthétique qui, avec des formes très diverses, était si profond chez les maîtres dont je viens de rappeler les noms. D'un autre côté, la théorie des fonctions est maintenant assez avancée pour établir le lien entre des faits qui se présentaient sous des aspects très différents, et l'étude

des faits particuliers doit, chez celui qui s'adonne aux mathématiques, être un moyen de mieux connaître les propositions générales; au reste, l'histoire de la fonction Γ est liée à l'histoire de quelques-unes de ces propositions; par exemple à la décomposition d'une fonction entière en facteurs primaires. D'un autre côté, l'important théorème négatif que l'on doit à M. Hölder assigne à cette fonction une place spéciale.

Le livre de M. Niels Nielsen rendra donc de grands services aux étudiants; nul doute qu'il ne contribue aussi à l'accroissement de la théorie qui s'y trouve exposée : une des raisons qui éloignent évidemment les chercheurs d'une fonction telle que la fonction Γ, c'est qu'ils savent que cette fonction a déjà été très fouillée; c'est qu'il est difficile de consulter tous les Mémoires qui la concernent, et même d'en connaître les titres; c'est un travail de savoir ce qui a été fait et ce qui reste à faire; ce travail, grâce à M. Niels Nielsen, est maintenant rendu facile et l'on ne manquera pas de le trouver instructif.

L'auteur a eu la sagesse de se borner à la fonction Γ et aux fonctions qui lui sont liées immédiatement; il a écarté les généralisations et les analogies qui risquaient de le mener trop loin et jusqu'à des régions où l'on ne sait plus où s'arrêter.

Son livre est divisé en trois parties.

La première est la théorie analytique de la fonction $\Gamma(x)$ et des fonctions

$$\Psi(x) = \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}, \qquad \beta(x) = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{(-1)^s}{x+s} = \frac{1}{2}\left[\Psi\left(\frac{x+1}{2}\right) - \Psi\left(\frac{x}{2}\right)\right],$$

$$P_a(x) = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{(-1)^s}{s!}\,\frac{a^{x+s}}{x+s}, \qquad Q_a(x) = \Gamma(x) - P_a(x),$$

$$F(\alpha, \beta, \gamma, 1), \quad \ldots.$$

On y trouvera les divers développements en série et en produits infinis relatifs à ces diverses fonctions, et les propositions qui s'y rattachent. Le point de départ est la définition de la fonction $\Gamma(x)$, d'après Weierstrass, à savoir d'une fonction qui vérifie l'équation fonctionnelle

$$F(x+1) = x\,F(x)$$

et qui satisfait à la condition

$$\lim_{n=+\infty} \frac{F(x+n)}{(n-1)!\,n^x} = 1.$$

Trois Chapitres sur les facultés et les séries de facultés $\left(\text{par exemple, } \beta(x) = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{s!}{x(x+1)\ldots(x+s)} \frac{1}{2^{s+1}}\right)$ font prévoir le rôle que jouent ces séries dans la théorie de la fonction $\Gamma(x)$; c'est à elles que sera consacrée la troisième et dernière Partie du livre. Cette première Partie se termine par l'étude du théorème de M. Hölder.

La seconde se rapporte aux intégrales définies et aux propriétés qui s'y rattachent directement. Elle s'ouvre par un Chapitre très intéressant sur les intégrales du type

$$\int_0^1 \varphi(t)\,t^{x-1}\,dt,$$

où l'on suppose que la fonction $\varphi(t)\,t^{x-1}$ soit intégrable dans tout intervalle $(\sigma, 1)$ dont la borne inférieure est un nombre positif aussi petit qu'on le veut, et qu'il existe un nombre positif δ tel que, sous la condition $\sigma \leqq \delta$, on ait

$$\left|\int_0^\sigma \varphi(t)\,t^{x-1}\,dt\right| \begin{matrix} < \varepsilon \\ > \dfrac{1}{\varepsilon}, \end{matrix}$$

suivant que la partie réelle de x est positive ou négative; ε est un nombre positif aussi petit que l'on veut.

Une telle intégrale définit une fonction analytique de x dans tout le demi-plan qui s'étend à droite de l'axe des coordonnées. L'ensemble de ces fonctions constitue un groupe pour les opérations d'addition et de multiplication; il en est encore ainsi pour la dérivation, mais non pour l'intégration. On prévoit comment les propriétés établies dans ce Chapitre vont dominer la théorie des intégrales eulériennes et permettront d'en établir bien des points avec autant de facilité que de rigueur. Des intégrales de la même forme, mais avec d'autres conditions imposées à la fonction $\varphi(t)$, interviendront encore dans la troisième Partie, consacrée aux

séries de la forme

$$\Omega(x) = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{s!\, a_s}{x(x+1)\ldots(x+s)}.$$

On y trouvera, outre la théorie générale des séries de cette sorte, les développements formels donnés par Stirling et procédant suivant les puissances de $\frac{1}{x}$, et la démonstration du caractère asymptotique de ces développements. L'application aux fonctions $Q_a(x)$, $\Gamma(x)$, $\Psi(x)-\Psi(x+y)$, ... conduit à de très belles formules.

Le livre de M. Niels Nielsen se termine par une liste des principaux travaux relatifs à son objet; l'auteur parle modestement des recherches bibliographiques, certainement très considérables, auxquelles il a dû se livrer : il a d'ailleurs été plus large dans sa *Literaturverzeichnis* que dans son Traité, et il y a tenu compte de travaux qui dépassaient son objet propre. J. T.

HANCOCK (H.). — LECTURES OF THE CALCULUS OF VARIATIONS. 1 vol. in-4°; XVI-292 pages. Cincinnati, Post Office, 1904.

Le livre que publie M. Harris Hancock, où se trouve exposée la doctrine de Weierstrass sur le calcul des variations, est composé avec beaucoup d'art; l'auteur a mis en pleine lumière les étapes de cette longue route au bout de laquelle, d'exclusions en exclusions, on parvient à des conditions nécessaires et suffisantes pour l'existence d'un maximum ou d'un minimum, et a su répandre le même intérêt sur les diverses parties du chemin. Il procède du particulier au général, et prend le plus grand soin de montrer, sur des exemples simples, la nature du problème, les difficultés qu'on rencontre, et de reprendre ces mêmes problèmes, après avoir exposé les méthodes générales pour montrer comment elles s'y appliquent. Il est presque inutile de dire que M. Hancock spécifie

avec le plus grand soin les hypothèses et les restrictions qu'il fait sur les fonctions qu'il considère, et qu'il insiste, comme il faut, sur la nécessité de ces restrictions pour les conclusions : sans une parfaite précision dans les énoncés, l'exposition de la doctrine de Weierstrass n'aurait aucune valeur. Cette exposition est rendue aussi élémentaire qu'il est possible ; grâce à la façon dont M. Hancock a su ménager la pente et éclairer tous les détails, on s'étonne de la facilité avec laquelle on la suit. Les divers progrès réalisés dans la doctrine par Lagrange, Legendre, Jacobi sont exposés de manière à conduire naturellement au résultat final.

L'Ouvrage, qui se rapporte essentiellement aux fonctions de deux variables et au cas où ne figurent que les dérivées premières, est divisé en deux Parties. La première (p. 1-109) comprend douze Chapitres.

Le premier, qui peut être regardé comme une introduction, contient l'énoncé de six problèmes types : les quatre premiers sont relatifs à la surface minima de révolution, à la brachistochrone, aux lignes géodésiques, à la surface de révolution de moindre résistance ; les deux autres appartiennent à la catégorie des problèmes de maxima et de minima relatifs. Dans les onze Chapitres suivants les limites de l'intégrale seront supposées fixes.

Les Chapitres II-V sont consacrés à l'étude de la variation première, qui conduit à l'équation différentielle classique. La nature des solutions de celle-ci est étudiée dans les Chapitres VI et VII. On passe à la variation seconde dans le Chapitre suivant, où l'on montre que le signe de cette variation dépend d'une certaine fonction F, qui, pour qu'il y ait maximum ou minimum, doit garder un signe constant et ne pas s'annuler dans l'intervalle d'intégration. Dans les chapitres IX, X, XI s'introduit la notion et se poursuit l'étude des points *conjugués* que l'intervalle d'intégration ne doit pas dépasser pour qu'il y ait maximum ou minimum. On est ainsi parvenu à *trois* conditions nécessaires. Dans le Chapitre XII enfin, on arrive à la condition suffisante de Weierstrass, qui a été soigneusement préparée par les considérations du Chapitre précédent. Ce même Chapitre XII, outre l'application aux quatre problèmes du début, et un résumé très clair de l'ensemble des résultats obtenus, donne quelques indications sur l'extension et la généralisation de ces résultats.

La seconde Partie (p. 210-292) se rapporte aux maxima et minima relatifs; elle est divisée en six Chapitres. Le premier est consacré à la position de la question et à l'établissement des conditions nécessaires. Les deux suivants traitent du problème des isopérimètres, le Chapitre XVI de la recherche de la courbe de longueur donnée joignant deux points donnés et telle que le centre de gravité soit le plus bas possible; les deux derniers enfin traitent des conditions suffisantes.

Il semble que l'éditeur ait eu conscience du goût de M. Harris Hancock pour la clarté; la netteté du texte ordinaire, des formules et des figures donne l'impression d'un luxe sévère et simple, qui convient au sujet. J. T.

MUIR (Th.). — The theory of determinants in the historical order of development. Part I : General determinants up to 1841. Part II : Special determinants up to 1841. Seconde édition. 1 vol. in-8°, xi-491 pages. London, Macmillan, 1906.

M. Muir a consacré une bonne partie de sa vie scientifique à la théorie et à l'histoire des déterminants : on sait avec quel soin et quelle conscience il a dressé la liste des publications mathématiques qui se rapportent à ce sujet.

Le travail historique dont nous annonçons la seconde édition a tout ce qu'il faut pour faire autorité; on est rassuré en le parcourant et l'on sent bien que l'auteur n'a rien dû négliger qui ait quelque importance : la façon dont les travaux sont classés et analysés, les citations importantes extraites de ces travaux, donnent une idée complète des contributions essentielles apportées à la théorie par les différents auteurs; la filiation des idées en ressort. J'ajoute qu'un système de notations fort commode permet en quelque sorte de refaire, avec le livre de M. Muir, l'histoire d'un théorème, de ses démonstrations, de son développement et de ses généralisations. Des Tableaux très clairs font ressortir l'importance de la part contributive des divers auteurs.

On regrette sans doute que cette intéressante histoire s'arrête en 1841; mais, d'une part, à ce moment la théorie est faite, au moins dans ce qu'elle a d'élémentaire et de fondamental. D'un autre côté, il est sage de s'arrêter dans une histoire à un moment où le recul est suffisant pour qu'on puisse discerner, en toute sécurité, les résultats vraiment essentiels, et ceux qui ne sont que des détails plus ou moins importants. Enfin, après soixante ans, les auteurs des découvertes sont entrés dans l'histoire et l'on peut en parler librement : si l'on trouve parfois dans le livre de M. Muir quelques noms dont ceux qui les portaient sont morts récemment, c'est que la vieillesse de ceux-là a été aussi longue que glorieuse.

L'histoire des déterminants commence vraiment à Cramer, à celui qui a su observer, d'une façon précise, la loi de formation du dénominateur commun des expressions des inconnues d'un système d'équations. La lettre célèbre de Leibnitz au marquis de l'Hospital, qui n'a été publiée qu'en 1863, augmente, s'il est possible, la gloire du grand penseur; elle est caractéristique pour l'histoire de ses idées et de sa recherche passionnée de notations qui viennent en aide au raisonnement; elle n'a évidemment pas eu d'influence sur le développement de la Science. M. Muir partage les quatre-vingt-dix années qui suivent la publication de l'*Introduction à l'analyse des lignes courbes algébriques* (1750) en une suite de périodes assez bien caractérisées, où l'on suit avec un grand intérêt les découvertes de Bézout, Vandermonde, Laplace, Lagrange, Gauss, Binet, Cauchy, Jacobi. L'analyse des travaux de ces maîtres tient naturellement la plus grande place dans le livre de M. Muir; mais l'auteur a voulu rechercher ou retrouver tous ceux qui ont fait œuvre utile. Qui, sans lui, se souviendrait de Desnanot, censeur au Collège royal de Nancy? J. T.

MÉLANGES.

SUR LES SÉRIES DE FONCTIONS ANALYTIQUES;

Par M. P. MONTEL.

Les sommes de séries convergentes de fonctions analytiques de z ont des propriétés bien différentes suivant que le module de la somme $S_n(z)$ des n premiers termes de la série reste ou ne reste pas inférieur à un nombre fixe, le même pour toutes les valeurs de n.

Dans le premier cas, la somme de la série est toujours une fonction analytique et, on peut, en remplaçant par leur somme, des groupes de termes consécutifs, obtenir une nouvelle série qui converge uniformément vers la même fonction (1).

Lorsque les modules des sommes $S_n(z)$ ne sont plus bornés dans leur ensemble, les fonctions représentées par de telles séries ont une grande généralité, mais, dans chaque domaine, il s'en trouve un autre où la somme est analytique.

Pour que la somme de la série représente la même fonction analytique dans tout le domaine, il est nécessaire que cette somme soit continue et que, par conséquent, la convergence soit quasi-uniforme au sens de M. Arzelà (2), mais cette condition n'est pas suffisante en général : je vais montrer, par un exemple, qu'une série de polynomes en z peut représenter une fonction continue non analytique.

---

(1) On peut d'ailleurs substituer à la condition que le module de $S_n(z)$ soit borné, d'autres conditions analogues; par exemple, on peut supposer que le module de $S_n(z) - a$ reste supérieur à un nombre fixe, a étant une constante arbitraire; *voir* pour cette question : *Sur les suites de fonctions analytiques* (*Comptes rendus*, t. CXXXVIII).

(2) Je saisis l'occasion de rectifier une indication inexacte que j'ai donnée t. XXIV du *Bulletin*, p. 337, l. 15. La généralisation dont il est parlé à cet endroit a été communiquée par M. Arzelà lui-même en 1886 à la *Reale Accademia delle Scienze del Istituto di Bologna*. J. T.

Soit le carré OABC dont deux côtés de longueur égale à l'unité sont sur Ox et Oy et une suite dénombrable d'intervalles

$$u_1,\quad u_2,\quad \ldots,\quad u_n,\quad \ldots,$$

partout denses sur le segment OA et n'ayant, deux à deux, aucun point commun : l'ensemble des points qui ne sont pas à l'intérieur de ces intervalles est un ensemble parfait E. On peut, d'une infinité de manières, construire une fonction $\varphi(x)$ continue pour $0 \leqq x \leqq 1$, constante dans chaque intervalle u sans être constante sur tout le segment OA. Par exemple, si la mesure de l'ensemble E n'est pas nulle, on pourra prendre

$$\varphi(x) = \text{mesure de } \mathrm{E}(x),$$

en désignant par $\mathrm{E}(x)$ l'ensemble des points de E situés sur le segment (O, x).

Construisons sur les n intervalles

$$u_1,\quad u_2,\quad \ldots,\quad u_n,$$

comme bases, les n rectangles U_1, U_2, ..., U_n de côtés parallèles

Fig. 1.

aux axes et de hauteur égale à l'unité. Il y a sur la figure deux rectangles U_i, U_j que je suppose voisins.

Menons dans l'intérieur de chaque rectangle U des parallèles à Oy à des distances $\frac{1}{n}$ des côtés, nous définissons ainsi des rectangles U' qui sont couverts de hachures. Menons encore, toujours

à l'intérieur de U, des parallèles à Oy à la distance $\frac{1}{2n}$ des côtés et considérons les rectangles V, empiétant sur deux rectangles U voisins et dont les côtés parallèles à Oy sont ces dernières parallèles : appelons $\varphi(u_i)$, la valeur constante de $\varphi(x)$ dans l'intervalle u_i et $\varphi(V)$, une valeur de $\varphi(x)$ choisie parmi celles que prend cette fonction sur la base du rectangle V qui repose sur Ox.

Il existe un polynome $P_n(z)$ qui, dans chaque rectangle U'_i, est égal à $\varphi(u_i)$ à $\frac{1}{n}$ près et dans chaque rectangle V est égal à $\varphi(V)$ à $\frac{1}{n}$ près. Les polynomes

$$P_1(z),\quad P_2(z),\quad \ldots,\quad P_n(z),\quad \ldots,$$

ainsi définis, ont pour limite une fonction $f(z)$, égale à $\varphi(x)$ en tous les points du carré dont l'abscisse est x : en effet, si le point x est à l'intérieur d'un intervalle u, pour n assez grand, il sera dans un rectangle U' et $P_n(x)$ différera de $\varphi(x)$ de moins de $\frac{1}{n}$. Si le point x appartient à l'ensemble E, on peut prendre n assez grand pour que le rectangle V qui contient z empiète sur deux intervalles u_i, u_j, aussi voisins que l'on veut du point x et que, par conséquent, $\varphi(V)$ diffère de $\varphi(x)$ d'aussi peu que l'on veut. Comme $P_n(z)$ diffère de $\varphi(V)$ de moins de $\frac{1}{n}$, on voit qu'il a pour limite $\varphi(x)$.

Prenons maintenant la série de polynomes

$$Q_1(z),\quad Q_2(z),\quad \ldots,\quad Q_n(z),$$

dans laquelle

$$Q_1(z) = P_1(z),\qquad Q_2(z) = P_2(z) - P_1(z),\qquad \ldots,\qquad Q_n(z) = P_n(z) - P_{n-1}(z),$$

la somme de cette série étant la fonction continue $f(z)$, la convergence est quasi uniforme.

La démonstration précédente peut être facilement modifiée de manière que la fonction $f(z)$, au lieu d'être constante dans chaque rectangle U, soit égale dans ce domaine à une fonction analytique non constante.

M. Pompeiu, dans une Note parue récemment au *Bulletin des Sciences mathématiques,* a énoncé ce théorème que, pour qu'une

série quasi uniformément convergente de fonctions holomorphes représente une fonction holomorphe, il faut et il suffit qu'elle soit intégrable terme à terme : cette condition est bien suffisante, mais elle n'est pas nécessaire. Considérons, en effet, la fonction

$$\varphi(z) = 2n^2 z e^{-n^2 z^2}$$

qui tend vers o avec $\frac{1}{n}$ pour toutes les valeurs de z dont le carré a une partie réelle positive, en particulier pour toutes les valeurs réelles de z, et traçons trois rectangles de côtés parallèles aux axes de coordonnées et limités aux droites $x = \pm n$. Le rectangle I est en outre limité aux droites $y = \pm \frac{1}{2n}$, le rectangle II aux droites $y = \frac{1}{n}$, $y = n$, le rectangle III aux droites $y = -\frac{1}{n}$, $y = -n$. Il existe un polynome $P_n(z)$ qui, dans le rectangle I, diffère de $\varphi(z)$ de moins de $\frac{1}{n}$ en module, et dont le module ne dépasse pas $\frac{1}{n}$, dans les rectangles II et III. La série

$$Q_1(z), \quad Q_2(z), \quad \ldots, \quad Q_n(z), \quad \ldots,$$

formée comme plus haut, a pour somme o dans tout le plan : cette série n'est pas intégrable terme à terme. On a, en effet, sur le segment (o, 1) de l'axe des quantités réelles

$$\int_0^1 \varphi(z)\,dz = 1 - e^{-n^2}$$

et l'intégrale $\int_0^1 P_n(z)\,dz$, qui diffère de la précédente de moins de $\frac{1}{n}$, a pour limite 1 lorsque n croît indéfiniment.

1re Partie -

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

VIVANTI (G.). — THEORIE DER EINDEUTIGEN ANALYTISCHEN FUNKTIONEN. Umarbeitung unter Mitwirkung des Verfassers deutsch. herausgegeben von *A. Gutzmer*. 1 vol. in-8°, VI-512 pages. Leipzig, Teubner, 1906.

Nous avons déjà eu l'occasion de parler de la *Teoria delle funzioni analitiche* de M. G. Vivanti : c'est l'un de ces excellents manuels que publie la maison Hoepli, où les auteurs se sont attachés à résumer, aussi complètement que possible et sous une forme très condensée, les points essentiels de diverses théories. Parmi ces manuels, les uns ne contiennent guère que les résultats, disposés d'ailleurs dans un ordre méthodique, qui, avec quelques brèves indications, permet souvent au lecteur instruit de reconstruire les démonstrations; dans d'autres, comme dans la *Teoria delle funzioni analitiche,* ces démonstrations figurent; le manuel est un véritable traité. Toutefois, dans l'édition italienne, certains sujets avaient dû être écourtés; d'autre part, depuis l'époque (1901) où a été publiée la *Teoria,* des progrès importants ont été réalisés. M. Vivanti désirait naturellement reprendre, développer et compléter son œuvre.

De son côté, M. A. Gutzmer avait, depuis longtemps, l'intention de publier un livre analogue à celui de M. Vivanti : il a jugé préférable de consacrer ses soins à une édition allemande de ce dernier livre : cette édition n'est nullement une traduction, c'est un livre nouveau : l'auteur a retouché et même refait plusieurs paragraphes des deux premières Parties : la troisième, qui constitue un exposé systématique des découvertes récentes dans la théorie des fonctions entières, est entièrement neuve. Son manuscrit a d'abord été traduit par M. R. Kneschke; il a été étudié et discuté par MM. Gutzmer, Schoenflies et P. Stäckel et modifié en conséquence par M. Vivanti; ce dernier se plaît, dans sa préface, à reconnaître les services qui lui ont été rendus. La haute qualité

de l'œuvre primitive, la science de l'auteur et de ceux qui ont revu son travail, l'entente qui s'est ainsi établie entre les quatre savants, sont de sûrs garants de la valeur du présent livre, des services qu'il rendra et du succès qu'il ne peut manquer de rencontrer.

On remarquera, en particulier, le soin qui a été donné au vocabulaire.

Dans les parties de la Science qui sont encore en formation, il est inévitable que les différents chercheurs donnent parfois des noms différents à un même objet ou le même nom à des objets différents, parfois très voisins; on s'est efforcé ici de fixer le vocabulaire, en prenant grand soin d'indiquer les divers mots dont se sont servis les inventeurs, et le sens précis qu'ils leur ont attribué.

Par exemple, pour une fonction entière

$$f(x) = e^{g(x)} x^m \prod_{h=1}^{h=\infty} \left(1 - \frac{x}{c_h}\right) e^{\sum_{k=1}^{k=r_h} \frac{x^k}{h c_h^k}},$$

décomposée en facteurs premiers, le plus petit nombre entier p non négatif pour lequel la série $\sum_{h=1}^{h=\infty} \left|\frac{1}{c_h}\right|^{p+1}$ converge est le *genre* de la fonction pour MM. Laguerre, Poincaré, Borel, sa *hauteur* pour MM. V. Schaper et Pringsheim : M. Vivanti adopte le mot *rang;* il désigne sous le nom de *fonctions de première classe* les fonctions entières qui ont un rang (fini); les autres sont de seconde classe. Pour une fonction de rang p, on peut, dans la formule précédente, supposer tous les r_h égaux à p; lorsque le facteur $e^{g(x)}$ fait défaut, la fonction est dite *simple :* une telle fonction est dite *fonction primitive* par M. Pringsheim, *canonique* par M. Lindelöf. Pour M. Vivanti, la *hauteur* d'une fonction entière, dans laquelle on suppose que $g(x)$ soit un polynome, est le plus grand des deux nombres p, q où p est le rang de la fonction et q le degré du polynome $g(x)$; la même fonction est dite *normale* si l'on a $p < q$. Le nombre λ qui forme la coupure entre les nombres ρ pour lesquels la série $\sum_{h=0}^{h=\infty} \left|\frac{1}{c_h}\right|^{\rho}$ diverge et ceux pour lesquels elle converge est désigné par M. Vivanti sous le nom d'*indice* λ

(λ-index) de la fonction $f(x)$: c'est l'ordre réel de M. Borel, l'exposant de convergence de M. Schaper, l'exposant limite de M. Pringsheim. L'*indice* μ de la fonction entière $f(x) = \sum_{h=0}^{h=\infty} a_h x^h$ est, pour M. Vivanti, un nombre tel que des deux inégalités, où ε est un nombre positif arbitraire,

$$|a_h|^{\frac{1}{h}} < \frac{1}{h^{\mu-\varepsilon}}, \qquad |a_h|^{\frac{1}{h}} > \frac{1}{h^{\mu+\varepsilon}},$$

la première soit vérifiée pour tous les nombres h qui dépassent un nombre déterminé (dépendant de ε), tandis que la seconde inégalité est vérifiée pour certains nombres h, d'ailleurs aussi grands qu'on le veut : l'indice μ est l'*ordre* de la fonction pour M. Schaper. L'*ordre apparent* pour M. Borel, l'*ordre* pour M. Pringsheim, l'*indice* ν pour MM. Vivanti et Gutzmer est un nombre ν tel que des deux inégalités

$$M(\rho) < e^{\rho^{\nu+\varepsilon}}, \qquad M(\rho) > e^{\rho^{\nu-\varepsilon}},$$

où $M(\rho)$ est la plus grande valeur de $|f(x)|$ pour $|x| = \rho$, et où ε est un nombre positif arbitraire, la première soit toujours vérifiée pour les valeurs de ρ plus grandes qu'un nombre donné, tandis que la seconde est vérifiée pour certaines valeurs de ρ, d'ailleurs aussi grandes qu'on le veut. Le nombre ν est d'ailleurs l'inverse du nombre μ.

Ces exemples, que l'on pourrait multiplier, montrent que la terminologie est loin d'être fixée encore. On voit que M. Vivanti, lorsqu'il y a divergence entre les différents auteurs, adopte habituellement un terme qui n'est employé par aucun d'eux. Il ne contentera personne; mais, en mécontentant également tout le monde, il peut espérer rallier tous les suffrages. C'est le procédé recommandé par les partisans de l'*Esperanto :* souhaitons que ce procédé réussisse. Si même il n'en était pas ainsi, MM. Vivanti et Gutzmer n'en auraient pas moins rendu grand service, en rapprochant, comme ils ont fait, les dénominations employées par les divers auteurs.

Du reste, la bibliographie a été aussi particulièrement soignée. Les auteurs ont placé à la fin de leur *Theorie* une *Literatur-*

verzeichnis qui ne contient pas moins de 672 titres d'ouvrages, Mémoires ou Notes avec leurs dates. Dans le cours du livre, aux différents chapitres ou paragraphes, on trouve en note les noms des auteurs qui ont traité du sujet avec les numéros correspondants de la *Literaturverzeichnis;* un *Sachregister* et un *Namenregister*, qui renvoient aux pages du livre, permettent en outre de retrouver aisément le passage que l'on veut consulter, l'endroit où un auteur est cité. Ces diverses Tables contribuent à faire de cette *Theorie der eindentigen Funktionen* un instrument de travail commode et pratique.

Il est assurément inutile d'insister sur la rigueur et sur le caractère essentiellement arithmétique des démonstrations d'un livre qui est consacré au développement de la théorie de Weierstrass. Je me contenterai d'indiquer brièvement l'ordre et la nature des sujets traités.

L'ouvrage est divisé en trois Parties : la première (p. 1-50) résume les éléments de la théorie des ensembles, y compris les nombres transfinis : ces éléments sont présentés avec une grande précision logique. La deuxième Partie (51-227) est intitulée *Théorie générale des fonctions analytiques*. On remarquera, dans la partie élémentaire de cette théorie, l'usage que l'auteur fait de la valeur moyenne, par exemple pour démontrer le théorème de Weierstrass sur les séries uniformément convergentes

$$\sum_{h=1}^{h=\infty} f_h(x),$$

où les fonctions $f_h(x)$ sont des séries entières convergentes à l'intérieur d'une couronne limitée par deux cercles concentriques. Il pousse le scrupule jusqu'à écarter toute intervention explicite des propositions du calcul différentiel et intégral. Après avoir exposé le concept général de *fonction analytique* et après avoir montré, en particulier, la différence entre ce concept et celui d'une fonction définie par une *expression arithmétique,* c'est-à-dire par une série dont les termes sont des fractions rationnelles en x, il classe les fonctions analytiques uniformes d'après leurs singularités; il s'arrête ensuite sur les fonctions entières afin d'établir leur décomposition en facteurs primaires et les propositions qui se rapportent

à leurs racines ou à celles de leurs dérivées, propositions dont quelques-unes seront complétées dans la troisième Partie. Il établit enfin les expressions des fonctions uniformes qui correspondent à des singularités de plus en plus compliquées, pour aboutir aux expressions générales que l'on doit à M. Mittag-Leffler.

La troisième Partie (p. 228-463) contient les *Compléments à la théorie des fonctions analytiques*. C'est, comme on l'a déjà dit, une Partie entièrement neuve, où se trouvent réunies et mises en ordre les recherches récentes sur le sujet, en particulier sur les fonctions entières.

Après avoir développé les importantes propositions relatives à ces *indices* λ, μ, ν, dont il a été question plus haut, M. Vivanti traite du théorème de M. Picard et de ses généralisations; il reproduit, en la simplifiant sur quelques points, la belle démonstration que l'on doit à M. Borel. Il traite successivement de diverses généralisations des fonctions entières, des fonctions à espaces lacunaires, des séries divergentes, des questions que soulève le concept de prolongement analytique, des divers modes de représentation d'une fonction analytique par une *expression arithmétique*, au sens qui a été spécifié plus haut. Un paragraphe intitulé : *Relations entre les singularités de deux fonctions analytiques*, résume diverses propositions qui permettent, dans certains cas, de déduire les singularités d'une fonction donnée par un de ses éléments des singularités d'une ou de plusieurs autres fonctions données de la même façon. Il prépare l'important paragraphe final, qui constitue un exposé systématique des plus simples et des plus importants résultats obtenus sur cette question : Une fonction analytique étant donnée par un de ses éléments, reconnaître ses singularités. J. T.

CZUBER (E.). — VORLESUNGEN UBER DIFFERENTIAL- UND INTEGRAL-RECHNUNG. Erster Band, zweite, sorgfältig durchgesehene Auflage. 1 vol. in-8°, XIV-560 pages, 115 figures. Leipzig, Teubner, 1906.

Nous sommes heureux d'annoncer la seconde édition de ces Leçons, dont la clarté et la simplicité légitiment le succès. En dehors des améliorations de détail qu'un auteur soigneux trouve toujours l'occasion de réaliser quand il revoit au bout de quelques années un livre qu'il a écrit, M. Czuber signale comme additions à la présente édition les paragraphes qui concernent les fonctions hyperboliques et la définition des fonctions analytiques.

J. T.

THOMAE (I.). — GRUNDRISS EINER ANALYTISCHEN GEOMETRIE DER EBENE. 1 vol. in-8°, X-183 pages, 8 figures. Leipzig, Teubner, 1906.

Ce petit livre, qui n'a pas que le mérite de la brièveté, peut servir de manuel aux étudiants qui commencent l'étude de la Géométrie analytique. Il contient, avec des exemples traités d'une façon détaillée, la géométrie de la ligne droite et des faisceaux de droite (correspondance homographique, etc.), la théorie analytique de la ligne droite, du cercle et des coniques. On y remarquera le soin avec lequel sont traitées les questions qui comportent une construction géométrique; l'auteur estime avec raison, je crois, qu'on néglige trop souvent ce genre de questions dans l'enseignement élémentaire de la géométrie analytique, et qu'il convient d'habituer les étudiants à tirer parti des formules pour effectuer les constructions géométriques correspondantes. Je crois devoir encore signaler, au point de vue pédagogique, l'habitude qu'a adoptée M. Thomae pour les classifications et qui étonne au premier abord : il met toujours en avant le cas le plus exceptionnel

et procède, dans la classification, par ordre de généralité croissante; si, par exemple, il veut classer les coniques d'après la nature du centre, il mettra en avant le cas où le centre est doublement indéterminé et où, par conséquent, la conique se réduit à la droite de l'infini, comptée deux fois.

L'auteur a sans doute adopté ce système en constatant la façon dont les étudiants négligent les cas exceptionnels. J. T.

SIMON (M.). — Methodik der elementaren Arithmetik in Verbindung mit algebraischer Analysis. 1 vol. in-8°, 106 pages, 9 figures. Leipzig, Teubner, 1906.

On lira avec intérêt ce petit livre : c'est l'œuvre d'un homme qui a pratiqué, observé et qui a profondément réfléchi sur les problèmes relatifs à l'enseignement. Il résume un cours que l'auteur a fait en 1904 et où il a repris, d'un point de vue philosophique, l'ensemble des sujets, concernant l'Arithmétique et l'Algèbre, que l'on traite au gymnase, en insistant sur les idées essentielles et sur les méthodes, en donnant aussi quelques renseignements historiques importants. Il ne pourra manquer d'intéresser les jeunes gens qui ont reçu l'enseignement mathématique du gymnase, qui en ont profité, et qui sentent le besoin de le dominer; il sera utile aussi à ceux qui donnent cet enseignement, ou qui se préparent à le donner et qui pourront profiter de l'expérience, de la science et des réflexions de M. Max Simon. Malgré la différence des programmes et des habitudes, les mêmes problèmes pédagogiques se posent dans tous les pays : tous ceux qui donnent l'enseignement mathématique dans les établissements secondaires peuvent donc tirer parti de cette *Methodik*, d'autant que l'auteur entre dans le vif des questions; il ne craint pas, par exemple, d'indiquer sur certains sujets le nombre de leçons qu'il juge bon de leur consacrer.

M. Simon n'est pas de ceux qui se laissent entraîner par le *mouvement des ingénieurs*. Il tient pour la logique et la rigueur. Si

légitime que soit une tendance, ceux qui ont de bonnes raisons à lui opposer rendent, en donnant ces raisons, un service qu'il ne faut pas mépriser; ils forcent à réfléchir, à s'arrêter au besoin, à ne pas suivre les exagérations d'une mode, ils empêchent des excès que, dans le cas actuel, pourraient craindre ceux mêmes qui ne regardent pas l'utilité pratique d'une Science comme une mauvaise marque de sa valeur. Non, de l'enseignement scientifique, il ne faut pas bannir la Science, c'est-à-dire les idées, les lois, leur coordination, pour se réduire à une pure technique.

Tous les mathématiciens seront d'accord avec M. Simon sur la nécessité de faire bien comprendre aux enfants le sens des opérations fondamentales et leurs propriétés essentielles : sans cette base solide, il n'y a point d'enseignement mathématique et les indications que donne l'auteur à ce sujet sont excellentes; ils tomberont aussi d'accord avec lui sur le rôle central de l'idée de *fonction*, qu'il faut éveiller et éclaircir dès l'enseignement élémentaire. Mais est-il nécessaire de diriger cet enseignement en vue de la théorie des fonctions de Weierstrass?

M. Simon dira peut-être que ce n'est pas son but unique et qu'un enseignement rigoureux et logique vaut par lui-même, par la façon dont il contribue à une bonne formation de l'esprit. Cela est incontestable, si l'on ne tient compte que de ceux qui s'assimilent cet enseignement; ceux-là, sous un maître moins habile, seraient peut-être en petit nombre et l'on est en droit de penser, qu'à ceux-là mêmes, il n'est pas toujours nécessaire de montrer que les démonstrations sont logiquement parfaites, qu'elles sont *finies* et qu'il n'y manque rien : on peut, sans les satisfaire entièrement, éveiller leurs désirs logiques et s'efforcer de développer chez eux cette curiosité des faits et cet esprit d'intuition qui ne sont pas moins essentiels que le sens de la logique. Au gré de celui-ci ou de celui-là, les meilleurs maîtres pencheront toujours trop d'un côté ou de l'autre.

Quoi qu'il en soit, on ne manquera pas d'être frappé par l'élévation du programme que développe M. Simon. Il comprend la notion de nombre dans sa généralité, y compris les nombres irrationnels et les nombres complexes, la notion de limite, la résolution des équations jusqu'au quatrième degré, la définition des transcendantes élémentaires. La notion de nombre irrationnel est

présentée d'une façon très claire, en se plaçant au point de vue de M. Méray et de M. G. Cantor. On remarquera aussi le caractère logique de ce programme, qui donne l'impression d'une Science close, non d'un développement indéfini. Ce caractère est encore accentué par les deux pages où M. Simon parle de l'impossibilité de résoudre algébriquement en général une équation du cinquième degré, en sorte que, pour le lecteur, l'Algèbre, ou au moins la partie élémentaire de l'Algèbre, se termine bien au quatrième degré.

Qu'il me soit permis, à propos de l'équation du cinquième degré, de signaler l'inconvénient des renseignements historiques, même exacts et donnés par un savant très soucieux de dire la vérité. M. Simon s'exprime ainsi :

« La preuve que l'équation du cinquième degré n'est pas, en général, résoluble algébriquement, ..., repose sur ce théorème de Kronecker :

» *Une équation du cinquième degré, qui est irréductible et algébriquement résoluble, a, ou bien cinq racines réelles, ou bien une, jamais trois racines réelles et deux imaginaires.*

» Je renvoie, pour la démonstration, à l'*Encyclopédie des Mathématiques élémentaires* de M. H. Weber. »

Le théorème de Kronecker est fort intéressant en lui-même et il est certain, comme le montre M. Simon, qu'on peut former aisément des équations du cinquième degré, à coefficients entiers, irréductibles en vertu d'un théorème bien connu d'Eisenstein, qui ont trois racines réelles et deux imaginaires, qui ne sont donc pas résolubles algébriquement. Mais le lecteur qui ne sait que ce qu'on lui dit et à qui l'on n'a dit que la vérité, ne sera-t-il pas persuadé que c'est Kronecker qui a démontré l'impossibilité de la résolution algébrique des équations, au delà du quatrième degré? Le nom d'Abel n'a pas été prononcé. Il est vrai qu'on a évoqué quelques-uns de ces mathématiciens du moyen âge, inconnus hier, auxquels l'érudition moderne a rendu une tardive justice.

La citation même que je viens de faire m'oblige à revenir sur mes réserves antérieures; vraiment, elles tombent bien à faux pour ceux auxquels s'adresse M. Max Simon; ne faut-il pas, s'ils veulent

lire, à la fin du premier volume de l'excellente encyclopédie de MM. Weber et Wellstein, la démonstration du théorème de Kronecker, qu'ils aient auparavant acquis des idées précises sur les nombres irrationnels et les nombres complexes? Tout dépend du but que l'on assigne à l'enseignement secondaire. J. T.

ENCYCLOPÉDIE DES SCIENCES MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES, publiée sous les auspices des Académies des sciences de Göttingue, de Leipzig, de Munich et de Vienne avec la collaboration de nombreux savants. Édition française rédigée et publiée d'après l'édition allemande, sous la direction de *Jules Molk*. Tome I (quatrième Volume). CALCUL DES PROBABILITÉS. THÉORIE DES ERREURS. APPLICATIONS DIVERSES. Rédigé dans l'édition allemande sous la direction de *François Meyer*. Fascicule I. In-8°, 160 pages. Paris, Gauthier-Villars; Leipzig, Teubner, 1906.

Le premier fascicule du quatrième Volume du Tome premier de l'édition française de l'*Encyclopédie des Sciences mathématiques* vient de paraître : il peut donner une idée très nette de ce que sera cette édition française, du soin avec lequel elle est rédigée et dirigée. Tout le monde est d'accord sur le mérite de l'édition allemande; mais il n'est point d'œuvre de ce genre qui ne puisse être améliorée et, ici, les auteurs des articles originaux se sont prêtés, avec une extrême bonne volonté, à la recherche du *mieux*.

Les nouveaux articles sont dus à la collaboration des anciens auteurs et des savants français qui ont exposé le sujet traité par leurs devanciers. Les additions dues spécialement aux collaborateurs français sont, d'ailleurs, aisées à distinguer, puisqu'elles sont entre astérisques. On reconnaîtra, en feuilletant le présent fascicule, qu'elles sont considérables. On trouve, d'ailleurs, ici et là, des indications fournies par des savants étrangers, qui ont apporté leur quote-part à cette grande œuvre internationale ; ces indications figurent, selon les cas, soit dans le texte même de l'*Encyclopédie*, soit dans la *Tribune* qui sera jointe à chaque fascicule.

Cette *Tribune*, où « toute rectification et addition se rap-

portant à l'édition française, adressée à J. Molk, 8, rue d'Alliance, à Nancy, sera insérée, s'il y a lieu, avec mention du nom de son auteur, » réalise une excellente idée. D'abord, malgré tous les soins qu'on y donne, une œuvre comme l'*Encyclopédie* comporte quelques incorrections matérielles (bien peu nombreuses) qu'il convient de signaler. Il est très difficile de ne pas y laisser aussi quelques inexactitudes, quelques oublis ; tout cela, grâce à la tribune ouverte, peut être réparé. Je me permets d'ajouter que cette invention libérale comporte quelque malice ; grâce à elle, l'éditeur a le droit de se regarder comme entièrement couvert, et de regarder comme peu justifiées les critiques, qu'il ne demande qu'à accueillir, et qu'on ne lui aurait pas directement adressées. Parmi les savants qui ont apporté les plus importantes rectifications bibliographiques, il convient de citer, en première ligne, M. G. Eneström, dont l'érudition est si sûre et si étendue, et dont la curiosité est si éveillée. On sait, d'ailleurs, avec quelle ampleur la partie bibliographique et historique (¹) est traitée dans l'*Encyclopédie*. Les auteurs ont exposé les idées mathématiques dans l'ordre qui semble aujourd'hui le plus naturel, mais ils ont pris grand soin de signaler, toutes les fois qu'ils l'ont pu, la filiation historique, en sorte que l'*Encyclopédie* se trouvera être une véritable histoire scientifique, une histoire d'où se trouvera exclu tout ce qui n'intéresse pas la Science elle-même. Je reconnais, d'ailleurs, qu'elle ne pourra se substituer à un exposé historique proprement dit, parce que l'état de la Science, au moment où se sont faites les découvertes, ne pourra pas ressortir, et qu'il est nécessaire de connaître cet état pour se rendre compte de l'importance des découvertes et de la façon dont elles se sont produites.

Le présent fascicule comprend un article sur le calcul des probabilités et un article sur le calcul des différences et sur l'interpolation.

Le premier ne diffère pas beaucoup, au fond, de l'article origi-

---

(¹) Qu'il me soit permis, à cette occasion, de rappeler la part considérable que Paul Tannery avait prise, pour ce qui concerne l'histoire, aux premiers articles de l'*Encyclopédie*, et de remercier M. H.-G. Zeuthen et M. G. Eneström pour l'article qu'ils ont consacré à sa mémoire dans la *Bibliotheca mathematica*.

nal, qui était dû à M. Czuber; quelques points, qui étaient un peu condensés dans l'édition allemande, ont été développés davantage, souvent d'après le grand *Traité* de M. Czuber lui-même; M. J. le Roux a su donner à son exposé une forme précise, agréable et claire.

M. Andoyer a réuni, pour les exposer ensemble, deux articles qui étaient séparés dans l'édition allemande et qui étaient dus l'un, sur les différences, à M. D. Selivanov, l'autre, sur l'interpolation, à M. J. Bauschinger. On a fait, ici même, l'éloge du livre de M. Selivanov; il est inutile de dire que les mérites de ce livre, la parfaite clarté et l'entière rigueur, se retrouvaient dans son article; son tempérament de mathématicien l'avait porté à écarter tout calcul symbolique, sans doute parce qu'il estime que les symboles cachent les choses, et tout développement dont la convergence n'est pas parfaitement établie. M. Andoyer a pensé qu'il y avait quelque excès dans cette double exclusion; que, d'une part, les notations symboliques peuvent être utiles, et qu'il ne faut pas les rejeter quand elles sont classiques, et, d'autre part, que les questions de convergence, si importantes pour le mathématicien, ne doivent pas arrêter, outre mesure, celui qui fait une application numérique et qui est souvent rassuré, par son calcul même, sur la valeur de la méthode qu'il emploie. Avec les additions de M. Andoyer, on peut dire que le sujet se trouve maintenant exposé d'une façon plus ample et vraiment pratique. D'un autre côté, en réunissant l'article de M. Bauschinger à celui de M. Selivanov, M. Andoyer trouvait l'occasion de développer les applications du calcul des différences à l'interpolation, beaucoup plus que cela n'avait pu être fait dans l'édition allemande. Signalons encore le numéro relatif aux quadratures numériques, très bien présentées d'un point de vue unique, et le parti qu'on a tiré de l'important Mémoire de M. Radau (*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 1880). On sent que les auteurs sont du métier et qu'ils ont pratiqué les théories qu'ils développent; cela paraît encore à la façon dont sont dressés les Tableaux, vraiment prêts à être utilisés; de leur commun travail il est sorti un excellent traité, qui rendra les meilleurs services.

On voit, par ce court exposé, combien l'éditeur avait le droit d'affirmer que l'édition française de l'*Encyclopédie* n'est pas une tra-

duction, mais une œuvre nouvelle ; il suffit de se rendre compte de l'importance du but qu'ils poursuivent, pour comprendre l'ardeur et le désintéressement qu'apportent, à cette œuvre commune, les nouveaux et les anciens auteurs. La mise en train a demandé un peu de temps ; mais il y a tout lieu de croire que, désormais, les différents fascicules vont se suivre rapidement. J. T.

GUILLEMIN (A.). — TABLEAUX LOGARITHMIQUES A ET B ÉQUIVALANT A DES TABLES DE LOGARITHMES A 6 ET A 9 DÉCIMALES ET NOTICE EXPLICATIVE DONNANT LA THÉORIE ET LE MODE D'EMPLOI DES TABLEAUX. 32 pages, in-8°. Paris, F. Alcan, 1906.

M. Guillemin, qui a longtemps administré la ville d'Alger et que les physiciens connaissent pour d'ingénieux travaux sur l'acoustique, nous donne deux Tableaux, appropriés au calcul logarithmique, et qui peuvent rendre des services en raison du peu de place qu'ils tiennent. Ces Tableaux sont, au fond, une combinaison de tables d'antilogarithmes et de logarithmes d'addition. Je parlerai surtout du tableau A ($35^{cm} \times 35^{cm}$), qui est le plus simple.

C'est une table à simple entrée, comportant trois colonnes, qui donnent respectivement les nombres

$$10^{x\,10^{-3}}, \qquad x, \qquad \varphi(x) = \log(10^{x\,10^{-6}} - 1);$$

les nombres entiers x, de la seconde colonne varient de 0 à 999; les nombres de la première colonne, où l'on doit, pour qu'ils aient la signification ci-dessus, placer la virgule après le premier chiffre, comportent sept ou six figures, par conséquent six ou cinq décimales suivant que l'on a $x < 700$ ou $x \geq 700$. Quant aux nombres $\varphi(x)$, pour lesquels il est à peine utile de dire que le symbole log désigne des logarithmes vulgaires, ils sont donnés avec trois chiffres décimaux ; leur partie entière, à partir de $x = 1$, varie de -6 à -3.

Si, maintenant, on se donne, avec six décimales, le logarithme

vulgaire d'un nombre N,

$$\log N = n + x\,10^{-3} + y\,10^{-6},$$

où les nombres n, x, y sont entiers et où x, y sont inférieurs à 1000, on calculera N par la formule

$$N = 10^n\left[10^{x\,10^{-3}} + 10^{x\,10^{-3}+\varphi(y)}\right];$$

les nombres $10^{x\,10^{-3}}$ et $\varphi(y)$ se trouvent respectivement dans la première et la troisième colonne; on a, après les avoir cherchés, à faire la somme $x\,10^{-3} + \varphi(y)$ dont les deux parties comportent trois chiffres décimaux, puis, en désignant cette somme par $-\nu + z\,10^{-3}$, où ν et z sont des entiers positifs, dont le second est moindre que 1000, à chercher le nombre $10^{z\,10^{-3}}$, qui se trouve dans la première colonne, et enfin à ajouter les deux nombres

$$10^{x\,10^{-3}} \quad \text{et} \quad 10^{-\nu + z\,10^{-3}};$$

on a donc, pour trouver N, à faire trois recherches dans le Tableau, puis deux additions assez courtes; l'erreur sur le sixième chiffre de N peut s'élever jusqu'à deux unités; on n'a pas à faire d'interpolations. Afin de diminuer l'erreur, M. Guillemin conseille, lorsque y dépasse 500, de substituer à la formule précédente, pour le calcul de N, la formule approchée que voici :

$$N = 10^n\left[10^{(x+1)\,10^{-3}} - 10^{(x+1)\,10^{-3} - \varphi(10^3 - y)}\right];$$

laquelle rend évidentes les modifications à apporter au calcul que l'on vient de décrire.

De ce qui précède on déduira, sans peine, les règles pour trouver, avec six décimales, le logarithme d'un nombre.

Le Tableau B ($35^{\text{cm}} \times 47^{\text{cm}}$), plus développé, est fondé sur les mêmes idées : on regarde la mantisse des logarithmes comme comportant neuf figures, et on la décompose en trois triades de trois chiffres, au lieu de les décomposer en deux, comme ci-dessus; naturellement, les calculs sont un peu plus compliqués.

J. T.

MÉLANGES.

REMARQUES SUR LA THÉORIE DE LA TRANSFORMATION DES FONCTIONS ELLIPTIQUES ET SUR LA RÉDUCTION DES INTÉGRALES ABÉLIENNES;

Par M. J. DOLBNIA.

I.

Soit l'intégrale elliptique

$$(1) \qquad \int_\infty^x \frac{dx}{\sqrt{4x^3 - g_2 x - g_3}} = u; \qquad x = p(u, g_2, g_3).$$

Il faut satisfaire à l'équation

$$\int_\infty^x \frac{dx}{\sqrt{4x^3 - g_2 x - g_3}} = \int_\infty^y \frac{dy}{\sqrt{4y^3 - \overline{g_2}\, y - \overline{g_3}}}$$

au moyen de la substitution

$$(2) \qquad \frac{f(x)}{\varphi(x)} = y = \bar{p}(u, \overline{g_2}, \overline{g_3});$$

$f(x)$ et $\varphi(x)$ étant des fonctions entières des degrés i, k; g_2, g_3 sont des invariants donnés; $\overline{g_2}$, $\overline{g_3}$ les invariants inconnus. Il suit de l'équation (1) qu'au voisinage de $x = \infty$ nous avons un développement de x suivant les puissances de u avec la partie principale u^{-2}. De l'équation (2) on voit qu'aux environs de $x = \infty$ on a un développement de x avec la partie principale $u^{-\frac{2}{i-k}}$; par conséquent,

$$i - k = 1.$$

En posant

$$i = 2n,$$

nous avons

$$k = 2n - 1,$$

et nous avons une transformation de degré pair $2n$.

Posons

$$\varphi(x) = (x - x_1)^{\alpha_1}(x - x_2)^{\alpha_2}\dots(x - x_k)^{\alpha_k}.$$

Alors de l'équation

$$\frac{f(x)}{(x - x_1)^{\alpha_1}(x - x_2)^{\alpha_2}\dots(x - x_j)^{\alpha_j}\dots(x - x_k)^{\alpha_k}} = \bar{p}(u, \overline{g_2}, \overline{g_3})$$

on voit qu'au voisinage de

$$x - x_j = 0$$

nous avons un développement de $(x - x_j)$ avec la partie principale

$$u^{\frac{2}{\alpha_j}}.$$

Et, comme x est une fonction monodrome de u pour toutes les valeurs de x, nous avons nécessairement

$$\alpha_j = 1 \qquad \text{ou} \qquad \alpha_j = 2.$$

Il est évident que, si $\alpha_j = 1$, x_j est un point de ramification, par conséquent,

$$x_j = e_j, \qquad j = 1, \quad 2, \quad 3.$$

En remarquant que $\varphi(x)$ est un polynome de degré impair, on ne peut admettre que deux hypothèses

(1) $\varphi(x) = (x - x_1)^2 (x - x_2)^2 \dots (x - x_{n-1})^2 (x - e_i)$,

(2) $\varphi(x) = (x - x_1)^2 \dots (x - x_{n-2})^2 (x - e_1)(x - e_2)(x - e_3)$.

La première hypothèse donne lieu à une transformation qui est définie par les trois formules suivantes :

$$(\mathrm{A}) \quad \begin{cases} \bar{p}u - \overline{e_1} = \dfrac{(x - \xi_1)^2 (x - \xi_2)^2 \dots (x - \xi_n)^2}{(x - x_1)^2 (x - x_2)^2 \dots (x - x_{n-1})^2 (x - e_1)}, \\ \bar{p}u - \overline{e_2} = \dfrac{(x - \xi'_1)^2 (x - \xi'_2)^2 \dots (x - \xi'_n)^2}{(x - x_1)^2 (x - x_2)^2 \dots (x - x_{n-1})^2 (x - e_1)}, \\ \bar{p}u - \overline{e_3} = \dfrac{(x - \xi''_1)^2 (x - \xi''_2)^2 \dots (x - \xi''_n)^2}{(x - x_1)^2 (x - x_2)^2 \dots (x - x_{n-1})^2 (x - e_1)}. \end{cases}$$

La seconde transformation donne lieu aux trois formules suivantes :

$$(\mathrm{B})\quad\begin{cases}\bar{p}u-\overline{e_1}=\dfrac{(x-\xi_1)^2(x-\xi_2)^2\ldots(x-\xi_n)^2}{(x-x_1)^2\ldots(x-x_{n-2})^2(x-e_1)(x-e_2)(x-e_3)},\\[2mm]\bar{p}u-\overline{e_2}=\dfrac{(x-\xi'_1)^2(x-\xi'_2)^2\ldots(x-\xi'_n)^2}{(x-x_1)^2\ldots(x-x_{n-2})^2(x-e_1)(x-e_2)(x-e_3)},\\[2mm]\bar{p}u-\overline{e_3}=\dfrac{(x-\xi''_1)^2(x-\xi''_2)^2\ldots(x-\xi''_n)^2}{(x-x_1)^2\ldots(x-x_{n-2})^2(x-e_1)(x-e_2)(x-e_3)}.\end{cases}$$

Le principal but du travail présent est l'étude de la transformation (B). Pourtant la méthode qne nous allons développer est aussi facilement applicable à la transformation (A); ce que nous allons montrer dans la suite.

En posant

$$x_1=p\alpha_1,\qquad x_2=p\alpha_2,\qquad\ldots,\qquad x_{n-2}=p\alpha_{n-2},$$

il est évident que

$$(3)\quad\begin{cases}\bar{p}u=\lambda pu+\mu+\dfrac{A_1}{pu-e_1}+\dfrac{A_2}{pu-e_2}+\dfrac{A_3}{pu-e_3}\\[2mm]\qquad+\dfrac{B_1}{(pu-p\alpha_1)^2}+\dfrac{B'_1}{pu-p\alpha_1}\\[2mm]\qquad+\dfrac{B_2}{(pu-p\alpha_2)^2}+\dfrac{B'_2}{pu-p\alpha_2}\\[2mm]\qquad+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\[2mm]\qquad+\dfrac{B_{n-2}}{(pu-p\alpha_{n-2})^2}+\dfrac{B'_{n-2}}{pu-p\alpha_{n-2}},\end{cases}$$

où

$$\lambda,\quad\mu,\quad A_1,\quad A_2,\quad A_3,\quad B_1,\quad B_2,\quad\ldots,\quad B'_1,\quad B'_2$$

sont des coefficients inconnus.

En développant les deux membres de l'équation (3) aux environs de $u=0$, nous avons

$$(4)\quad u^{-2}+\tfrac{1}{20}\overline{g_2}u^2+\tfrac{1}{28}\overline{g_3}u^4+\ldots=\mu+\lambda(u^{-2}+\tfrac{1}{20}g_2u^2+\ldots)+u^2F(u),$$

$F(u)$ est une fonction holomorphe satisfaisant à la condition

$$F(0)\neq 0.$$

On voit de l'équation (4) que

$$\lambda=1,\qquad\mu=0.$$

Il suit des équations (B) que

$$\bar{p}(u) = \infty$$

pour

$$x = e_1, \quad e_2, \quad e_3, \quad x_1, \quad x_2, \quad \ldots, \quad x_{n-2};$$

par conséquent,

$$\alpha_1, \quad \alpha_2, \quad \alpha_{n-2}, \quad \ldots, \quad \omega, \quad \omega'$$

sont des périodes de la fonction $\bar{p}u$. Posons maintenant dans l'équation (3)

$$u = \omega + \varepsilon, \qquad \lim \varepsilon = 0;$$

alors nous aurons

$$\begin{aligned}
&\varepsilon^{-2} + \tfrac{1}{20}\overline{g_2}\,\varepsilon^2 + \tfrac{1}{28}\overline{g_3}\,\varepsilon^4 + \ldots \\
&= e_1 + \tfrac{1}{2}\varepsilon^2 p''\omega + \tfrac{1}{24}\varepsilon^4 p^{\text{IV}}\omega + \ldots + \frac{A_1}{\tfrac{1}{2}\varepsilon^2 p''\omega + \tfrac{1}{24}\varepsilon^4 p^{\text{IV}}\omega + \ldots} \\
&\quad + \frac{A_2}{e_1 - e_2 + \tfrac{1}{2}\varepsilon^2 p''\omega + \ldots} + \frac{A_3}{e_1 - e_3 + \tfrac{1}{2}\varepsilon^2 p''\omega + \ldots} \\
&\quad + \frac{B_1}{(e_1 - p\alpha_1 + \tfrac{1}{2}\varepsilon^2 p''\omega + \ldots)^2} + \frac{B'_1}{e_1 - p\alpha_1 + \tfrac{1}{2}\varepsilon^2 p''\omega + \ldots} \\
&\quad + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\quad + \frac{B_{n-2}}{(e_1 - p\alpha_{n-2} + \tfrac{1}{2}\varepsilon^2 p''\omega)^2} + \frac{B'_{n-2}}{e_1 - p\alpha_{n-2} + \tfrac{1}{2}\varepsilon^2 p''\omega}.
\end{aligned}$$

D'où il suit que

$$\frac{2A_1}{p''\omega} = 1, \qquad A_1 = \tfrac{1}{2}p''\omega = 3e_1^2 - \tfrac{1}{4}g_2.$$

De même nous trouvons

$$A_2 = 3e_2^2 - \tfrac{1}{4}g_2, \qquad A_3 = 3e_3^2 - \tfrac{1}{4}g_2.$$

Posant pour abréger

$$(pu - e_1)(pu - e_2)(pu - e_3) = x^3 - \tfrac{1}{4}g_2 x - \tfrac{1}{4}g_3 = f(x),$$
$$x = pu$$

et remarquant que

$$3e_i^2 - \tfrac{1}{4}g_2 = f'(e_i),$$

il est évident que

$$\frac{A_1}{pu - e_1} + \frac{A_2}{pu - e_2} + \frac{A_3}{pu - e_3} = \sum_{i=1}^{i=3} \frac{3e_i^2 - \tfrac{1}{4}g_2}{pu - e_i} = \frac{R(x)}{f(x)},$$

où $R(x)$ est le reste de la division de

$$(f'x)^2 = 9x^4 - \tfrac{3}{2}g_2x^2 + \tfrac{1}{16}g_2^2$$

par

$$f(x) = x^3 - \tfrac{1}{4}g_2x - \tfrac{1}{4}g_3,$$

c'est-à-dire

$$R(x) = \tfrac{3}{2}g_2 p^2 u + \tfrac{9}{4}g_3 p u + \tfrac{1}{16}g_2^2.$$

Par conséquent,

$$p u + \sum_1^3 \frac{3e_i^2 - \frac{1}{4}g_2}{p u - e_i} = \frac{p^4 u + \frac{1}{2}g_2 p^2 u + 2g_3 p u + \frac{1}{16}g_2^2}{p^3 u - \frac{1}{4}g_2 p u - \frac{1}{4}g_3},$$

ou

$$p u + \sum_1^3 \frac{3e_i^2 - \frac{1}{4}g_2}{p u - e_i} = 4p(2u);$$

donc

$$(5)\quad \left\{ \begin{aligned} \bar{p}(u, \overline{g_2}, \overline{g_3}) = 4p2u &+ \frac{B_1}{(pu - p\alpha_1)^2} + \frac{B'_1}{pu - p\alpha_1} + \ldots \\ &+ \frac{B_i}{(pu - p\alpha_i)^2} + \frac{B'_i}{pu - p\alpha_i} + \ldots \\ &+ \frac{B_{n-2}}{(pu - p\alpha_{n-2})^2} + \frac{B'_{n-2}}{pu - p\alpha_{n-2}}. \end{aligned} \right.$$

Pour déterminer les coefficients

$$B_i, \quad B'_i$$

prenons, dans l'équation (5)

$$u = \alpha_i + \varepsilon, \qquad \lim \varepsilon = 0.$$

Alors on peut développer les deux membres de l'équation (5) en série suivant les puissances de ε. Pour avoir ce développement, remarquons que

$$pu - p\alpha_i = \varepsilon p'\alpha_i + \tfrac{1}{2}\varepsilon^2 p''\alpha_i + \tfrac{1}{6}\varepsilon^3 p'''\alpha_i + \ldots;$$

par conséquent,

$$\frac{1}{pu - p\alpha_i} = \frac{\varepsilon^{-1}}{p'\alpha_i}\left[1 - \frac{1}{2}\frac{p''\alpha_i}{p'\alpha_i}\varepsilon + \left(\frac{1}{4}\frac{p''^2\alpha_i}{p'^2\alpha_i} - \frac{1}{6}\frac{p'''\alpha_i}{p'\alpha_i}\right)\varepsilon^2 + \ldots\right],$$

$$\frac{1}{(pu - p\alpha_i)^2} = \frac{\varepsilon^{-2}}{p'^2\alpha_i}\left[1 - \frac{p''\alpha_i}{p'\alpha_i}\varepsilon + \left(\frac{3}{4}\frac{p''^2\alpha_i}{p'^2\alpha_i} - \frac{1}{3}\frac{p'''\alpha_i}{p'\alpha_i}\right)\varepsilon^2 + \ldots\right].$$

Pour cette raison l'équation (5) nous donne

$$\frac{B_i}{p'^2\alpha_i} = 1,$$

d'où

$$B_i = p'^2\alpha_i.$$

$$\frac{B_i p''\alpha_i}{p'^3\alpha_i} - \frac{B'_i}{p'\alpha_i} = 0,$$

d'où

$$B'_i = p''\alpha_i.$$

Par conséquent,

$$\bar{p}u = 4p2u + \sum\left(\frac{p'^2\alpha_i}{(pu - p\alpha_i)^2} + \frac{p''\alpha_i}{pu - p\alpha_i}\right).$$

Et, comme

$$\frac{p'^2\alpha_i}{(pu - p\alpha_i)^2} + \frac{p''\alpha_i}{pu - p\alpha_i} = p(u+\alpha_i) + p(u-\alpha_i) - 2p\alpha_i \quad (^1),$$

nous avons définitivement

$$(6) \qquad \bar{p}(u, \overline{g_2}, \overline{g_3}) = 4p2u + \sum[p(u+\alpha_i) + p(u+\alpha_i) - 2p\alpha_i].$$

Pour la transformation du quatrième ordre nous avons

$$\bar{p}(u, \overline{g_2}, \overline{g_3}) = 4p2u.$$

Cette transformation est indiquée dans notre Mémoire *De quelques points concernant la théorie de la transformation des fonctions elliptiques* (²). On s'assure très facilement que ces transformations d'un degré supérieur au quatre sont impossibles. Bornons-nous à démontrer l'impossibilité de la transformation du sixième ordre. En effet, dans ce cas nous avons

$$\bar{p}u = 4p2u + p(u+\alpha) + p(u-\alpha) - 2p\alpha,$$

α étant un argument inconnu. En posant

$$u = \alpha + \varepsilon, \qquad \lim \varepsilon = 0,$$

développant les deux membres en série et égalant à zéro le terme

---

(¹) Halphen, *Traité des fonctions elliptiques*, t. I, p. 205.

(²) *Bull. des Sciences math.*, 2e série, t. XXVII, novembre 1903.

constant, nous aurons

$$4\,\mathrm{p}\,2\alpha + \mathrm{p}\,2\alpha - 2\,\mathrm{p}\,\alpha = 0,$$

ou

(7) $$-3\,\mathrm{p}^4\alpha + \tfrac{9}{2}g_2\,\mathrm{p}^2\alpha + 12\,g_3\,\mathrm{p}\,\alpha + \tfrac{9}{16}g_2^2 = 0.$$

En posant

$$u = \omega + \varepsilon, \qquad \lim \varepsilon = 0,$$

nous avons

$$\mathrm{p}(\omega - \alpha) = \mathrm{p}\,\alpha,$$

ou

$$e_1 + \frac{3e_1^2 - \frac{1}{4}g_2}{\mathrm{p}\,\alpha - e_1} = \mathrm{p}\,\alpha,$$

ou

$$\mathrm{p}^2\alpha - 2e_1\,\mathrm{p}\,\alpha - 2e_1^2 + \tfrac{1}{4}g^2 = 0.$$

Et comme nous devons avoir en même temps

$$\mathrm{p}^2\alpha - 2e_2\,\mathrm{p}\,\alpha - 2e_2^2 + \tfrac{1}{4}g_2 = 0,$$
$$\mathrm{p}^2\alpha - 2e_3\,\mathrm{p}\,\alpha - 2e_3^2 + \tfrac{1}{4}g_2 = 0,$$

alors

(8) $$3\,\mathrm{p}^2\alpha - \tfrac{1}{4}g_2 = 0.$$

En éliminant $\mathrm{p}(\alpha)$ des (7) et (8), nous trouvons

$$g_2^3 - 27\,g_3^2 = 0,$$

ce qui est impossible.

En ce qui concerne la transformation (A), on voit qu'à $\bar{\mathrm{p}}\,u$ on peut donner la forme suivante :

$$\bar{\mathrm{p}}\,u = \mathrm{p}\,u + \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{p}\,u - e_1} + \sum\left(\frac{\mathrm{B}_i}{(\mathrm{p}\,u - \mathrm{p}\,\alpha_i)^2} + \frac{\mathrm{B}'_i}{\mathrm{p}\,u - \mathrm{p}\,\alpha_i}\right),$$

où l'argument α_i satisfait à l'équation

$$x_i = \mathrm{p}\,\alpha_i.$$

Il est facile de démontrer que

$$\mathrm{A} = \tfrac{1}{2}\mathrm{p}''\omega, \qquad \mathrm{B}_i = \mathrm{p}'^2\alpha_i, \qquad \mathrm{B}'_i = \mathrm{p}''\alpha_i.$$

Par conséquent,

$$\bar{\mathrm{p}}\,u = \mathrm{p}\,u + \frac{3e_i^2 - \frac{1}{4}g_2}{\mathrm{p}\,u - e_1} + \sum_{1}^{n-1}[\mathrm{p}(u + \alpha_i) + \mathrm{p}(u - \alpha_i) - 2\,\mathrm{p}\,\alpha_i],$$

ou

$$\bar{p}u = pu + p(u+\omega) - p\omega + \sum_{1}^{n-1} [p(u+\alpha_i) + p(u-\alpha_i) - 2p\alpha_i].$$

En remarquant que

$$\alpha_i = \frac{2i\omega}{2n} = \frac{i\omega}{n},$$

nous avons définitivement

$$\bar{p}u = pu + p(u+\omega) - p(\omega) + \sum \left[p\left(u + \frac{i\omega}{n}\right) + p\left(u - \frac{i\omega}{n}\right) - 2p\frac{i\omega}{n} \right].$$

De la même manière pour la transformation d'un ordre impair $(2n+1)$ nous obtiendrons

$$\bar{p}u = pu + \sum \left[p\left(u + \frac{2k\omega}{2n+1}\right) + p\left(u - \frac{2k\omega}{2n+1}\right) - 2p\frac{2k\omega}{2n+1} \right].$$

Ces formules sont mentionnées dans le Mémoire de M. L. Kiepert : *Zur Theorie der elliptischen Functionen* (1).

II.

La réduction des intégrales abéliennes. — La méthode exposée dans le paragraphe précédent est d'un usage très simple pour la résolution du problème de la réduction des intégrales abéliennes. Soit donnée l'intégrale hyperelliptique de la première espèce

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^{2n+1} + A_1 x^{2n} + \ldots + A_{2n-1}}} = u.$$

Faisons pour abréger

$$x^{2n+1} + A_1 x^{2n} + \ldots + A_{2n+1} = \varphi(x).$$

Aux environs de $x = \infty$ nous avons un développement de x

(1) *Mathematische Annalen*, XXVI B., s. 384.

avec la partie principale

$$\left(\frac{2}{2n-1}\right)^{\frac{2}{2n-1}} u^{-\frac{2}{2n-1}}.$$

Si l'intégrale u est réductible à l'aide de la substitution

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \lambda p(u, g_2, g_3)$$

rationnelle, le degré de numérateur surpasse celui de dénominateur par $(2n-1)$. Si l'on pose

$$\lambda = \left(\frac{2}{2n-1}\right)^{\frac{2}{2n-1}},$$

nous avons

$$F(x) = x^i + \ldots, \qquad f(x) = x^{i+2n-1} + \ldots.$$

Posant

$$F(x) = (x-x_1)^{\alpha_1}(x-x_2)^{\alpha_2}\ldots(x-x_i)^{\alpha_i},$$

on voit que pu devient infini pour

$$x = x_1, \qquad x_2, \qquad \ldots, \qquad x_i.$$

Au voisinage d'un de ces points x_k nous avons un développement de $(x-x_k)$ avec la partie principale

$$u^{-\frac{2}{\alpha_k}}.$$

Et, comme x est une fonction monodrome de l'argument u pour toutes les valeurs de x sauf $x=\infty$, sont possibles les deux hypothèses suivantes :

1° $$a_k = 1,$$
2° $$\alpha_k = 2.$$

Si $\alpha_k = 1$, alors x_k est un point de ramification. Considérons seulement le cas où

$$x_1, \quad x_2, \quad \ldots, \quad x_i,$$

tous sont les points de ramification et où alors $F(x)$ est un divi-

seur du polynome $\varphi(x)$. Dans ce cas nous avons

$$F(x)=(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_k)\ldots(x-x_i),$$

$$(9)\quad \left\{\begin{aligned} \lambda \wp u &= x^{2n-1}+\alpha_1 x^{2n-2}+\ldots+\alpha_{2n-2}x+\alpha_{2n-1}\\ &\quad +\frac{\beta_1}{x-x_1}+\frac{\beta_2}{x-x_2}+\ldots+\frac{\beta_i}{x-x_i},\end{aligned}\right.$$

où

$$\alpha_1,\quad \alpha_2,\quad \ldots,\quad \alpha_{2n-2},\quad \alpha_{2n-1};\quad \beta_1,\quad \beta_2,\quad \ldots,\quad \beta_i$$

sont des coefficients inconnus. En remarquant que

$$\frac{dx}{du}=\sqrt{\varphi(x)},$$

nous avons

$$(10)\quad \left\{\begin{aligned} &\left(\frac{dx}{du}\right)^2=\varphi(x),\\ &\frac{d^2x}{du^2}=\tfrac{1}{2}\varphi'(x),\\ &\frac{d^3x}{du^3}=\tfrac{1}{2}\varphi''(x)\frac{dx}{du},\\ &\frac{d^4x}{du^4}=\tfrac{1}{2}\varphi'''(x)\varphi(x)+\tfrac{1}{4}\varphi''(x)\varphi'(x),\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}\right.$$

L'équation (9) montre que $\wp u$ devient infini pour

$$x=x_1,\qquad x_2,\qquad \ldots,\qquad x_i.$$

En posant que

$$u=u_k$$

pour

$$x=x_k;$$

nous voyons que u_k est une période de la fonction $\wp u$. En faisant

$$u=u_k+\varepsilon,\qquad \lim\varepsilon=0,$$

nous aurons

$$\wp u=\varepsilon^{-2}+\tfrac{1}{20}g_2\varepsilon^2+\tfrac{1}{28}g_3\varepsilon^4+\ldots;$$

$$x-x_k=\varepsilon\left(\frac{dx}{du}\right)_k+\tfrac{1}{2}\varepsilon^2\left(\frac{d^2x}{du^2}\right)_k+\tfrac{1}{6}\varepsilon^3\left(\frac{d^3x}{du^3}\right)_k+\tfrac{1}{24}\varepsilon^4\left(\frac{d^4x}{du^4}\right)_k+\ldots;$$

ou

$$x-x_k=\tfrac{1}{4}\varepsilon^2\varphi'(x_k)+\tfrac{1}{96}\varepsilon^4\varphi'(x_k)\varphi''(x_k)+\ldots.$$

Par cette raison

$$x - x_k = \tfrac{1}{4}\varepsilon^2\varphi'(x_k)[1 + \tfrac{1}{24}\varepsilon^2\varphi''(x_k) + \ldots],$$
$$\frac{\beta_k}{x - x_k} = \frac{4\beta_k\varepsilon^{-2}}{\varphi'(x_k)}[1 - \tfrac{1}{24}\varepsilon^2\varphi''(x_k) + \ldots].$$

Maintenant faisons dans l'équation (9) $u = u_k + \varepsilon$, $\lim\varepsilon = 0$; nous aurons

$$\begin{aligned}\lambda(\varepsilon^{-2} &+ \tfrac{1}{20}g_2\varepsilon^2 + \tfrac{1}{28}g_3\varepsilon^4 + \ldots)\\ &= \frac{4\beta_k}{\varphi'(x_k)}\varepsilon^{-2} + \Big(x_k^{2n-1} + \alpha_1 x_k^{2n-2} + \ldots + \alpha_{2n-2}x_k + \alpha_{2n-1}\\ &\qquad + \frac{\beta_1}{x_k - x_1} + \ldots + \frac{\beta_{k-1}}{x_k - x_{k-1}}\\ &\qquad + \frac{\beta_{k+1}}{x_k - x_{k+1}} + \ldots + \frac{\beta_i}{x_k - x_i}\\ &\qquad - \frac{1}{6}\frac{\beta_k}{\varphi'(x_k)}\varphi''(x_k)\Big) + \ldots\end{aligned}$$

D'où il suit que

$$\beta_k = \frac{\lambda\varphi'(x_k)}{4}, \qquad k = 1, 2, \ldots, i,$$

$$\begin{aligned}&x_k^{2n-1} + \alpha_1 x_k^{2n-2} + \ldots + \alpha_{2n-2}x_k + \alpha_{2n-1}\\ &\quad + \frac{\beta_1}{x_k - x_1} + \ldots + \frac{\beta_{k-1}}{x_k - x_{k-1}}\\ &\quad + \frac{\beta_{k+1}}{x_k - x_{k+1}} + \ldots + \frac{\beta_i}{x_k - x_i} - \tfrac{1}{24}\lambda\varphi''(x_k) = 0,\end{aligned}$$

ou

$$(11)\quad \left\{\begin{aligned}&x_k^{2n-1} + \alpha_1 x_k^{2n-2} + \ldots + \alpha_{2n-2}x_k + \alpha_{2n-1}\\ &\quad + \frac{\lambda}{4}\Big(\frac{\varphi'(x_1)}{x_k - x_1} + \ldots + \frac{\varphi'(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}\\ &\qquad + \frac{\varphi'(x_{k+1})}{x_k - x_{k+1}} + \ldots + \frac{\varphi'(x_i)}{x_k - x_i} - \tfrac{1}{6}\varphi''(x_k)\Big) = 0.\end{aligned}\right.$$

Il est facile de trouver la somme

$$\sum_1^{2n-1}\frac{\varphi'(x_k)}{x - x_k}.$$

Posant

$$\frac{\varphi'(x_1)}{x - x_1} + \ldots + \frac{\varphi'(x_k)}{x - x_k} + \ldots + \frac{\varphi'(x_i)}{x - x_i} = \frac{\xi(x)}{F(x)},$$

nous devons avoir

$$\varphi'(x_k) = \frac{\xi(x_k)}{F'(x_k)},$$

d'où

$$\xi(x_k) = \varphi'(x_k)\,F'(x_k).$$

D'où il suit que $\xi(x)$ est le reste de la division de

$$\varphi'(x)\,F'(x)$$

par $F(x)$; donc

$$\varphi'(x)\,F'(x) = F(x)\,Q(x) + \xi(x), \tag{12}$$

$Q(x)$ étant un polynome.

Et comme

$$\lambda\,pu = x^{2n-1} + \alpha_1 x^{2n-2} + \ldots + \alpha_{2n-2}x + \alpha_{2n-1} + \frac{\lambda}{4}\sum_1^{2n}\frac{\varphi'(x_k)}{x - x_k},$$

nous avons

$$\lambda\,pu = x^{2n-1} + \alpha_1 x^{2n-2} + \ldots + \alpha_{2n-2}x + \alpha_{2n-1} + \frac{\lambda}{4}\,\frac{\xi(x)}{F(x)}. \tag{13}$$

En outre

$$\begin{aligned}&\frac{\varphi'(x_1)}{x_k - x_1} + \ldots + \frac{\varphi'(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}\\ &+ \frac{\varphi'(x_{k+1})}{x_k - x_{k+1}} + \ldots + \frac{\varphi'(x_i)}{x_k - x_i} = \frac{\xi'(x_k)}{F'(x_k)} - \frac{1}{2}\,\frac{\varphi'(x_k)}{F'(x_k)}\,F''(x_k).\end{aligned}$$

De l'équation (11), nous avons

$$\left\{\begin{aligned}&x_k^{2n-1} + \alpha_1 x_k^{2n-2} + \ldots + \alpha_{2n-2}x_k + \alpha_{2n-1}\\ &\quad + \frac{\lambda}{4}\left(\frac{\xi'(x_k)}{F'(x_k)} - \frac{1}{2}\,\frac{\varphi'(x_k)}{F'(x_k)}\,F''(x_k) - \tfrac{1}{6}\varphi''(x_k)\right) = 0.\end{aligned}\right. \tag{14}$$

De l'équation

$$\varphi(x) = F(x)\,\psi(x),$$

où $\psi(x)$ est le polynome donné, nous avons

$$\frac{\varphi'(x_k)}{F'(x_k)} = \psi(x_k). \tag{15}$$

De l'équation (12), on voit que

$$\frac{\xi'(x_k)}{F'(x_k)} = \varphi''(x_k) + F''(x_k)\,\psi(x_k) - Q(x_k). \tag{16}$$

En substituant dans (14) les valeurs (15) et (16), nous aurons

$$(17)\quad \left\{\begin{aligned} & x_k^{2n-1} + \alpha_1 x_k^{2n-2} + \ldots + \alpha_{2n-2} x_k + \alpha_{2n-1} \\ & \qquad + \frac{\lambda}{24}[5\varphi''(x_k) + 3\psi(x_k)\,F''(x_k) - 6\,Q(x_k)] = 0. \end{aligned}\right.$$

L'équation (17) donne lieu à trois cas possibles.

Premier cas. — Soit $i > 2n - 1$. En remarquant que le degré du polynome

$$5\varphi''(x) + 3\psi(x)\,F''(x) - 6\,Q(x)$$

est $(2n - 1)$, nous voyons que l'équation

$$(18)\quad \left\{\begin{aligned} & x^{2n-1} + \alpha_1 x^{2n-2} + \ldots + \alpha_{2n-2} x + \alpha_{2n-1} \\ & \qquad + \frac{\lambda}{24}(5\varphi'' x + 3\psi x\,F'' x - 6\,Q x] = 0 \end{aligned}\right.$$

du degré $2n - 1$ aura $i > 2n - 1$ racines; ce qui est impossible. Donc la réduction dans ce cas n'est pas possible.

Deuxième cas. — Soit $i = 2n - 1$. Dans ce cas, le polynome (18) ne diffère du polynome Fx que par le facteur constant

$$l = 1 + \tfrac{1}{6}\lambda(2n^2 - 2n + 3).$$

C'est pourquoi la réduction se fait d'après la formule

$$(19)\quad \lambda p u = l\,F(x) - \frac{\lambda}{24}[5\varphi'' x + 3\psi(x)\,F''(x) - 6\,Q(x)] + \frac{\lambda}{4}\,\frac{\xi(x)}{F(x)}.$$

Cette équation (19) n'a point de coefficients inconnus.

Troisième cas. — Soit $i < 2n - 1$. Dans ce cas, le polynome (18) est divisible par $F(x)$, et nous avons

$$\begin{aligned} & x^{2n-1} + \alpha_1 x^{2n-2} + \ldots + \alpha_{2n-2} x + \alpha_{2n-1} \\ & \qquad + \frac{\lambda}{24}[5\varphi''(x) + 3\psi(x)\,F''(x) - 6\,Q(x)] = l\,F(x)\,\theta(x), \end{aligned}$$

où

$$\theta(x) = x^{2n-i-1} + c_1 x^{2n-i-2} + \ldots + c_{2n-i-1},$$

$$c_1,\quad c^2,\quad \ldots,\quad c_{2n-i-1}$$

sont des coefficients indéterminés. Nous avons évidemment

$$\lambda p u = l\, F(x)\,\theta(x) - \frac{\lambda}{24}[5\varphi''(x) + 3\psi(x)\,F''(x) - 6Q(x)] + \frac{\lambda}{4}\,\frac{\xi(x)}{F(x)}.$$

En outre,

$$\lambda p u = \frac{f(x)}{F(x)};$$

par conséquent $f(x)$ n'aura que $2n - i - 1$ coefficients indéterminés

$$c_1, \quad c_2, \quad \ldots, \quad c_{2n-i-1}.$$

Désignant

$$2\omega_1, \quad 2\omega_2, \quad 2\omega_3$$

les périodes de la fonction $p u$ et posant

$$u = \omega + \varepsilon, \qquad \lim \varepsilon = 0,$$

nous avons

$$\lambda(\tfrac{1}{2}\varepsilon^2 p''\omega + \tfrac{1}{24}\varepsilon^4 p^{\text{IV}}\omega + \ldots) = \frac{f(x) - \lambda e_1 F(x)}{F(x)}.$$

Il est clair que le polynome

$$f(x) - \lambda e_1 F(x)$$

ne peut avoir que des facteurs doubles ou linéaires. Ces derniers doivent être les diviseurs de $\psi(x)$; donc

$$f(x) - \lambda e_1 F(x) = \psi_1(x)\, P_1^2 x.$$

De même

$$f(x) - \lambda e_2 F(x) = \psi_2(x)\, P_2^2 x,$$
$$f(x) - \lambda e_3 F(x) = \psi_3(x)\, P_3^2 x,$$
$$\psi_1(x)\,\psi_2(x)\,\psi_3(x) = \psi(x) = \frac{\varphi(x)}{F(x)}.$$

D'où il suit que le produit

$$(20) \qquad [f(x) - \lambda e_1 F(x)][f(x) - \lambda e_2 F(x)][f(x) - \lambda e_3 F(x)]$$

doit être divisible par le polynome $\psi(x)$ dont le degré est égal à

$$2n - i + 1.$$

En égalant identiquement à zéro le reste de la division de (20)

par $\psi(x)$, nous obtiendrons

$$2n - i + 1$$

équations linéaires aux inconnues

$$c_1, \quad c_2, \quad \ldots, \quad c_{2n-i-1}, \quad e_1, \quad e_2.$$

III.

Considérons maintenant les intégrales de la forme

(21) $$\int \frac{(x-t)\,dx}{\sqrt{\varphi(x)}} = u.$$

Aux environs de $x = \infty$, nous avons un développement de x avec la partie principale

$$\left(\frac{2n-3}{2}\right)^{\frac{2}{2n-3}} u^{-\frac{2}{2n-3}};$$

$$\varphi(x) = x^{2n+1} + p_1 x^{2n} + \ldots + p_{2n} x + p_{2n+1};$$

$$x_1, \quad x_2, \quad \ldots, \quad x_{2n+1}$$

sont les racines du polynome $\varphi(x)$. Posons

$$\lambda \, \mathrm{p} u = \frac{f(x)}{F(x)},$$

où le degré de $F(x)$ est égal à i; le degré de $f(x)$ sera alors

$$i + 2n - 3;$$

$$\lambda = \left(\frac{2n-3}{2}\right)^{\frac{-2}{2n-3}}.$$

Ne considérons que le cas le plus simple, où $F(x)$ est un diviseur du polynome $\varphi(x)$; nous avons alors

$$\varphi(x) = F(x)\,\psi(x).$$

Soit

$$F(x) = (x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_i).$$

Posons

(22) $$\begin{cases} \lambda \, \mathrm{p} u = x^{2n-3} + \alpha_1 x^{2n-4} + \ldots + \alpha_{2n-4} x + \alpha_{2n-3} \\ \qquad + \dfrac{A_1}{x - x_1} + \dfrac{A_2}{x - x_2} + \ldots + \dfrac{A_k}{x - x_k} + \ldots + \dfrac{A_i}{x - x_i}. \end{cases}$$

L'équation (21) nous donne

$$\left(\frac{dx}{du}\right)^2 = \varphi(x)(x-t)^{-2},$$

$$2\frac{d^2x}{du^2} = \varphi'(x)(x-t)^{-2} - 2\varphi(x)(x-t)^{-3},$$

$$2\frac{d^3x}{du^3} = [\varphi''(x)(x-t)^{-2} - 4\varphi'(x)(x-t)^{-3} + 6\varphi(x)(x-t)^{-4}]\frac{dx}{du},$$

$$\begin{aligned}4\frac{d^4x}{du^4} = {} & [\varphi''(x)(x-t)^{-2} - 4\varphi'(x)(x-t)^{-3} + 6\varphi(x)(x-t)^{-4}] \\ & \times [\varphi'(x)(x-t)^{-2} - 2\varphi(x)(x-t)^{-3}] \\ & + [\varphi'''(x)(x-t)^{-2} - 6\varphi'(x)(x-t)^{-3} + 18\varphi'(x)(x-t)^{-4} \\ & \qquad - 24\varphi(x)(x-t)^{-5}]\left(\frac{dx}{dt}\right)^2.\end{aligned}$$

Si, pour $x = x_k$, $k = 1, 2, \ldots, 2n+1$, nous avons

$$u = u_k;$$

alors u_k est une période de la fonction $\wp u$. Au voisinage de $u = u_k$, nous aurons le développement

$$x = x_k + \tfrac{1}{2}\varepsilon^2\left(\frac{d^2x}{du^2}\right)_k + \tfrac{1}{24}\varepsilon^4\left(\frac{d^4x}{du^4}\right)_k + \ldots,$$

ou

$$\begin{aligned}x - x_k = {} & \tfrac{1}{4}\varepsilon^2\varphi'(x_k)(x_k-t)^{-2} \\ & + \tfrac{1}{96}\varepsilon^4[\varphi'' x_k(x_k-t)^{-2} - 4\varphi' x_k(x_k-t)^{-3}]\varphi' x_k(x_k-t)^{-2} + \ldots.\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}\frac{A_k}{x-x_k} = \frac{4A_k\varepsilon^{-2}(x_k-t)^2}{\varphi'(x_k)}\{1 - \tfrac{1}{24}\varepsilon^2[& \varphi''(x_k)(x_k-t)^{-2} \\ & - 4\varphi'(x_k)(x_k-t)^{-3}]\ldots\}.\end{aligned}$$

Faisons maintenant dans l'équation (22)

$$u = u_k + \varepsilon, \qquad \lim\varepsilon = 0;$$

alors

$$\wp u = \wp(u_k+\varepsilon) = \wp\varepsilon = \varepsilon^{-2} + \tfrac{1}{20}g_2\varepsilon^2 + \tfrac{1}{28}g_3\varepsilon^4 + \ldots.$$

Par conséquent,

$$\lambda(\varepsilon^{-2} + \tfrac{1}{20}g_2\varepsilon^2 + \tfrac{1}{28}g_3\varepsilon^4 + \ldots) = \frac{4A_k(x_k-t)^2}{\varphi'(x_k)}\varepsilon^{-2} + \ldots.$$

D'où il suit que

$$A_k = \frac{\lambda \varphi'(x_k)}{4(x_k - t)^2};$$
$$k = 1, 2, 3, \ldots, i.$$

Par cette raison

$$\begin{aligned}\lambda p u = x^{2n-3} + \alpha_1 x^{2n-4} + \ldots + \alpha_{2n-4} x + \alpha_{2n-3} \\ + \frac{\lambda}{4}\biggl(\frac{\varphi'(x_1)}{(x_1 - t)^2(x - x_1)} \\ + \frac{\varphi'(x_2)}{(x_2 - t)^2(x - x_2)} + \ldots + \frac{\varphi'(x_i)}{(x_i - t)^2(x - x_i)}\biggr).\end{aligned}$$

Nous avons, évidemment,

$$\frac{\varphi'(x_k)}{(x_k - t)(x - x_k)} = \frac{\varphi'(x_k)}{x - t}\left(\frac{1}{x_k - t} + \frac{1}{x - x_k}\right).$$

Par conséquent,

$$\sum_1^i \frac{\varphi'(x_k)}{(x_k - t)(x - x_k)} = \frac{1}{x - t}\sum_1^i \frac{\varphi'(x_k)}{x - x_k} - \frac{1}{x - t}\sum_1^i \frac{\varphi'(x_k)}{t - x_k}.$$

Et comme

$$\sum_1^i \frac{\varphi'(x_k)}{x - x_k} = \frac{R(x)}{F(x)},$$
$$\sum_1^i \frac{\varphi'(x_k)}{t - x_k} = \frac{R(t)}{F(t)},$$

où

$$Rx = \varphi'(x) F'(x) - F(x) Q(x),$$

nous avons

$$\sum_1^i \frac{\varphi'(x_k)}{(x_k - t)(x - x_k)} = \frac{1}{x - t}\left(\frac{R(x)}{F(x)} - \frac{R(t)}{F(t)}\right),$$
$$\sum \frac{\varphi'(x_k)}{(x_k - t)^2(x - x_k)} = \frac{d}{dt}\left[\left(\frac{R(x)}{F(x)} - \frac{R(t)}{F(t)}\right)(x - t)^{-1}\right].$$

Par conséquent,

$$(23) \quad \left\{\begin{aligned}\lambda p u = x^{2n-3} + \alpha_1 x^{2n-4} + \ldots + \alpha_{2n-3} \\ + \frac{\lambda}{4}\frac{d}{dt}\left[\left(\frac{R(x)}{F(x)} - \frac{R(t)}{F(t)}\right)(x - t)^{-1}\right].\end{aligned}\right.$$

Exemple. — Soit l'intégrale réductible ([1])

$$\int \frac{(x-t)\,dx}{\sqrt{(x+a)(x^4+bx^2+2abx+a^2b)}};$$

trouver la valeur de t. Posons

$$\lambda\,\mathrm{p}\,u = \frac{f(x)}{x+a}.$$

Nous avons

$$\lambda = \left(\frac{2n-3}{2}\right)^{\frac{-2}{2n-3}} = 4,$$

$$\varphi(x) = (x+a)(x^4+bx^2+2abx+a^2b), \qquad \mathrm{F}'(x) = 1;$$

$$\varphi' x\,\mathrm{F}'(x) = 5x^4+4ax^3+3bx^2+6abx+3a^2b,$$

$$\mathrm{R}(x) = \mathrm{R}(t) = a^4.$$

D'après la formule (23), nous avons

$$\lambda\,\mathrm{p}\,u = x+\alpha_1+\frac{\lambda}{4}\,\frac{a^4}{(x+a)(t+a)^2}.$$

Aux environs du point

$$x-t = 0,$$

nous avons un développement $(x-t)$ suivant les puissances de $(u-u_1)$ avec la partie principale

$$(u-u_1)^{\frac{1}{2}}.$$

Par conséquent, dans l'égalité

$$\lambda[\mathrm{p}\,u_1+(u-u_1)\mathrm{p}'u_1+\tfrac{1}{2}(u-u_1)^2\mathrm{p}''u_1+\ldots]$$
$$= \left(\alpha_1+t+\frac{\lambda a^4}{4(t+a)^3}\right)+\left(1-\frac{\lambda a^4}{4(t+a)^4}\right)(x-t)+\ldots,$$

nous devons avoir

$$\mathrm{p}'u_1 \neq 0,$$

$$1-\frac{\lambda a^4}{4(t+a)^4} = 0;$$

d'où

$$(t+a)^4 = a^4;$$

$$t = 0, \qquad t = -2a.$$

([1]) *Bulletin des Sciences mathématiques*, 2e série, t. XXVIII, août 1904.

1re Partie -

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

WÜNSCHMANN (K.). — Ueber Berührungsbedingungen bei Integralkurven von Differentialgleichungen. Inauguraldissertation. 35 pages. Leipzig, Teubner, 1905.

L'objet du travail de M. Karl Wünschmann est l'étude des faisceaux de ∞^n courbes, définies par une équation différentielle ordinaire

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \omega\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \ldots, \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}}\right),$$

pour lesquels les conditions d'un contact du $(n-2)^{\text{ième}}$ ordre entre deux courbes infiniment voisines consistent en équations de Monge du deuxième degré. Lorsqu'il en est ainsi, on peut, par une méthode que l'on doit à M. Engel ([1]), étudier le faisceau de courbes sans en connaître les équations sous forme finie. M. Wünschmann traite successivement les cas de $n = 3, 4, 5$: il forme les conditions que doit vérifier la fonction ω pour qu'on soit dans les circonstances voulues et les équations de Monge correspondantes.

J. T.

([1]) *Berichte der Math. Ph. Klasse der k. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig*, t. LVII, 1905.

MÉLANGES.

MANUSCRITS ET PAPIERS INÉDITS DE GALOIS;

Par M. J. TANNERY.

Les manuscrits de Galois ont été remis à Joseph Liouville par Auguste Chevalier : Liouville a légué sa bibliothèque et ses papiers à l'un de ses gendres, M. de Blignières (1). Mme de Blignières s'occupe pieusement de classer les innombrables papiers de son mari et de son illustre père. Elle a recherché et su retrouver (non sans peine) les manuscrits de Galois : ceux-ci, ainsi que d'autres papiers importants, seront donnés à l'Académie des Sciences : Mme de Blignières a bien voulu, en attendant, m'autoriser à examiner les manuscrits de Galois et à en publier des extraits : je lui exprime ici ma profonde reconnaissance.

Je dois aussi des remercîments à M. Paul Dupuy, dont tous les géomètres connaissent la belle Notice sur la vie d'Évariste Galois, publiée dans les *Annales scientifiques de l'École Normale* (2). M. Dupuy a bien voulu procéder à un premier classement des

---

(1) Célestin de Blignières (1823-1905), ancien Élève de l'École Polytechnique, a été l'un des disciples directs d'Auguste Comte, l'un des plus distingués sans doute et vraiment capable, par l'étendue de son esprit et de son savoir, de comprendre pleinement la doctrine du maître. Mais l'indépendance de son caractère et l'originalité de son esprit l'ont empêché de s'enrôler dans l'un ou l'autre des partis du Positivisme. Il plaisantait parfois de son isolement et se qualifiait de *blignièriste :* on lui doit une intéressante *Exposition de la Philosophie et de la Religion positives* (Paris, Chamerot, 1857).

Pendant neuf ans (1874-1882), un commerce de pensée, très actif, s'établit entre Liouville et M. de Blignières. De ce commerce, dont l'un et l'autre ont beaucoup joui, M. de Blignières a gardé jusqu'à sa mort un souvenir singulièrement vif et présent.

(2) Tome XIII (1896) de la 3e série. Cette Notice a été reproduite, avec le portrait de Galois, dans les *Cahiers de la quinzaine* [2e cabier de la 5e série (1903)].

manuscrits qui m'avaient été remis et en séparer ceux qui appartiennent incontestablement à Galois, dont il connaît bien l'écriture.

Les lignes qui suivront, les quelques fragments ou notes que je pourrai publier n'ajouteront rien à la gloire de Galois : elles ne sont qu'un hommage rendu à cette gloire dont l'éclat n'a fait que grandir depuis la publication de Liouville.

Cette publication a été faite de la façon la plus judicieuse; mais, soixante ans plus tard, on est tenu à moins de réserve. Les mathématiciens s'intéresseront toujours à Galois, à l'homme et à ses écrits : il est de ceux dont on voudrait tout savoir.

Je ne m'occuperai guère, dans ce premier article, que des œuvres posthumes et des papiers qui s'y rapportent. Pour la plupart de ces papiers, on possède la copie de Chevalier; d'ailleurs l'écriture de Galois est, d'ordinaire, parfaitement lisible et même assez élégante; mais elle est parfois abrégée, hâtive; les ratures et les surcharges abondent; j'aurai à signaler quelques mots et quelques phrases illisibles.

L'importance de l'œuvre de Galois sera mon excuse pour la minutie de certains détails, où j'ai cru devoir entrer, et qui va jusqu'au relevé de fautes d'impression, dont le lecteur attentif ne peut manquer de s'apercevoir. Je ne me dissimule pas ce que cette minutie, en elle-même, a de puéril.

Les œuvres posthumes occupent les pages 408-444 du Tome XI (1846) du *Journal de Mathématiques pures et appliquées* et les pages 25-61 des *Œuvres mathématiques d'Évariste Galois pubiées sous les auspices de la Société mathématique de France* (1). C'est, sauf avis contraire, à ce dernier Ouvrage que se rapportent tous les renvois.

Lettre a Auguste Chevalier

(pages 25-32).

Dimensions du papier : 31×20. La lettre, datée deux fois, au commencement et à la fin (29 mai 1832), contient sept pages : le

(1) Paris, Gauthier-Villars, 1897.

bas de la septième, au-dessous de la signature, a été coupé sur une longueur d'environ 8cm.

Le verso de la dernière page contient le brouillon de deux lettres, d'ailleurs biffées, dont l'une porte une date, biffée aussi; on lit 14 mai 83; il est vraisemblable que Galois a écrit sa lettre à Chevalier sur la première feuille venue, une feuille sur laquelle il avait griffonné une quinzaine de jours auparavant.

Ces brouillons sont disposés d'une façon assez singulière : ils comportent des phrases entières, puis des lignes, blanches au milieu avec un mot au commencement et un mot à la fin : ces mots sont souvent illisibles, tant parce qu'il est impossible de leur attribuer un sens que par suite des ratures : celles-ci vont de haut en bas; il en est ainsi dans plusieurs des manuscrits de Galois; ici, elles semblent faites avec une barbe de plume, ou un bout de bois, qu'il aurait trempé dans l'encre; le premier brouillon de lettre est à gauche, le second à droite et se continue dans une autre direction; Galois a fait tourner son papier d'un angle droit. Voici ce que j'ai pu lire :

brisons là sur cette affaire je vous prie
Je n'ai pas assez d'esprit pour suivre
une conversation de ce genre
mais je tâcherai d'en avoir assez pour
converser avec vous comme je le faisais
avant que rien soit arrivé. Voilà
Mr le (*illis.*)
en a qui
doit vous qu'à
moi et ne plus penser à des choses
qui ne (*illis.*) exister et qui
n'existeront jamais

14 mai 83

J'ai suivi votre conseil et j'ai réfléchi
à qui s'est
passé sous quelque
dénomination que ce puisse (1) être (*illis.*) par s'établir
entre nous. Au reste Mr soyez (?)
persuadé qu'il n'en aurait sans doute

(1) La lecture des quatre premiers mots de cette ligne est douteuse.

jamais été davantage; vous supposez
mal et vos regrets sont mal fondés.
La vraie amitié n'existe guère
qu'entre des personnes de même sexe
Surtout des
amis. Sans doute
le *vide* qu l'absence
de tout sentiment de ce genre....
(*illis.*) confiance... mais elle a été
très (*illis.*) [1]..... vous m'avez
vû triste z demandé
le motif; je vous ai répondu que
j'avais des peines; qu'on m'avait fait
éprouver. J'ai pensé que vous prendriez
celà comme toute personne devant
laquelle on laisse tomber une parole
pour (*illis.*) on n'est
pas
le calme de mes idées me laisse
la liberté de juger avec beaucoup
de reflexion les personnes que je vois
habituellement; c'est ce qui fait que
j'ai rarement le regret de m'être
trompé ou laissé influencer à leur égard.
Je ne suis pas de votre avis pour
les (*illis.*) plus que
les (?) exiger
ni se vous remercie
sincèrement de tous *ceux* ou vous
voudrez bien descendre en ma
faveur.

J'ai collationné le manuscrit avec le texte imprimé : il n'est guère utile de parler de quelques changements de notation, sans aucune importance, qui remontent à Liouville, de dire que Galois a écrit *bulletin ferussac* et non Bulletin de Férussac, ou encore de signaler, page 29 des *Œuvres,* ligne 24, la substitution du mot « équation » au mot « réduction » que le sens indique suffisamment et qu'on lit dans le manuscrit et dans le texte de Liouville. Le point le plus intéressant est que le théorème de Legendre

[1] Il y a une tache d'encre sur le mot; on distingue nettement les deux dernières lettres *ée*.

(page 30, ligne 31),

$$FE' + EF' - FF' = \frac{\pi}{2},$$

est écrit par Galois non sous la forme qui précède, mais comme il suit :

$$E'F'' - E''F' = \frac{\pi}{2}\sqrt{-1}.$$

Mémoire sur les conditions de résolubilité par radicaux (pages 33-50) [1].

Dans les quelques lignes d'introduction au Mémoire sur les conditions de résolubilité des équations par radicaux que Galois avait biffées (d'ailleurs très légèrement) et que Chevalier a conservées avec raison, Galois dit que le Mémoire est *extrait* d'un Ouvrage qu'il a présenté à l'Académie il y a *un an*. Le manuscrit de Galois n'est pas un *extrait*, c'est le texte même qui a été remis à l'Académie. Qu'il en soit ainsi, c'est ce que Chevalier avait signalé dans une note (page 33 des *Œuvres*, note 2) ainsi conçue :

> J'ai jugé convenable de placer en tête de ce Mémoire la préface qu'on va lire, bien que je l'aie trouvée biffée dans le manuscrit. Ce manuscrit est précisément celui que l'auteur présenta à l'Académie.

La dernière phrase de cette note, qui figure dans la copie de Chevalier et sur l'épreuve dont j'ai parlé, a disparu du texte définitif. Liouville a-t-il voulu effacer la légère contradiction entre le texte et la note, a-t-il cru devoir se conformer au désir de Galois, qui semble avoir souhaité qu'on ignorât que ce Mémoire était celui-là même qu'il avait présenté à l'Académie; a-t-il jugé lui-même que, pour des raisons de convenance envers l'Académie,

---

(1) J'ai eu à ma disposition le manuscrit de Galois, la copie de Chevalier et une épreuve, corrigée de la main de Liouville, mais où ne figurent pas toutes les modifications apportées aux notes; j'aurai l'occasion de parler plusieurs fois de cette épreuve.

cette ignorance était préférable? C'est là, en vérité, des questions dont la réponse importe bien peu, non plus que la petite inexactitude du mot *extrait*. Il importe beaucoup plus que le texte du Mémoire de. Galois ne se soit pas égaré, comme le précédent, et qu'il ait pu être remis à l'auteur, qui y a fait plusieurs remaniements : ceux-ci, le plus souvent, peuvent se distinguer par l'écriture. La conjecture de Chevalier, à savoir que « Galois a relu son Mémoire pour le corriger avant d'aller sur le terrain » (note de la page 40), est tout à fait vraisemblable.

La première page de la couverture, qui subsiste, est fort sale, tachée d'encre, couverte de gribouillages, de bouts de calcul, à l'encre ou au crayon, au recto et au verso, dans tous les sens; quelques-unes des formules laissent supposer que Galois, en les traçant, pensait à quelque point de la théorie des fonctions elliptiques; d'autres se rapportent à une suite récurrente.

En haut et à droite du recto on lit (écriture de Liouville) « Rapport du 4 juillet 1831 »; puis, en titre, d'une écriture qu'il serait probablement possible d'identifier :

MM. Lacroix
Poisson

commissaires

le 17 j^er 1831

le tout suivi d'un paraphe; en face du nom de Poisson, il y a le mot *vu*, d'une grosse écriture, celle de Poisson sans doute.

Au verso, entre des taches et des calculs, Galois a écrit

Oh! chérubins.

On peut bien supposer que cette apostrophe s'adresse à MM. Lacroix et Poisson.

Le manuscrit contient onze pages (38 × 25); la marge occupe la moitié de chaque page; elle contient plusieurs notes et additions, dont les unes remontent peut-être à la première rédaction, dont les autres ont été sans doute ajoutées par Galois, lorsqu'il a revu son travail pour la dernière fois : telle est assurément celle qu'a signalée Chevalier, le tragique « je n'ai pas le tems ».

En marge de la seconde page, on trouve ces quatre noms :

V. Delaunay
N. Lebon
{ F. Gervais
{ A. Chevalier

et une liste de onze noms, soigneusement biffés.

Je dois, en passant, signaler, page 34 des *Œuvres*, l'omission de deux lignes, qui figurent dans le manuscrit et dans le texte de Liouville; elles devraient terminer l'avant-dernier alinéa :

..., en général par quantité rationnelle une quantité qui s'exprime en fonction rationnelle des coefficients de la proposée.

Dans la marge de la troisième page du manuscrit, en face du lemme III (page 36), se trouve la note au crayon que voici :

La démonstration de ce lemme n'est pas suffisante; mais il est vrai, d'après le n° 100 du Mémoire de Lagrange, Berlin, 1775.

Au-dessous, Galois a écrit :

Nous avons transcrit textuellement la démonstration que nous avons donnée de ce lemme dans un Mémoire présenté en 1830. Nous y joignons comme document historique la note suivante qu'a cru devoir y apposer M. Poisson.
On jugera.

Puis, plus bas ;

Note de l'auteur,

Galois voulait évidemment que la note de Poisson ([1]) et son propre commentaire fussent publiés. Au surplus, les notes de Poisson et de Galois figurent dans la copie de Chevalier et dans l'épreuve. Liouville les a supprimées finalement, pour des raisons évidentes.

La note de la page 37 des *Œuvres* est en face du lemme IV et semble d'une encre différente de celle du texte; mais il ne me paraît nullement certain que ce soit une addition de la dernière

---

([1]) Grâce à l'obligeance de Mme de Blignières, j'ai pu comparer l'écriture de cette note avec celle de Poisson, dans une lettre à Liouville; aucun doute ne peut subsister.

heure : je crois que Galois a dû, à cette dernière heure, remanier et développer hâtivement la démonstration de ce lemme IV; elle ne comportait probablement, dans le texte primitif, que quatre ou cinq lignes; elle est maintenant écrite, partie dans la marge, partie dans le blanc qui restait au bas de la page, d'une écriture serrée, nerveuse : au reste, un mot injurieux, biffé, et qui est de la même encre que le « chérubins » de la couverture ne laisse guère de doute sur l'impatience que ce passage a fait éprouver à l'auteur.

La note de la page 38 des *Œuvres* est en marge, en face de la proposition I. A la suite de cette note, avec l'indication « à reporter dans les définitions », se trouve ce qui est imprimé pages 35 et 36, à partir de la ligne 22 (Les substitutions sont...) jusqu'à la ligne 3 (la substitution ST); ce passage est en face du texte imprimé du milieu de la page 38 au milieu de la page 39.

En marge de la page suivante (cinquième) du manuscrit, le scholie II [1] (page 40) est immédiatement précédé de ces indications, qui sont biffées :

Ce qui caractérise un groupe. On peut partir d'une des permutations quelconques du groupe.

Vraisemblablement, c'est après avoir écrit et biffé ces lignes que Galois s'est décidé à écrire le passage « à reporter dans les définitions ». Un peu plus bas est la note «... je n'ai pas le tems », puis cinq lignes biffées, mais qui sont d'une écriture calme et remontent peut-être à la première rédaction, les voici :

Car si l'on élimine r entre $f(V, r) = 0$ et $Fr = 0$ $F(r)$ étant de degré premier p, il ne peut arriver que de deux choses l'une : ou le résultat de l'élimination sera de même degré en V que $f(V, r)$ ou il sera d'un degré p fois plus grand.

Ce passage biffé doit évidemment être rapproché des indications données dans le premier alinéa de la note de la page 40. Ces indications sont de Liouville; la note de Chevalier était ainsi conçue :

Vis-à-vis la démonstration de ce théorème, dans le manuscrit j'ai trouvé ceci

« Il y a quelque chose... »

---

(1) Les numéros I, II des scholies (p. 39 et 40) ne sont pas dans le manuscrit.

C'est ainsi qu'elle figure dans l'épreuve. Les six premières lignes de la note de la page 40 sont donc de Liouville.

Au reste, Liouville a été visiblement préoccupé de cet endroit (proposition II) du texte de Galois : il a jugé un moment convenable de reprendre l'hypothèse primitive de Galois (p premier) et d'éclaircir complètement la démonstration dans ce cas, par une note que je crois devoir transcrire, non pas qu'elle puisse apprendre quelque chose au lecteur, mais parce qu'elle me semble une trace touchante des soins et des scrupules que Liouville apportait dans sa publication; le renvoi correspondrait à la ligne 20 de la page 40 des *Œuvres :*

Ceci mérite d'être expliqué avec quelque détail.

Désignons par $\psi(V) = 0$ l'équation dont l'auteur parle, et soient $f(V, r)$, $f_1(V, r)$, ..., $f_{i-1}(V, r)$ les facteurs irréductibles dans lesquels $\psi(V)$ devient décomposable par l'adjonction de r, en sorte que

$$\psi(V) = f(V, r) f_1(V, r) \ldots f_{i-1}(V, r).$$

Comme r est racine d'une équation irréductible, on pourra dans le second membre remplacer r par r', r'', ..., $r^{(p-1)}$. Ainsi $\psi(V)^p$ est le produit des i quantités suivantes

$$\begin{array}{lll} f(V, r) & f(V, r') \ldots & f(V, r^{(p-1)}) \\ f_1(V, r) & f_1(V, r') \ldots & f_1(V, r^{(p-1)}) \\ f_{i-1}(V, r) & f_{i-1}(V, r') \ldots & f_{i-1}(V, r^{(p-1)}), \end{array}$$

dont chacune, symétrique en r, r', ..., $r^{(p-1)}$ et par suite exprimable en fonction rationnelle de V indépendamment de toute adjonction, doit diviser $\psi(V)^p$ et se réduire en conséquence à une simple puissance du polynome $\psi(V)$ qui cesse de se résoudre en facteurs lorsqu'on n'adjoint pas les auxiliaires r, r', etc. J'ajoute que le degré de la puissance est le même pour toutes. En effet, les équations $f(V, r) = 0$, $f_1(V, r) = 0$, ..., $f_{i-1}(V, r) = 0$ qui dérivent de $\psi(V) = 0$ et dont les racines sont fonctions rationnelles les unes des autres ne peuvent manquer d'être du même degré. En faisant donc

$$f(V, r) f(V, r') \ldots f(V, r^{(p-1)}) = \psi(V)^\mu,$$

on en conclura $p = i\mu$. Mais p est premier et $i > 1$; donc on a $i = p$, d'où $\mu = 1$, et enfin

$$\psi(V) = f(V, r) f(V, r') \ldots f(V, r^{(p-1)}).$$

Ce qu'il fallait démontrer.

(J. LIOUVILLE.)

Assurément, en rédigeant cette note, Liouville se conformait au précepte d'être « transcendantalement clair » qu'il a rappelé dans l'avertissement aux *Œuvres mathématiques* de Galois. Il s'est aperçu ensuite, en réfléchissant davantage, que la proposition II n'impliquait pas que le nombre p fût premier et il a soigneusement noté les différences essentielles entre les deux rédactions successives de l'auteur. Qu'il ait reculé devant les explications nécessaires pour donner à la pensée de Galois toute la clarté qu'il faudrait, cela, aujourd'hui, n'a aucun inconvénient.

Page 41 des *Œuvres*, les lettres μ, ν remplacent les lettres p, n dont s'est servi Galois; pareil changement a été fait dans la lettre à Chevalier; ces petites modifications, destinées à éviter des confusions possibles, sont de Liouville : les lettres p, n figurent encore dans l'épreuve.

Les lignes 7, 8, 9 de la même page sont une addition marginale, mais qui ne semble pas de la dernière heure. Cette addition est suivie de la nouvelle rédaction de la proposition III, datée de 1832, sur laquelle l'attention est appelée dans la note qui est au bas de la page qui nous occupe. Ici encore, Liouville est intervenu; la note de Chevalier était ainsi conçue :

Dans le manuscrit de Galois l'énoncé du théorème qu'on vient de lire se trouve en marge et vis-à-vis de la démonstration qu'il en avait écrite d'abord. Celle-ci est effacée avec soin; l'énoncé précédent porte la date 1832 et montre par la manière dont il est écrit que l'auteur était extrêmement pressé : ce qui confirme l'assertion que j'ai avancée dans la note précédente.

C'est donc Liouville qui a déchiffré et intercalé le texte primitif de la proposition III.

La phrase (il suffit ... substitutions), placée entre parenthèses au bas de la page 43 des *Œuvres* et en haut de la page 44, est une note marginale.

Page 46, ligne 24, Galois a simplement écrit « *Journal de l'École*, XVII ».

Il y a dans les manuscrits de Galois une feuille (double) qui est une sorte de brouillon de la proposition V; ce brouillon a passé en grande partie dans la rédaction du Mémoire (1).

(1) Je ne pense pas qu'il y ait intérêt à publier ce brouillon.

Avant de parler du manuscrit contenant le fragment imprimé dans les dernières pages des *Œuvres,* je dois dire un mot d'une feuille détachée (¹) en partie déchirée, qui, par le format du papier, la couleur de l'encre et la forme de l'écriture, paraît avoir appartenu au cahier dont ce manuscrit faisait partie. Elle contient une rédaction antérieure de la proposition I et de sa démonstration, rédaction qui semble avoir été écrite au moment même où Galois venait de trouver cette démonstration : l'énoncé de la proposition fondamentale est, presque textuellement, le même que dans le Mémoire sur les conditions de résolubilité, puis viennent seize lignes barrées que je reproduis :

Considérons d'abord un cas particulier. Supposons que l'équation donnée n'ait aucun diviseur rationnel et que toutes ses racines se déduisent rationnellement de l'une quelconque d'entre elles. La proposition sera facile à démontrer.

En effet, dans notre hypothèse, toute fonction des racines s'exprimera en fonction d'une seule racine et sera de la forme φx, x étant une racine. Soient

$$x \qquad x_1 = f_1 x \qquad x_2 = f_2 x \qquad \ldots, \qquad x_{m-1} = f_{m-1} x$$

les m racines. Écrivons les m permutations

$$\begin{array}{lllll} x & f_1 x & f_2 x & \ldots & f_{m-1} x \\ x_1 & f_1 x_1 & f_2 x_1 & \ldots & f_{m-1} x_1 \\ x_2 & f_1 x_2 & f_2 x_2 & \ldots & f_{m-1} x_2 \\ \cdot\cdot & \cdot\cdot\cdot\cdot & \cdot\cdot\cdot\cdot & \cdot\cdot\cdot & \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot \\ x_{m-1} & f_1 x_{m-1} & f_2 x_{m-2} & \ldots & f_{m-1} x_{m-1} \end{array}$$

Le reste de la démonstration suivait, contenu dans une douzaine de lignes qui sont devenues les lignes 13-26 de la page 39 des *Œuvres :* on distingue assez bien les x surchargés des V de la rédaction définitive; ces douze lignes sont d'ailleurs réunies en marge par un trait, avec l'indication : *à reporter plus loin.* Galois a changé d'idée; il trouve *maintenant* inutile de s'arrêter au cas particulier; mais il semble que ce cas particulier lui ait été d'abord

(¹) C'est M. P. Dupuy qui a appelé mon attention sur cette feuille. Quelques autres débris apportent un peu de lueur sur la suite des idées de Galois : ils seront publiés dans un second article.

nécessaire, car les douze lignes que je viens de dire sont suivies de celles-ci :

Le théorème est donc démontré dans l'hypothèse particulière que nous avons établie.
Revenons au cas général.

Ces trois lignes sont biffées avec un soin particulier, Galois est en possession de la démonstration générale, sous la forme simple et définitive; il est joyeux; il couvre de hachures les seize lignes puis les trois lignes dont il n'a plus besoin. Vient ensuite la vraie démonstration, les deux dernières lignes de la page 38 des *Œuvres* et le commencement de la page 39, jusqu'à : « je dis que ce groupe de permutations jouit de la propriété énoncée ». Puis l'indication, en marge, à demi déchirée : *mettre ici la partie sautée*, et les lignes 24, 25 de la page 39 des *Œuvres*.

Ne semble-t-il pas qu'on assiste à un moment essentiel dans le développement de la pensée de Galois? L'émotion s'accroît encore à la lecture des lignes du bas de la feuille, couvertes de ratures et de surcharges, et où le nom propre a disparu dans un trou, produit d'une tache et de l'usure :

Je dois observer que j'avais d'abord démontré le théorème autrement, sans penser à me servir de cette propriété très simple des équations, propriété que je regardais comme une conséquence du théorème. C'est la lecture d'un Mémoire qui m'a suggéré

La fin de la ligne est indéchiffrable : après *suggéré,* il y a des mots, l'un au-dessus de l'autre, qui sont biffés, peut-être *cette* surmonté de *la pensée,* puis, dans la partie la plus usée du papier, *assertion* ou *analyse,* ou autre chose, et enfin, plus bas, je crois lire *que je dois*. Quant au nom propre, les quelques traits qui subsistent, à côté du trou, ne confirment pas la supposition qui vient de suite à l'esprit (page 37, ligne 11), que ce nom est celui d'Abel.

Sur la marge de cette curieuse feuille, se trouvent encore quelques formules, à demi effacées, qui correspondent visiblement aux lemmes II et III.

DES ÉQUATIONS PRIMITIVES QUI SONT SOLUBLES PAR RADICAUX (¹)

(pages 51-61).

Le manuscrit du « Mémoire sur les conditions de résolubilité des équations par radicaux », après la petite introduction biffée par Galois et reproduite par Chevalier, porte l'indication « 1er Mémoire »; le fragment « Des équations primitives qui sont solubles par radicaux », écrit sur du papier plus petit (35×22), commence au milieu d'une page. La moitié supérieure de cette page contient vingt lignes de Galois, qui sont biffées et que je reproduis plus loin; dans la marge, en face de la dernière ligne, suivie d'un grand trait horizontal, se trouvent les mots « fin du Mémoire », écrits par Galois lui-même, si je ne me trompe; au-dessous du trait est le titre du fragment et, en face, les mots « Second Mémoire » : ce fragment ou second Mémoire commence par les mots :

Revenons maintenant à notre objet et

que Chevalier a supprimés. Voici le commencement de la page qui, je le répète, est biffé dans le manuscrit :

soient représentés par

$$\varphi_1 x, \quad \varphi_2(x), \quad \varphi_3(x) \quad \ldots\ldots \quad \varphi_{n-1}(x)$$

je dis que, P et p étant des nombres quelconques, on aura

$$(P-p)(P-\varphi_1 p)(P-\varphi_2 p)(P-\varphi_3 p)\ldots(P-\varphi_{n-1}p) \equiv F(P) \pmod{Fp}.$$

Démonstration : Il suit de l'hypothèse que l'on pourra par des opérations entières et rationnelles déduire de l'équation

$$Fx = 0$$

celle-ci

$$(P-x)(P-\varphi_1 x)(P-\varphi_2 x)\ldots(P-\varphi_{n-1}x) = F(P)$$

quel que soit P.

(¹) On a le manuscrit et la copie par Chevalier de ce fragment.

Or on a évidemment

$$Fp = 0 \quad (\text{mod. } Fp).$$

Donc, en substituant les congruences aux égalités, on aura le théorème énoncé.

Corollaire : *Soit* $Fx = \frac{x^\nu - 1}{x - 1}$, *$\nu$ étant premier nous aurons* $\varphi_1 x = x^2$ $\varphi_2 x = x^3$ ..... *Donc on aura en général, si ν est un nombre premier,*

$$(P - p)(P - p^2)(P - p^3)\dots(P - p^{\nu-1}) = \frac{P^\nu - 1}{P - 1} \qquad \left(\text{mod. } \frac{p^\nu - 1}{p - 1}\right).$$

Si enfin l'on fait $P = p^\nu$ on aura le théorème suivant

$$(p^\nu - p)(p^\nu - p^2)(p^\nu - p^3)\dots\dots(p^\nu - p^{\nu-1}) = \nu \qquad \left(\text{mod } \frac{p^\nu - 1}{p - 1}\right),$$

ν étant premier.

Quelques fragments, qui seront publiés ultérieurement, paraissent se rapporter au même ordre d'idées.

Le manuscrit du fragment sur *Les équations primitives*... contient dix pages. On n'a pas ici de raisons de penser que les additions qui sont en marge ne soient pas à peu près contemporaines de la rédaction; je les note cependant :

Page 53 des *Œuvres,* lignes 19 et 20 : « en remplaçant... indices ».

Page 57 : de la ligne 5 à la ligne 18.

Page 59, ligne 21, à partir de : « et de là... » et les lignes 22 et 23.

Voici maintenant les observations qui résultent de la comparaison du texte imprimé et des manuscrits de Galois et de Chevalier.

Liouville a imprimé les indices comme Galois les disposait, par exemple,

$$a_{\underset{1}{k}\cdot\underset{2}{k}},$$

pour désigner une lettre a dont les indices sont

$$\underset{1}{k} \quad \text{et} \quad \underset{2}{k};$$

dans les *Œuvres*, on a adopté la notation, plus conforme aux habitudes actuelles,

$$a_{k_1, k_2}.$$

Page 52 des *Œuvres*, ligne 4 : à la place de « en premier lieu » il y a 1° dans le manuscrit; la correction est de Liouville.

Page 53, ligne 9, on doit lire

$$a_{k_1, k_2, \ldots, k_\mu} \quad \text{et non} \quad a_{k_1, k_1, \ldots, k_\mu}.$$

Page 53, ligne 14, on doit lire

$$a_{\varphi(k_1), \psi(k_2), \chi(k_3), \ldots, \sigma(k_\mu)} \quad \text{et non} \quad a_{\varphi(k_1), \psi(k)_2, \chi(k_3), \ldots, \sigma(k_\mu)}.$$

Page 54, ligne 12, on doit lire

$$a_{mk_1+n, k_2} \quad \text{et non} \quad a_{mk_1+nk_2}.$$

Page 55, ligne 3, on a imprimé à tort

$$a_{m_1 k_1 + n_1 k + \alpha_1 m_2 k_1 + n_2 k_2 + \alpha_2};$$

d'après le texte de Galois, de Chevalier et de Liouville, il faudrait

$$a_{m_1 k_1 + n_1 k_2 + \alpha_1, m_2 k_1 + n_2 k_1 + \alpha_2};$$

si je ne me trompe, on doit lire

$$a_{m_1 k_1 + n_1 k_2 + \alpha_1, m_2 k_1 + n_2 k_2 + \alpha_2}$$

(*voir* page 56, ligne 25).

Page 57, ligne 3 : le mot « est » manque dans le texte de Galois.

Page 57, ligne 16 : Galois a écrit

< 2 et est par conséquent 0 ou 1

et non

< 2 et se trouve par conséquent être 0 ou 1.

Cette correction et la précédente sont de Chevalier.

Page 58, ligne 28; on a imprimé correctement

$$b_{m_1 k_1 + n_1 k_2, m_2 k_1 + n_2 k_2},$$

en corrigeant une faute commise par Chevalier et répétée par Liouville; Chevalier a écrit m_1 à la place de n_1; il y a d'ailleurs une surcharge dans le manuscrit de Galois, mais la lecture n'est pas douteuse.

Voici maintenant quelques observations concernant les pièces A, B, C, D, E que le lecteur trouvera plus loin.

A. Le fragment du *Discours préliminaire* est écrit sur les deux faces d'une même feuille : l'écriture est ferme, rapide, presque joyeuse ; les ratures abondent ; c'est un premier jet. Dans la marge, deux taches d'encre que Galois a sûrement faites en effaçant le mot Evariste, qu'il venait d'écrire sur un prénom féminin. Un monogramme formé des lettres E S, entrelacées d'une façon assez élégante, est répété deux fois. Au reste, Galois écrivait volontiers son prénom et son nom, sans doute en suivant quelque pensée : à la fin de la pièce E, j'ai compté une douzaine d'*Evariste* écrits dans tous les sens ; il y avait, en outre, *Eva, Evar*..., plusieurs *E*, trois *Galois*...

Le fragment a été copié par Chevalier ; outre la note qu'on lira plus loin, sa copie contient, en haut et à gauche, l'indication que voici et qu'il a biffée :

Discours préliminaire fait en 7bre 1830.

B. La pièce B, qui est d'ailleurs en deux morceaux, est le haut d'une feuille (double) qui, si l'on en juge par la largeur, est à peu près du même format que le papier sur lequel est écrite la lettre à Chevalier. Le bas est déchiré. Les mots *note de l'éditeur* sont de la main de Galois. La note se trouve sur un morceau détaché, qui contient une partie des trois dernières lignes du passage biffé que j'ai reproduit ; il se raccorde parfaitement avec la dernière page. Cette pièce ne porte pas de date ; je pense, d'après l'avis de M. Dupuy, qu'elle a été écrite à la prison de Sainte-Pélagie.

Il convient de rapprocher, des indications qu'elle fournit, celles-ci que je trouve sur une feuille déchirée :

1er Mémoire sur les conditions de résolubilité des équations par radicaux

(Janvier 1830)

2e Mémoire sur le même sujet

(Juin 1830)

Mémoire sur les Equations modulaires des fonctions elliptiques

(Février 1832)

Mémoire sur les fonctions de la forme $\int X dx$, X étant une fonction quelconque algébrique

(Septembre 1831).

Sur la même feuille, de l'autre côté, se trouvent les phrases suivantes :

C'est aujourd'hui une vérité vulgaire que les équations générales de degré supérieur au 4ᵉ ne peuvent se résoudre par radicaux, c'est-à-dire que leurs racines ne peuvent s'exprimer par des fonctions des coefficients qui ne contiendraient pas d'autres irrationnelles que des radicaux.

Cette vérité est devenue vulgaire, en quelque sorte par ouï-dire et quoique la plupart des géomètres en ignorent les démonstrations présentées par Ruffini, Abel, etc., démonstration fondée sur ce qu'une telle solution est déjà impossible au cinquième degré.

Il paraît, au premier abord, que là se termine la
de la résolution par radicaux.

Ce qui suivait a été déchiré.

Le reste de cette feuille contient des calculs, en partie numériques, d'autres qui se rapportent à l'équation modulaire pour $n = 3$, à des essais de développements en fraction continue, etc.

C. La pièce C existe en entier, en double, de la main de Galois de celle de Chevalier. Après l'avoir lue et relue, je me suis décidé à n'en publier qu'un extrait, la fin, un peu moins de la moitié; c'est que je suis arrivé à cette conviction qu'en écrivant les premières pages, Galois n'était pas en possession de lui-même : le malheureux enfant était en prison, il avait la fièvre, ou il était encore sous l'influence des boissons que ses compagnons de captivité le forçaient parfois d'avaler. Dans ces pages, sans intérêt scientifique, la continuelle ironie fatigue par sa tristesse; les injures à Poisson, aux examinateurs de l'École polytechnique, à tout l'Institut sont directes et atroces; certaines allusions sont obscures et veulent être perfides; les plaisanteries, assez lourdes, se prolongent d'une façon fastidieuse et maladive; il y a tel passage où l'écriture est si désordonnée, si surchargée, que Chevalier lui-même n'a pu, à ce qu'il semble, le lire complètement; telles notes qu'il n'a pas voulu reproduire dans sa copie. On est moins devant la souffrance morale que devant la souffrance physique qui la

double; je crois que la curiosité qui s'adresse au génie n'exclut pas toute pudeur, et je n'ai pas voulu imposer au lecteur la vue de cette douleur exaspérée : celui-ci connaît, par le travail de M. Dupuy, la vie, l'exaltation, les tortures de Galois, et ne s'étonnera pas qu'il se soit plaint. Vers le milieu de la préface, la pensée se calme ; c'est de mathématiques qu'il s'agit ; la sérénité revient.

D. E. F. Bien que les trois morceaux ne se relient que d'une façon assez lâche au sujet traité dans ce premier article [1], je les publie ici.

Les fragments D, E sont écrits sur une seule feuille ($31,5 \times 20$), du même format, à peu près, que la lettre à Chevalier : dans la copie qu'a faite ce dernier, ils se suivent, séparés par plusieurs lignes de points. Ils devaient évidemment faire partie d'un même ensemble et Chevalier a mis au commencement la note suivante :

> Je place ici quelques notes recueillies dans les papiers de Galois. Elles sont relatives à une série d'articles, sur les progrès de l'analyse pure, qu'il voulait publier dans un journal scientifique.
>
> (A. Ch.)

Dans le manuscrit de Galois, la pièce D occupe une grande page ; puis, la feuille étant pliée, la pièce E tient une (petite) page et demie. Le manuscrit est plein de ratures, de surcharges, de dessins à la plume, de taches d'encre ; quelques passages, comme on s'en assurera à la lecture, auraient besoin d'être retouchés ou complétés ; la difficulté même de la lecture m'a amené à dater approximativement le manuscrit ; en l'examinant à la loupe, j'ai aperçu quelques mots écrits à l'envers, et en le retournant j'ai pu distinguer ces mots, dont la disposition semble indiquer que Galois n'avait pas de goût pour le calcul mental :

jeudi 29 mars
dimanche 1
lundi 2 avril
mardi 3
jeudi
vendredi.

---

[1] Le second sera consacré à des pièces purement mathématiques.

Le premier avril de l'année 1832 étant un dimanche, le doute n'est pas possible, puisque Galois est mort le 30 mai 1832.

Le fragment F se trouve en tête d'une feuille couverte de calculs et de dessins à la plume ; par la pensée, il se rattache aux pièces D, E.

G. Enfin le bizarre fragment G se trouve sur une feuille déchirée ; aucun indice ne me permet de lui donner une date approximative.

Jules Tannery.

PAPIERS INÉDITS D'ÉVARISTE GALOIS.

A

Discours préliminaire (¹).

Le mémoire qui suit a été adressé il y a environ sept mois à l'Académie des sciences de Paris, et égaré par les commissaires qui devaient l'examiner. Cet ouvrage n'a donc, pour se faire lire, acquis aucune autorité et cette raison n'était pas la dernière qui retenait l'auteur dans sa publication. S'il s'y décide, c'est par crainte que des géomètres plus habiles, en s'emparant du même champ, ne lui fassent perdre les fruits d'un long travail.

Le but que l'on s'est proposé est de déterminer des caractères pour la résolubilité des équations par radicaux. Nous pouvons affirmer qu'il n'existe pas dans l'analyse pure de matière plus obscure et peut-être plus isolée de tout le reste. La nouveauté de cette matière a exigé l'emploi de nouvelles dénominations, de nouveaux caractères. Nous ne doutons pas que cet inconvénient ne rebûte des les premiers pas le lecteur qui pardonne à peine aux auteurs qui ont tout son credit, de lui parler un nouveau langage. Mais enfin, force nous a été de nous conformer à la nécessité du sujet dont l'importance mérite sans doute quelque attention.

Etant donnée une équation algebrique, à coefficients quelconques, numeriques ou litteraux, reconnaître si ses racines peuvent s'exprimer en radicaux, telle est la question dont nous offrons une solution complète.

Si maintenant vous me donnez une équation que vous aurez

(¹) Ce qui suit est un fragment du discours préliminaire destiné par Galois à être placé en tête du Mémoire sur la théorie des équations qu'il avait résolu de publier. Ce projet formé en septembre 1830 n'a pas [eu] de suite; des obstacles de tout genre s'y sont opposés.

(*Note d'Auguste Chevalier.*)

choisie à votre gré et que vous desiriez connaitre si elle est ou non soluble par radicaux, je n'aurai rien à y faire que de vous indiquer le moyen de répondre à votre question, sans vouloir charger ni moi ni personne de le faire. En un mot les calculs sont impraticables.

Il paraitrait d'après celà qu'il n'y a aucun fruit à tirer de la solution que nous proposons.

En effet, il en serait ainsi si la question se présentait ordinairement sous ce point de vue. Mais, la plupart du tems, dans les applications de l'analyse algébrique, ont est conduit à des équations dont on connait d'avance toutes les propriétés : propriétés au moyen desquelles il sera toujours aisé de répondre à la question par les règles que nous exposerons. Il existe, en effet, pour ces sortes d'équations, un certain ordre de considérations Métaphysiques qui planent sur tous les calculs, et qui souvent les rendent inutiles. Je citerai, par exemple, les équations qui donnent la division des fonctions Elliptiques et que le célèbre Abel a résolues. Ce n'est certainement pas d'après leur forme numérique que ce géomètre y est parvenu. Tout ce qui fait la beauté et à la fois la difficulté de cette théorie, c'est qu'on a sans cesse à indiquer la marche des calculs et à prévoir les résultats sans jamais pouvoir les effectuer. Je citerai encore les équations modulaires.

B

[Première page.]

Deux Mémoires d'Analyse pure suivis d'une dissertation sur la classification des problèmes par Évariste Galois.

[Deuxième page.]

Table des matières.

[Troisième page (1).]

Ampère
Cauchy
Gauss
Hachette
Jacobi
Lacroix
Legendre
Poinsot
Poisson
Sturm
Vernier
Richard
Bulletin des Sciences
École normale
École Polytechnique
Institut.

(1) Cette liste se trouve à droite; à gauche est une autre liste de noms, à peu près les mêmes : tous ces noms sont biffés, sauf ceux de Sturm, de Richard et un

[Quatrième page.]

Abel paraît être l'auteur qui s'est le plus occupé de cette théorie. On sait qu'après avoir cru trouver la résolution des équations (générales) du cinquième degré ([1]), ce géomètre a démontré l'impossibilité de cette résolution. Mais, dans le mémoire allemand publié à cet effet, l'impossibilité en question n'est prouvée que par des raisonnements relatifs au degré des équations auxiliaires et à l'époque de cette publication, il est certain qu'Abel ignorait les circonstances particulières de la résolution par radicaux. Je n'ai donc parlé de ce mémoire qu'afin de déclarer qu'il n'a aucun rapport avec ma théorie.

[*Passage biffé :* Depuis, une lettre particulière adressée par Abel à M. Legendre annonçait qu'il avait eu le bonheur de découvrir une règle pour reconnaître si une équation est [ou était] résoluble par radicaux; mais la mort anticipée de ce géomètre ayant privé la science de ses recherches, promises dans cette lettre, il n'en était pas moins nécessaire de donner une solution de ce problème qu'il m'est bien pénible de posséder, puisque je dois cette possession à une des plus grandes pertes qu'aura (?) faites la science.

Dans tous les cas, il me serait aisé de prouver que j'ignorais même le nom d'Abel, quand j'ai présenté à l'Institut mes premières recherches sur la théorie des équations et que la solution d'Abel n'aurait pu paraître avant la mienne.]

---

autre que je n'ai pu déchiffrer. Parmi les noms de cette première liste, qui ne figurent pas dans la seconde, je distingue ceux de :

Blanchet, Leroy, Poullet de l'Isle, Francœur.

([1]) Même erreur est arrivée en 1828 à l'auteur (il avait seize ans). Ce n'est pas la seule analogie frappante entre le géomètre Norvégien mort de faim, et le géomètre français condamné à vivre ou à mourir, comme on voudra, sous les verrous d'une prison.

(*Note de l'éditeur.*)

(*A suivre.*)

1re Partie –

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

SÜSS (A.). — Die Gruppen, die mit der allgemeinen projectiven Gruppe der Ebene gleiche Zusammensetzung haben. Inaugural-Dissertation, 32 pages. Dresde, Teubner, 1905.

M. Alfred Süss s'est proposé de former les groupes qui ont même composition que le groupe projectif général du plan. Les deux tiers de son travail, environ, sont consacrés aux transformations ponctuelles. Il parvient à déterminer pour les différents types, ou ensembles de groupes semblables, un groupe transitif du caractère considéré. Cette détermination dépend d'un système complet d'équations aux dérivées partielles dont les travaux de MM. Schur et Engel ont montré que, pour le but proposé, il n'était pas nécessaire de faire l'intégration complète. M. Süss traite ensuite des transformations de contact et des relations entre les types de transformations ponctuelles et de transformations de contact. J. T.

LEBESGUE (Henri). — Leçons sur les séries trigonométriques.

Si le livre de M. Lebesgue avait besoin d'une justification, il la trouverait largement dans le grand nombre de matériaux nouveaux et non encore codifiés qui se sont ajoutés au corps de la théorie des séries trigonométriques.

Cette théorie, en effet, a fait récemment des progrès assez importants. Il me semble que, dans l'histoire de son développement moderne, on peut distinguer deux périodes : les résultats

de la première période ont été, depuis longtemps, incorporés aux traités classiques ; ceux de la seconde période ne s'y trouvent que par exception. Dans la *première période,* qui va à peu près de Dirichlet à Riemann, on s'est occupé des *conditions de convergence* des séries de Fourier. C'est surtout sous l'impulsion de Weierstrass qu'abandonnant ces recherches, dont l'intérêt semblait épuisé, on passa, dans la deuxième période, à l'approximation des fonctions continues par des séries trigonométriques finies. D'ailleurs, comme le fait remarquer M. Lebesgue, cet ordre d'idées a déjà été inauguré par la « méthode de la dérivée seconde généralisée », base du mémoire de Riemann (Chap. IV, nº 49) [1]. Ces études se terminent par le travail de M. Fejér, dont les résultats dépassent ceux de ses prédécesseurs par leur extrême simplicité. Mais, de plus, M. Fejér met à jour la source commune de tous ces développements en établissant que la série de Fourier d'une fonction continue est simplement indéterminée au sens de M. Cesàro. C'est un énoncé sur le caractère de divergence de ces séries. On peut dire, d'une façon générale, que la *seconde période* est consacrée aux *séries trigonométriques divergentes.* En effet, aux travaux sur l'approximation trigonométrique viennent s'ajouter d'autres recherches s'occupant également des séries divergentes : d'abord, le mémoire de Paul du Bois-Reymond sur les conditions de divergence, puis les résultats de M. Hurwitz sur la multiplication de deux séries de Fourier divergentes, ainsi que ceux, bien plus simples, sur l'intégration de ces séries terme à terme.

M. Lebesgue a réuni tous ces développements en les présentant d'une façon uniforme et en les rattachant aux résultats classiques (Chap. IV). Ce fait seul suffit pour assurer à son livre l'intérêt des mathématiciens.

Mais il y a plus. Les démonstrations classiques (de la convergence, par exemple), tout en se fondant sur des principes simples et lucides, sont encombrées par des calculs et des raisonnements assez pénibles et faits *ad hoc* qui rendent quelque peu difficile

---

[1] Sauf indication contraire, les citations se rapportent toujours au livre de M. Lebesgue. Il est digne de remarque que les formules du numéro cité, par le fait formules de Riemann, ont dernièrement été retrouvées, par un procédé légèrement différent, par M. Stekloff. (Voir *Bulletin de l'Académie de Cracovie,* 1903.)

l'abord de la théorie. La théorie moderne des fonctions d'une variable réelle, avec son langage souple et précis, dû à l'introduction systématique de la notion d'ensemble, permet d'exposer d'une façon naturelle et simple les points obscurs. C'est à M. Lebesgue lui-même que revient le mérite d'avoir remanié de cette façon les démonstrations classiques. On se convaincra à la lecture de tout l'avantage qu'en tire l'exposition; mais, en outre, cette reprise a permis d'apporter aux résultats des compléments importants. En effet, M. Lebesgue a réussi à donner une forme nouvelle et plus générale des conditions suffisantes de convergence, forme qui implique tous les autres critères qu'on a énoncés. C'est là, sans doute, un progrès essentiel (Chap. III) ([1]).

Ces connaissances de la théorie des ensembles et des fonctions d'une variable réelle qui seront employées dans la suite, M. Lebesgue les réunit dans une introduction qui précède le corps de l'ouvrage. Cet arrangement facilite beaucoup l'exposition. On s'en assurera en remarquant que les théorèmes sur l'ordre de grandeur des coefficients d'une série de Fourier (Chap. III, n° 34) et d'une série trigonométrique convergente (Chap. V, n° 57) sont des conséquences immédiates de la mesurabilité et d'un théorème donné dans le n° 10. Mais cette Introduction est d'un intérêt plus général. Elle contient, en effet, un exposé parfait de clarté et de précision des notions qui sont développées plus longuement dans le livre antérieur de M. Lebesgue : *Leçons sur l'intégration*. Je crois que pour des renseignements rapides on aura souvent avantage à consulter l'Introduction au lieu des Leçons.

Il y a un autre point que je tiens à relever parce qu'il constitue une particularité du livre de M. Lebesgue : c'est que, dans tous les Traités que je connais, on ne présente pas sous leur jour véritable les résultats du mémoire de Riemann. On n'y emprunte que la méthode de la dérivée seconde généralisée, à cause de l'usage qu'en a fait plus tard G. Cantor; on laisse complètement

---

([1]) Dans l'énoncé de ce critère, ainsi, du reste, que dans tout le livre, M. Lebesgue se sert de l'extension de la notion d'intégrale qu'il a introduite en Analyse. Pour l'enseignement, il n'est peut-être pas inutile de remarquer que le nouveau critère subsiste et conserve ses avantages si l'on prend l'intégrale au sens de Riemann.

de côté le point capital, à savoir que Riemann y formule des conditions nécessaires et suffisantes pour la convergence d'une série trigonométrique. M. Lebesgue n'a pas voulu « mutiler la pensée de Riemann », suivant l'expression de M. Picard ; il a entrepris (Chap. VIII) de présenter en son entier cette analyse ingénieuse, entreprise d'une grande difficulté, qui, même si, comme je le pense, elle n'est pas complètement réussie, mérite cependant d'être approuvée sans restriction.

Les théorèmes indiqués répondent d'une manière à peu près satisfaisante aux questions d'ordre *théorique* qui se posent par rapport aux séries trigonométriques. Il n'en est pas ainsi des questions d'ordre *pratique*. Il s'agit de l'interpolation trigonométrique que M. Lebesgue esquisse rapidement au Chapitre II. J'y insisterai un peu plus longuement parce qu'il me semble qu'il y a là des problèmes qui méritent d'être étudiés à fond et qui, probablement, ne seront pas faciles à résoudre.

Comme point de départ, il y a le théorème de Bessel que les coefficients d'un polynome trigonométrique approximant une fonction d'après les règles de la méthode des moindres carrés, se calculent par le procédé de Fourier. Je m'étonne que M. Lebesgue ne parle pas de ce théorème qui fournit le seul moyen rigoureux d'arriver aux coefficients de Fourier. Il s'agit ensuite du degré d'approximation qu'on obtient en remplaçant une fonction continue f par son polynome de Fourier d'ordre n. Mais cette évaluation du reste est loin d'être faite. Les méthodes qu'on y emploie, la comparaison des séries de Fourier aux séries *absolument* convergentes, négligent justement le point important de la question : l'influence de l'ordre des termes. Aussi les résultats sont-ils tellement peu précis qu'ils ne rendent aucun service dans les applications. Il y aurait surtout un point à éclaircir : la convergence ou divergence d'une série de Fourier en un point donné ne dépend que de la façon dont se comporte la fonction f au voisinage de ce point. Il n'en sera pas de même en général de la *rapidité* de la convergence, c'est-à-dire de l'ordre de grandeur du reste. Mais il me paraît très probable qu'en modifiant convenablement les énoncés on arrivera à des résultats au moins analogues. Il faudrait, pour cela, reprendre l'intégrale de Dirichlet et en déterminer l'ordre de

grandeur, en assujettissant la fonction f à des conditions plus restrictives que celles que l'on fait dans l'étude de la convergence seule.

M. Lebesgue a insisté sur le côté historique des séries trigonométriques. Les indications qu'il donne sur les procédés des inventeurs de la théorie, Euler, Fourier, Poisson, sont très intéressantes; je citerai aussi les applications qu'il a tirées de leurs ouvrages (*voir*, par exemple, Chap. IV, le problème de Jean Bernoulli). Qu'il me soit toutefois permis de faire une légère critique bibliographique. M. Lebesgue, pour toutes les questions historiques, renvoie le lecteur au petit livre d'Arnold Sachse, paru il y a quelque vingt ans. Or nous avons maintenant le grand Rapport de M. Burkhardt : *Bericht über die Entwicklungen nach oscillierenden Funktionen* (*Jahresbericht der deutschen Mathematiker-Vereinigung*, Bd. 10), ouvrage écrit avec un soin minutieux et une érudition tout à fait remarquable, et dont les résultats ont sensiblement modifié nos connaissances sur l'origine des séries trigonométriques. C'est donc à ce Rapport qu'il aurait plutôt fallu renvoyer.

Je n'insisterai pas sur les détails du livre. M. Lebesgue y a introduit plusieurs démonstrations nouvelles et très élégantes. Le tout porte l'empreinte de son travail personnel.

OTTO BLUMENTHAL.

MÉLANGES.

MANUSCRITS ET PAPIERS INÉDITS DE GALOIS;

PAR M. J. TANNERY.

(*Suite.*)

C

DEUX MÉMOIRES D'ANALYSE PURE PAR E. GALOIS

Préface.

Cecy est un livre de bonne foy.

MONTAIGNE.

. . . .

. . . .

Les calculs algébriques ont d'abord été peu nécessaires au progrès des Mathématiques, les théorèmes fort simples gagnaient à peine à être traduits dans la langue de l'analyse. Ce n'est guère que depuis Euler que cette langue plus brève est devenue indispensable à la nouvelle extension que ce grand géomètre a donnée à la Science. Depuis Euler les calculs sont devenus de plus en plus nécessaires et aussi [1] de plus en plus difficiles à mesure qu'ils s'appliquaient à des objets de science plus avancés. Dès le commencement de ce siècle, l'algorithme avait atteint un degré de complication tel que tout progrès était devenu impossible par ce

---

[1] Je suis le texte de Chevalier; il y a dans le manuscrit de Galois un mot illisible.

moyen, sans l'élégance que les géomètres modernes ont dû imprimer à leurs recherches et au moyen de laquelle l'esprit saisit promptement et d'un seul coup un grand nombre d'opérations.

Il est évident que l'élégance si vantée et à si juste titre n'a pas d'autre but.

Du fait bien constaté que les efforts des géomètres les plus avancés ont pour objet l'élégance on peut donc conclure avec certitude qu'il devient de plus en plus nécessaire d'embrasser plusieurs opérations à la fois, parce que l'esprit n'a plus le tems de s'arrêter aux détails.

Or je crois que les simplifications produites par l'élégance des calculs (simplifications intellectuelles, s'entend; de matérielles il n'y en a pas) ont leur limite ; je crois que le moment arrivera où les transformations algébriques prévues par les spéculations des analystes ne trouveront plus ni le tems ni la place de se reproduire ; à tel point qu'il faudra se contenter de les avoir prévues ; je ne veux pas dire qu'il n'y a plus rien de nouveau pour l'analyse sans ce secours : mais je crois qu'un jour sans cela tout serait épuisé.

Sauter à pieds joints sur les calculs; grouper les opérations, les classer suivant leurs difficultés et non suivant leurs formes ; telle est, suivant moi, la mission des géomètres futurs ; telle est la voie où je suis entré dans cet ouvrage.

Il ne faut pas confondre l'opinion que j'emets ici, avec l'affectation que certaines personnes ont d'éviter en apparence toute espèce de calcul, en traduisant par des phrases fort longues ce qui s'exprime très brièvement par l'algèbre, et ajoutant ainsi à la longueur des opérations, les longueurs d'un langage qui n'est pas fait pour les exprimer. Ces personnes sont en arrière de cent ans.

Ici rien de semblable (1) ; ici l'on fait l'analyse de l'analyse : ici

(1) Chevalier, dans sa copie, a supprimé cette phrase : « Ici rien de semblable » et a placé cet alinéa avant le précédent. C'est ainsi qu'il est, en effet, placé dans le texte de Galois; mais, d'une part, les mots « Ici rien de semblable » ne sont nullement biffés dans le manuscrit; ils ont, au contraire, été ajoutés en interligne; d'autre part, ils sont précédés d'un astérisque suivi d'un trait (assez peu distinct) dont l'extrémité indique sans doute la place où l'alinéa doit être placé; à cette place, les mots supprimés par Chevalier ont un sens très clair; ils n'en

les calculs les plus élevés [les fonctions elliptiques [1]] exécutés jusqu'à présent sont considérés comme des cas particuliers, qu'il a été utile, indispensable de traiter, mais qu'il serait funeste de ne pas abandonner pour des recherches plus larges. Il sera tems d'effectuer des calculs prévus par cette haute analyse et classés suivant leurs difficultés, mais non spécifiés dans leur forme, quand la spécialité d'une question les réclamera.

La thése générale que j'avance ne pourra être bien comprise que quand on lira attentivement mon ouvrage qui en est une application, non que le point de vue théorique ait précédé l'application; mais je me suis demandé, mon livre terminé, ce qui le rendait si étrange à la plupart des lecteurs, et rentrant en moi-même, j'ai cru observer cette tendance de mon esprit à éviter les calculs dans les sujets que je traitais, et qui plus est, j'ai reconnu une difficulté insurmontable à qui voudrait les effectuer généralement dans les matières que j'ai traitées.

On doit prévoir que, traitant des sujets aussi nouveaux, hasardé dans une voie aussi insolite, bien souvent des difficultés se sont présentées que je n'ai pu vaincre. Aussi, dans ces deux mémoires et surtout dans le second qui est le plus récent, trouvera-t-on souvent la formule « je ne sais pas ». La classe des lecteurs dont j'ai parlé au commencement [2], ne manquera pas d'y trouver à rire. C'est que, malheureusement, on ne se doute pas que le livre le plus précieux du plus savant serait celui où il dirait tout ce qu'il ne sait pas, c'est qu'on ne se doute pas qu'un auteur ne nuit [3] jamais tant à ses lecteurs que quand il dissimule une dif-

---

ont pas quand on laisse le second alinéa avant le premier : c'est évidemment la raison pour laquelle Chevalier les a supprimés.

(1) On sait assez que le second Mémoire est perdu : toutefois, il subsiste un morceau (non daté) où Galois traite de la division de l'argument dans les fonctions elliptiques et dont le contenu correspond assez bien à l'indication du texte; on peut donc supposer que ce morceau pouvait rentrer dans l'ensemble que Galois voulait publier. Il sera publié dans un second article.

(2) Voici la phrase à laquelle Galois fait allusion :

« Tout ce qui précède, je l'ai dit pour prouver que c'est sciemment que je m'expose à la risée des sots. »

(3) Texte de Chevalier; on ne distingue que la lettre *n*; le reste du mot est un trou.

ficulté. Quand la concurrence c'est-à-dire l'égoïsme ne règnera plus dans les sciences, quand on s'associera pour étudier, au lieu d'envoyer aux académies des paquets cachetés, on s'empressera de publier les moindres observations, pour peu qu'elles soient nouvelles, et en ajoutant « je ne sais pas le reste ».

De Ste Pélagie Xbre 1831

EVARISTE GALOIS.

D

Sciences mathématiques

Discussions sur les progrès de l'analyse pure

De toutes les connaissances humaines, on sait que l'Analyse pure est la plus immatérielle, la plus éminemment logique, la seule qui n'emprunte rien aux manifestations des sens. Beaucoup en concluent qu'elle est, dans son ensemble, la plus méthodique et la mieux coordonnée. Mais c'est erreur. Prenez un livre d'Algèbre, soit didactique, soit d'invention, et vous n'y verrez qu'un amas confus de propositions dont la régularité contraste bizarrement avec le désordre du tout. Il semble que les idées coûtent déjà trop à l'auteur pour qu'il se donne la peine de les lier et que son esprit épuisé par les conceptions qui sont la base de son ouvrage, ne puisse enfanter une même pensée qui préside à leur ensemble.

Que si vous rencontrez une méthode, une liaison, une coordination, tout cela est faux et artificiel. Ce sont des divisions sans fondement, des rapprochements arbitraires, un arrangement tout de convention. Ce défaut pire que l'absence de toute méthode arrive surtout dans les ouvrages didactiques, la plupart composés par des hommes qui n'ont pas l'intelligence de la science qu'ils professent.

Tout celà étonnera fort les gens du monde, qui en général ont pris le mot Mathématique pour synonyme de régulier.

Toutefois, on sera étonné si l'on réfléchit qu'ici comme ailleurs la science est l'œuvre de l'esprit humain [1], qui est plutôt destiné à étudier qu'à connaître, à chercher qu'à trouver la vérité. En effet on conçoit qu'un esprit qui aurait puissance pour percevoir d'un seul coup l'ensemble des vérités mathématiques non pas à nous connues, mais toutes les vérités possibles, pourrait les [2] déduire régulièrement et comme machinalement de quelques

---

[1] Mot peu lisible, omis par Chevalier.

[2] Un mot illisible, je suis le texte de Chevalier.

principes combinés par des méthodes uniformes; alors plus d'obstacles, plus de ces difficultés que le savant [rencontre dans ses explorations (1)]. Mais il n'en est pas ainsi; si (2) la tâche du savant est plus pénible et partant plus belle, la marche de la science est moins régulière [:] la science progresse par une série de combinaisons où le hazard ne joue pas le moindre rôle; sa vie est brute et ressemble à celle des minéraux qui croissent par juxtà position. Celà s'applique non seulement à la science telle qu'elle résulte des travaux d'une série de savants, mais aussi aux recherches particulières à chacun d'eux. En vain les analystes voudraient-ils se le dissimuler (3) : ils ne déduisent pas, ils combinent, ils comparent (4); quand ils arrivent à la vérité, c'est en heurtant de côté et d'autre qu'ils y sont tombés.

Les ouvrages didactiques doivent partager avec les ouvrages d'invention ce défaut d'une marche sûre toutes les fois que le sujet qu'ils traitent (5) n'est pas autrement soumis à nos lumières. Ils ne pourraient donc prendre une forme vraiment méthodique que sur un bien petit nombre de matières. Pour la leur donner, il faudrait une profonde intelligence de l'analyse et l'inutilité de l'entreprise dégoûte ceux qui pourraient en supporter la difficulté.

---

(1) C'est le texte de Chevalier. Le passage est illisible; je ne puis lire « rencontre »; après explorations » qui est douteux, il y a les mots, douteux aussi : « et qui souvent sont imaginaires » et ceux-ci, bien nets : « Mais aussi plus de rôle au savant ». Chevalier a supprimé ce qui ne s'accordait pas avec son texte.

(2) Chevalier a écrit : « et la... ».

(3) Je suis le texte de Chevalier; il y a ici, en interligne, une phrase dont le copiste n'a pas tenu compte, malgré son intérêt; malheureusement, elle est en partie illisible : j'y distingue à peu près ce qui suit :

« toute immatérielle qu'elle [*illis.*] l'analyse n'est pas plus en notre pouvoir que d'autre [*illis.*]. »

(4) Autre addition, en interligne, supprimée par Chevalier : « il faut l'épier, la sonder, la solliciter [la vérité] ».

(5) Dans le manuscrit : « qu'il traite ».

E

Il serait en dehors de la gravité de cet écrit d'entrer dans une pareile lutte avec des sentiments personnels d'indulgence ou d'animosité à l'égard des savants. L'auteur des articles évitera également ces deux écueils. Si un passé pénible le garantit du premier, un amour profond de la science, qui la lui fait respecter dans ceux qui la cultivent, assurera contre le second son impartialité.

Il est pénible dans les sciences de se borner au rôle de critique : nous ne le ferons que contraint et forcé. Quand nos forces nous le permettront, après avoir blamé, nous indiquerons ce qui à nos yeux sera mieux. Nous aurons souvent ainsi l'occasion d'appeler l'attention du lecteur sur les idées nouvelles qui nous ont conduit dans l'étude de l'analyse. Nous nous permettrons donc de l'occuper de ces idées, dans nos premiers articles, afin de n'avoir point à y revenir.

Dans des sujets moins abstraits, dans les objets d'art, il y aurait un profond ridicule à faire précéder un ouvrage de critique par ses propres œuvres : ce serait avouer par trop naïvement ce qui est presque toujours vrai au fond, que l'on se prend pour le type auquel on rapporte les objets pour les juger : mais ici, il ne s'agit pas d'exécution, il s'agit des idées les plus abstraites qu'il soit donné à l'homme de concevoir; ici critique et discussion deviennent synonymes, et discuter, c'est mettre aux prises ses idées avec celles des autres.

Nous exposerons donc, dans quelques articles, ce qu'il y a de plus général, de plus philosophique, dans des recherches que mille circonstances ont empêché de publier plus tôt. Nous les présenterons seules, sans complications d'exemples et de hors-d'œuvre, qui chez les analystes noyent d'ordinaire les conceptions générales. Nous les exposerons surtout avec bonne foi, indiquant sans détour la voie qui nous y a conduit, et les obstacles qui nous ont arrêté. Car nous voulons que le lecteur soit aussi instruit que nous des matières que nous aurons traitées. Quand ce but aura été rempli, nous aurons conscience d'avoir bien fait, sinon par le profit qu'en retirera directement la science, du moins par l'exemple donné, d'une bonne foi qu'on n'a pas trouvé jusqu'à ce jour.

F

Ici comme dans toutes les sciences chaque époque a en quelque sorte ses questions du moment : il y a des questions vivantes qui fixent à la fois les esprits les plus éclairés comme malgré eux et sans que [*illis.*] ait présidé à ce concours. Il semble souvent que les mêmes idées apparaissent à plusieurs comme une révélation. Si l'on en cherche la cause il est aisé de la trouver dans les ouvrages de ceux qui nous ont précédés où ces idées sont présentes à l'insu de leurs auteurs.

La science n'a pas tiré, jusqu'à ce jour, grand parti de cette coïncidence observée si souvent dans les recherches des savants. Une concurrence fâcheuse, une rivalité dégradante en ont été les principaux fruits. Il n'est pourtant pas difficile de reconnaître dans ce fait la preuve que les savants ne sont pas plus que d'autres faits pour l'isolement, qu'eux aussi appartiennent à leur époque et que tôt ou tard ils décupleront leurs forces par l'association. Alors que de temps épargné pour la science !

Beaucoup de questions d'un genre nouveau occupent maintenant les analystes. C'est à découvrir [un lien entre ces questions que nous (1)] attacherons

(1) Passage biffé.

G

Tout voir, tout entendre, ne perdre aucune idée.

29 7bre 1831

Sciences
Hiérarchie. Écoles

La hiérarchie est un moyen même pour l'inférieur.

Quiconque n'est pas envieux ou a de l'ambition a besoin d'une hiérarchie factice pour vaincre l'envie ou les obstacles.

Jusqu'à ce qu'un homme ait dit : la science c'est moi, il doit avoir un nom à opposer à ceux qu'il combat. Si non, son ambition passera pour de l'envie.

Avant d'être roi il faut être aristocrate. Machiavel.

L'intrigue est un jeu. Si l'on mérite ce qu'on brigue, on y gagne tout. Si non, on perd la partie.

On combat les professeurs par l'institut, l'institut par le passé, un passé par un autre passé.

Voici la [*illis.*] de Victor Hugo. Renaissance, moyen âge, enfin, moi.

C'est à ce besoin de combattre un homme par un autre homme, un siècle par un autre siècle, qu'on doit attribuer les réactions littéraires ou scientifiques, qui ne sont pas de longue durée, Aristote, Ptolémée, Descartes, Laplace.

[*Une ligne illisible.*]

Ce jeu use celui qui s'en sert. Un homme qui n'est pas dévoué se fait éclectique.

Un homme qui a une idée peut choisir entre, avoir, sa vie durant, une réputation colossale d'homme savant, ou bien se faire une école, se taire et laisser un grand nom dans l'avenir. Le premier cas a lieu s'il pratique son idée sans l'émettre, le second s'il la publie. Il y a un troisième moyen juste milieu entre les deux autres. C'est de publier et de pratiquer, alors on est ridicule.

SUR L'ÉQUATION DE FREDHOLM;

PAR M. H. BATEMAN.

1. M. Fredholm a indiqué l'importance de l'équation fonctionnelle

$$f(s) = \Phi(s) + \lambda \int_0^1 k(s, t)\,\Phi(t)\,dt \tag{1}$$

dans les problèmes de la Physique mathématique et a montré que la fonction Φ est donnée par la formule

$$\Phi(s) = f(s) - \lambda \int_0^1 \mathrm{K}(s, t)\,f(t)\,dt \tag{2}$$

où la fonction $\mathrm{K}(s, t)$ satisfait à la relation

$$k(s, t) = \mathrm{K}(s, r) - \lambda \int_0^1 k(s, t)\,\mathrm{K}(t, r)\,dt \tag{3}$$

et peut être représentée sous la forme

$$\mathrm{K}(s, t) = -\frac{\Delta(\lambda;\, s, t)}{\delta(\lambda)}, \tag{4}$$

où D et δ sont fonctions entières de λ.

Nous nous proposons ici de trouver les valeurs de λ pour lesquelles l'équation (1) possède une solution Φ telle que $\Phi(x) = 0$, x étant un nombre compris entre 0 et 1.

En posant $s = x$ dans l'équation (1), nous obtenons

$$f(x) = \lambda \int_0^1 k(x, t)\,\Phi(t)\,dt,$$

d'où

$$\Phi(s) = -\lambda \int_0^1 \left(k(s, t) - \frac{f(s)}{f(x)}\,k(x, t)\right)\Phi(t)\,dt. \tag{5}$$

Les valeurs de λ sont ainsi les valeurs singulières de λ pour

l'équation fonctionnelle

$$\chi(s) = \Psi(s) + \lambda \int_0^1 k^{(1)}(s, t)\,\Psi(t)\,dt, \tag{6}$$

où

$$k^{(1)}(s, t) = k(s, t) - \frac{f(s)}{f(x)} k(x, t).$$

Nous allons considérer maintenant les propriétés de l'équation (6) et nous montrerons que pour cette équation

$$\mathrm{K}^{(1)}(s, t) = \mathrm{K}(s, t) - \frac{\Phi(s)}{\Phi(x)} \mathrm{K}(x, t), \tag{7}$$

$$\delta^{(1)}(\lambda) = \frac{\Phi(x)}{f(x)} \delta(\lambda). \tag{8}$$

Pour cela, il faut démontrer d'abord que

$$k^{(1)}(s, r) = \mathrm{K}^{(1)}(s, t) + \lambda \int_0^1 k^{(1)}(s, t)\,\mathrm{K}^{(1)}(t, r)\,dt. \tag{9}$$

En substituant les valeurs données de $k^{(1)}$ et $\mathrm{K}^{(1)}$, nous avons à démontrer que

$$\begin{aligned} k(s, t) - \frac{f(s)}{f(x)} k(x, r) \\ = \mathrm{K}(s, r) - \frac{\Phi(s)}{\Phi(x)} \mathrm{K}(x, r) + \lambda \int_0^1 & \left(k(s, t) - \frac{f(s)}{f(x)} k(x, t)\right) \\ & \times \left(\mathrm{K}(t, r) - \frac{\Phi(t)}{\Phi(x)} \mathrm{K}(x, r)\right) dt; \end{aligned}$$

mais nous avons

$$\lambda \int_0^1 k(s, t)\,\mathrm{K}(t, r)\,dt = k(s, r) - \mathrm{K}(s, r),$$

$$\lambda \int_0^1 k(x, t)\,\mathrm{K}(t, r)\,dt = k(x, r) - \mathrm{K}(x, r),$$

$$\lambda \int_0^1 k(s, t)\,\Phi(t)\,dt = f(s) - \Phi(s),$$

$$\lambda \int_0^1 k(x, t)\,\Phi(t)\,dt = f(x) - \Phi(x),$$

et nous voyons immédiatement que l'équation est satisfaite.

De plus, il n'y a qu'une valeur de $\mathrm{K}^{(1)}(s, t)$ qui satisfait à

l'équation (9); par conséquent la valeur que nous avons donnée est correcte.

Pour démontrer la formule (8) nous usons de l'équation suivante, due à Fredholm,

$$\frac{d}{d\lambda}[\operatorname{Log}\delta^{(1)}(\lambda)] = \int_0^1 K^{(1)}(s, s)\,ds.$$

Il faut calculer alors l'intégrale

$$\int_0^1 \left(K(s, s) - \frac{\Phi(s)}{\Phi(x)} K(x, s)\right) ds.$$

Pour cela, nous différentions l'équation

$$f(s) = \Phi(s) + \lambda \int_0^1 k(s, t)\,\Phi(t)\,dt;$$

par rapport à λ, nous obtenons alors

$$0 = \frac{\partial}{\partial\lambda}\Phi(s) + \int_0^1 k(s, t)\,\Phi(t)\,dt + \lambda \int_0^1 k(s, t)\frac{\partial}{\partial\lambda}\Phi(t)\,dt$$

ou

$$\frac{\Phi(s) - f(s)}{\lambda} = \frac{\partial}{\partial\lambda}\Phi(s) + \lambda \int_0^1 k(s, t)\frac{\partial}{\partial\lambda}\Phi(t)\,dt.$$

Nous pouvons résoudre cette équation pour $\frac{\partial}{\partial\lambda}\Phi(s)$ au moyen de la formule (2), d'où

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}\Phi(s) = \frac{\Phi(s) - f(s)}{\lambda} - \lambda \int_0^1 K(s, t)\left(\frac{\Phi(t) - f(t)}{\lambda}\right) dt$$

ou

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}\Phi(s) = -\int_0^1 K(s, t)\,\Phi(t)\,dt.$$

Par conséquent, nous avons

$$\frac{d}{d\lambda}[\operatorname{Log}\delta^{(1)}(\lambda)] = \frac{d}{d\lambda}[\operatorname{Log}\delta(\lambda)] - \frac{d}{d\lambda}[\operatorname{Log}\Phi(x)]$$

et en intégrant

$$\delta^{(1)}(\lambda) = \frac{\Phi(x)}{f(x)}\delta(\lambda),$$

depuis $\Phi(x) = f(x)$ quand $\lambda = 0$.

2. Ce résultat établi, nous pouvons employer une formule de Fredholm à trouver un développement pour $\operatorname{Log}\Phi(x)$. La formule est la suivante :

$$\operatorname{Log}\delta^{(1)}(\lambda)$$
$$= \sum_0^\infty \frac{(-\lambda)^n}{n+1} \int_0^1 \cdots \int_0^1 k^{(1)}(s_0, s_1) k^{(1)}(s_1, s_2) \ldots k^{(1)}(s_n, s_0)\, ds_0 \ldots ds_n.$$

Nous avons alors

$$(10) \quad \begin{cases} \operatorname{Log}\Phi(x) \\ \quad = \operatorname{Log} f(x) - \operatorname{Log}\delta(\lambda) \\ \qquad + \displaystyle\sum_0^\infty \frac{(-\lambda)^n}{n+1} \int_0^1 \cdots \int_0^1 \left(k(s_0, s_1) - \frac{f(s_0)}{f(x)} k(x, s_1)\right)(\qquad) \ldots ds_0\, ds_n \end{cases}$$

et la série convergera pour les valeurs de λ dont les modules sont plus petits que le module de la première valeur de λ pour laquelle ou $\Phi(x) = 0$, ou $\delta(\lambda) = 0$.

3. Si nous écrivons $f(s) = k(s, r)$, nous aurons

$$\Phi(s) = K(s, r),$$

$$k^{(1)}(s, t) = \frac{\begin{vmatrix} k(s, t) & k(s, r) \\ k(x, t) & k(x, r) \end{vmatrix}}{k(x, r)},$$

$$K^{(1)}(s, t) = \frac{\begin{vmatrix} K(s, t) & K(s, r) \\ K(x, t) & K(x, r) \end{vmatrix}}{K(x, r)}.$$

Plus généralement, si nous formons une équation fonctionnelle avec la fonction

$$(11) \qquad K^{(n)}(s, t) = \frac{\begin{vmatrix} k(s, t) & k(s, t_1) & \ldots & k(s, t_n) \\ k(s_1, t) & k(s_1, t_1) & \ldots & k(s_1, t_n) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & k(s_n, t_n) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} k(s_1, t_1) & \ldots & k(s_1, t_n) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ k(s_1, t_n) & \ldots & k(s_n, t_n) \end{vmatrix}},$$

nous pouvons démontrer que la fonction correspondante est

$$(12)\qquad K^{(n)}(s,t) = \frac{\begin{vmatrix} K(s,t) & K(s,t_1) & \dots & K(s,t_n) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots & K(s_n,t_n) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} K(s_1,t_1) & \dots & K(s_1,t_n) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \dots\dots & \dots & K(s_n,t_n) \end{vmatrix}}.$$

En effet, si nous calculons l'intégrale

$$I = \lambda \int_0^1 \begin{vmatrix} k(s_0,r) & k(s_0,t_1) & \dots & k(s,t_n) \\ k(s_1,r) & \dots\dots & \dots & \dots\dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} K(s,t_0) & K(s,t_1) & \dots \\ K(s_1,t_0) & \dots\dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{vmatrix} dr,$$

nous obtenons

$$\sum_{m=0}^{n} \sum_{p=0}^{n} \pm \lambda \int_0^1 k(s_m,r)\,K(r,t_p)\,dr \begin{vmatrix} k(s_0,t_1) & \dots & k(s_0,t_n) \\ k(s_{m-1},t_1) & \dots & \dots\dots \\ k(s_{m+1},t_1) & \dots & \dots\dots \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} K(s_1,t) & \dots & K(s_1,t_{p-1}) & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \dots\dots & \dots & \dots\dots & \dots \end{vmatrix}$$

ou

$$\sum\sum \pm [k(s_m,t_p) - K(s_m,t_p)] \begin{vmatrix} \dots \\ \vdots \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \dots \\ \vdots \end{vmatrix}.$$

Or

$$\sum_m \pm k(s_m,t_p) \begin{vmatrix} k(s_0,t_1) & \dots & k(s_0,t_n) \\ k(s_{m-1},t_1) & \dots & \dots\dots \\ k(s_{m+1},t_1) & \dots & \dots\dots \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} k(s_0,t_p) & k(s,t_1) & \dots \\ k(s_1,t_p) & \dots\dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{vmatrix} = 0,$$

à moins que $p = 0$.

Par conséquent, nous avons finalement

$$I = \begin{vmatrix} k(s_0, t_0) & k(s_0, t_1) & \dots \\ k(s_1, t_0) & \dots\dots\dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{vmatrix} \begin{vmatrix} K(s_1, t_1) & \dots & K(s_1, t_n) \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{vmatrix}$$

$$- \begin{vmatrix} k(s_1, t_1) & \dots \\ \vdots & \vdots \end{vmatrix} \begin{vmatrix} K(s_0, t_0) & K(s_0, t_1) & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{vmatrix},$$

d'où

$$k^{(n)}(s_0, t_0) - K^{(n)}(s_0, t_0) = \lambda \int_0^1 k^{(n)}(s_0, r)\, K^{(n)}(r, t_0)\, dr,$$

qui démontre le résultat annoncé.

4. Tous les résultats que nous avons trouvés sont applicables à l'équation de Volterra

$$(13) \qquad f(s) = \Phi(s) + \lambda \int_0^s f(s, t)\, \Phi(t)\, dt,$$

si nous posons

$$\begin{aligned} k(s, t) &= f(s, t) \qquad t < s, \\ &= 0 \qquad\qquad\quad t \geqq s, \end{aligned}$$

cependant le déterminant $\delta(\lambda) \equiv 1$.

Le problème de trouver les valeurs de λ pour lesquelles une équation différentielle

$$(14) \qquad \frac{d^n y}{dx^n} = \lambda \left(p_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + p_n(x) y \right)$$

possède une solution satisfaisante à certaines conditions linéaires est considéré maintenant comme un cas particulier du problème du n° 1 parce que l'équation (14) peut être réduite [1] toujours à la forme (13).

---

[1] L'équation correspondante est

$$Q_{n-1}(x) = y(x) + \lambda \int_a^x D_x \left(\frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} \right) y(t)\, dt,$$

où $Q_{n-1}(x)$ est un polynome de degré $n-1$ et D_x est l'équation adjointe différentielle.

Par exemple, les solutions de l'équation

$$(15) \qquad \frac{d^2 y}{dx^2} + \lambda \mathrm{A}(x) y = 0,$$

qui sont telles que $y(a) = 0$, satisfont à l'équation

$$\mu(x-a) = y(x) + \lambda \int_a^x (x-t) \mathrm{A}(t) y(t)\, dt,$$

et, si la solution $y(x)$ est telle que $y(b) = 0$ aussi, nous aurons

$$\mu(b-a) = \lambda \int_a^b (b-t) \mathrm{A}(t) y(t)\, dt,$$

et par conséquent

$$0 = y(x) + \lambda \int_a^x (x-t) \mathrm{A}(t) y(t)\, dt - \lambda \int_a^b (b-t) \frac{(x-a)}{(b-a)} \mathrm{A}(t) y(t)\, dt,$$

équation qui s'écrit sous la forme

$$(16) \qquad y(x) + \lambda \int_a^b \mathrm{G}(x, t) y(t)\, dt = 0,$$

où

$$(17) \qquad \begin{cases} \mathrm{G}(x, t) = \dfrac{(x-b)(t-a)}{(b-a)} \mathrm{A}(t) & t \leqq x, \\ \phantom{\mathrm{G}(x, t)} = \dfrac{(t-b)(x-a)}{(b-a)} \mathrm{A}(t) & t \geqq x. \end{cases}$$

Celui-ci est exactement le résultat classique.

Les résultats que nous avons obtenus donneront le déterminant pour l'équation (16). En effet, si $y(x, \lambda)$ est la solution de l'équation

$$\mu(x-a) = y(x) + \lambda \int_a^x (x-t) \mathrm{A}(t) y(t)\, dt,$$

nous avons exactement

$$(18) \qquad \delta(\lambda) = \frac{y(b, \lambda)}{\mu(b-a)}.$$

Les formules (7) et (10) nous donneront d'autres résultats intéressants.

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE.

Hall (W.). — *Tables and constants to four figures.* In-8°, 68 p., London, Cambridge Univ. Press. 3 sh.

Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik, begründet von Carl Ohrtmann, herausgeg. von Emil Lampe. 34. Bd. Jahrg. 1903, 1. Heft. gr. in-8°, v-528 p. Berlin, G. Reimer. 19 m.

Irving (E.). — *How to know the Starry heavens, an invitation to the study of Suns and Worlds.* With charts, plates, diagrams and engravings. In-8°, 330 p. London, Unwin. 8 sh. 6 d.

Mellor (J.-W.). — *Higher Mathematics. For students of Chemistry and Physics.* With special reference to practical work. 2e édit., in-8°, 654 p. London, Longmans. 15 sh.

Meyer (M.-Wilh.). — *Sonne und Sterne.* In-8°, 106 p. avec fig. Stuttgart, Franckh. 1 m.; relié 2 m.

Scheffers (G.). — *Lehrbuch der Mathematik f. Studierende der Naturwissenschaften u. der Technik. Einführ in die Differentialund Integralrechnung u. in die analyt. Geometrie.* Gr. in-8°, viii-682 p. Leipzig, Veit und Co. 16 m.; relié 17 m. 50 pf.

Schoute (P.-H.). — *Mehrdimensionale Geometrie.* 2. Thl. *Die Polytope* (Sammlung Schubert 36. Bd.). In-8°, ix-326 p. avec 90 fig. Leipzig, Göschen. Relié 10 m.

Wilson (J.-C.). — *On the traversing of geometrical figures.* In-8°, London, Froude. 6 sh.

Classen (J.). — *Zwölf Vorlesungen über die Natur des Lichtes.* In-8°. xii-249 p. avec 61 fig. Leipzig. Göschen. Relié 4 m.

Dassen (C.-C.). — *Tratado de Geometria euclidea de acuerdo con las ideas modernas y methodos mas rigurosos.* Tomo I : *Geometria plana.* In-12, xii-317 p. Tomo II : *Geometria del espacia.* In-12, xvi-470 p. Buenos-Aires, imprenta y casa editora de Coni Hermanos, 1904-1905.

Dassen (C.-C.). — *Tratado elementol de Algebra de acuerdo con el concepto moderno de esta ciencia y los methodos mas rigurosos.* In-12, xviii-528 p. Même librairie.

Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen. V. Bd. *Physik.* Red. von A. Sommerfeld. 1. Tl. 2. Heft. Avec fig. Leipzig, Teubner. 4 m. 80 pf.

Goursat (E.). — *Cours d'Analyse mathématique.* T. II. In-8°, vi-640 p. avec fig. Paris, Gauthier-Villars. 20 fr.

Heffter (L.) et Köhler (C.). — *Lehrbuch der analytischen Geometrie.* 1. Bd. Gr. in-8°, xvi-527 p. avec 136 fig. Leipzig, Teubner. Relié : 14 m.

Routh (E.-J.). — *Elementary part of a treatise on dynamics of a system of rigid bodies.* Part of a treatise on the whole subject. Examples. 7e édit. 460 p. London, Macmillan. 14 sh.

Schroeder (Rich.). — *Die Anfangsgründe der Differentialrechnung u. Integralrechnung.* Mit zahlreichen Uebungsbeispielen. Gr. in-8°, vii-131 p. avec 27 fig. Leipzig, Teubner. Relié : 1 m. 60 pf.

Weber (Heinr.) et Wellstein (Jos.). — *Encyklopädie der Elementar-Mathematik.* 2. Bd. *Elemente der Geometrie.* Gr. in-8°, xii-604 p. avec 280 fig. Leipzig, Teubner. Relié : 12 m.

Duhem (P.). — *La Théorie physique; son objet et sa structure.* In-8°, 454 p. Paris, Chevalier et Rivière. 8 fr. Relié : 9 fr. 50 c.

Burchard Fine (Henry), professor of mathematics in Princeton University. — *A College Algebra.* In-8°, viii-596 p. Ginn et Company, Boston, New-York, Chicago, London.

Extrait de la Préface. — Part first : Numbers.

The natural numbers. Irrational numbers. Imaginary and complex numbers.

Part second : Algebra.

The fundamental operations, symmetric functions. The binomial theorem. Quadratic equations. Indeterminate equations of the first degree arithmetical, Geometrical progressions. Method of differences. Logarithms. Permutations and combinations. Probability. Theory of equations. The binomial, exponential and logarithmic series. Infinite products. Properties of continuous functions.

Bauschinger (Jul.). — *Die Bahnbestimmung der Himmelskörper.* In-8°, xvi-653 p. avec 84 fig. Leipzig, Engelmann.

Burrard (S.-G.). — *On the intensity and direction of the force of gravity in India.* In-4°, 30 p. avec 7 planches. London, Dulau. 2 sh. 6 d.

Davison (C.). — *Elements of solid Geometry.* In-8°, 130 p. London, Cambridge Univ. Press. 2 sh. 6 d.

Frischauf (Johs.). — *Die Gauss-Gibbs'sche Methode der Bahnbestimmung eines Himmelskörpers aus drei Beobachtungen.* Gr. in-8°, v-47 p. Leipzig, Engelmann. 1 m. 20 pf.

Hartwig (Th.). — *Leitfaden der konstruierenden Geometrie. Darstellung der Raumformen im Schrägbilde, nebst einigen Anwendgn.* Gr. in-8°, 39 p. avec 55 fig. Wien, Fromme. 1 m.

Rouché (E.) et Lévy (L.). — *Analyse infinitésimale à l'usage des ingénieurs.* T. II : Calcul intégral. In-8°, vii-648 p. avec fig. Paris, Gauthier-Villars, 1902. 15 fr.

Rouse Ball (W.-W.). — *Histoire des Mathématiques.* Traduite sur la 3e édit. anglaise par *L. Freund.* T. I. In-8°, vii-423 p. avec fig. Paris, Hermann.

Russell (J.-W.). — *Elementary treatise on pure Geometry.* Avec exémples. Rev. edit. In-8°, 382 p. London. Froude. 9 sh.

Schiaparelli (G.). — *Astronomy in the old testament.* English translation, with corrections and additions by the author. In-8°, 186 p. London, Froude. 3 sh. 6 d.

Stern (H.-A.) et Topham (W.-H.). — *Practical Mathematics.* In-8°, 388 p. London, Bell. 4 sh. 6 d.

Tannery (J.). — *Leçons d'Algèbre et d'Analyse.* T. I. In-8°, vii-424 p. avec fig. Paris, Gauthier-Villars. 12 fr.

Wieleitner (Heinr.). — *Theorie der ebenen algebraischen Kurven hoherer Ordnung.* In-8°, xxii-313 p. avec 82 fig. Leipzig, Göschen (Sammlung Schubert. 43. Bd.). Relié : 10 m.

Wolff (Gg.). — *Ueber Gruppen der Reste ein. beliebigen Modells im algebraischen Zahlkörper* (Dissert). In-8°, 46 p. Berlin, Mayer et Müller. 1 m. 50 pf.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

OSGOOD (Dr W.-F.). — LEHRBUCH DER FUNKTIONENTHEORIE, en deux volumes. Premier volume, 1re Partie, 1 fascicule in-8° de 306 pages. Librairie Teubner, Leipzig, 1906.

L'auteur s'est proposé de donner, pour la théorie des fonctions de variables complexes, un exposé qui convienne pour une première étude et ne suppose connues que les notions courantes de Calcul infinitésimal. Les nombres complexes ne sont considérés qu'au Chapitre VI, page 168. Les Chapitres précédents contiennent les théorèmes fondamentaux sur les fonctions réelles et les notions indispensables pour que la théorie des fonctions complexes puisse ensuite se développer sans prêter à des objections.

La préoccupation de ne pas s'en rapporter à l'intuition et aux analogies avec les figures simples oblige quelquefois, en particulier pour des propositions d'*Analysis situs,* à des distinctions et à des discussions minutieuses. L'auteur conseille alors de passer dans une première lecture les paragraphes correspondants ou de retenir seulement les définitions et les résultats, et c'est là sans doute le vrai moyen de concilier la recherche de la rigueur et le souci de ne pas dérouter les commençants. Du reste, ce Livre, rédigé avec une remarquable netteté et une sûreté absolue, ne s'adresse pas seulement aux commençants, mais à tous ceux qui veulent arrêter leurs idées sur les principes de l'Analyse.

Dans le premier Chapitre, on donne, avec de nombreux exemples et des figures, les définitions de fonction, de limite, de continuité, de dérivée, le théorème de Rolle et le théorème de la moyenne. Trois pages servent à introduire les ensembles, les points d'accumulation, la limite supérieure, la limite inférieure d'un ensemble, les définitions d'ensemble *fermé, parfait.*

Le deuxième Chapitre est consacré aux fonctions réelles de

plusieurs variables complexes; après avoir précisé les définitions de limite, de continuité pour ces fonctions, on peut étudier avec rigueur les fonctions implicites, les systèmes de fonctions et l'inversion d'un système de fonctions, puis, comme application, la représentation (*Abbildung im kleinen*) de deux surfaces l'une sur l'autre.

C'est seulement après ces généralités sur les fonctions de deux variables qu'on aborde, dans le troisième Chapitre, les questions relatives à la convergence uniforme. On insiste sur les cas où il y a, en réalité, un double passage à la limite; par exemple, la continuité d'une fonction définie par une série se ramène à l'égalité

$$\lim_{x=x_0}\left[\lim_{n=\infty} s_n(x)\right] = \lim_{n=\infty}\left[\lim_{x=x_0} s_n(x)\right],$$

$s_n(x)$ désignant la somme des n premiers termes de la série. On explique, en s'aidant de courbes représentant la somme des n premiers termes, comment une série peut être convergente dans un intervalle sans être uniformément convergente dans cet intervalle; on indique le caractère de Weierstrass pour la convergence uniforme; on donne les règles pour l'intégration, la différentiation des séries uniformément convergentes, puis pour la différentiation sous le signe somme.

Dans le quatrième Chapitre, les intégrales curvilignes sont traitées par deux méthodes : la première s'appuie sur la transformation d'une intégrale double en intégrale curviligne, la seconde se rattache à des travaux de Pringsheim et de Böcher et n'admet plus, par exemple, comme évident qu'une courbe fermée simple partage le plan en deux domaines, l'un intérieur, l'autre extérieur à la courbe; cette seconde méthode est indiquée comme pouvant être laissée de côté dans une première lecture. L'étude des périodes des intégrales curvilignes dans un domaine plusieurs fois connexe est faite, dans ce Chapitre, avec des considérations géométriques et en faisant appel à l'intuition.

Le cinquième Chapitre (*Théorie des ensembles*) termine la Section réservée aux propriétés des fonctions réelles. On y a rassemblé ces analyses délicates que l'auteur signale comme indispensables si l'on veut lever toute objection dans la théorie des fonctions complexes. On définit d'abord une courbe *régulière* à l'aide

d'équations de la forme

$$x = f(t), \qquad y = \varphi(t)$$

en faisant sur les fonctions f et φ des hypothèses convenables; puis un *domaine* en prenant pour exemple un domaine à deux dimensions; on explique sur des exemples que la *frontière* d'un domaine peut être plus compliquée qu'on ne l'imaginerait en s'en tenant à des analogies simples. On montre que la frontière d'un domaine borné est un ensemble fermé, qu'un domaine quelconque peut être considéré comme la limite de domaines T_1, T_2, ..., T_n composés de petits carrés et dont chacun comprend le précédent. On indique comme fondamental et l'on prépare minutieusement ce théorème :

Une courbe régulière fermée et simple partage le plan en deux continuum dont l'un est tout entier à distance finie et l'autre s'étend à l'infini. La courbe forme la frontière commune de ces deux continuum.

Ce théorème établi, on peut définir avec précision deux espèces de coupures (*Querschnitt, Rückkehrschnitt*), puis un domaine p fois connexe; par exemple un cercle dans lequel on a percé deux trous est un domaine trois fois connexe. On étudie la décomposition d'un domaine limité par une courbe régulière en domaines partiels d'un type normal (les carrés et les portions de carrés compris à l'intérieur d'un cercle tracé sur du papier quadrillé peuvent servir à se figurer ce type normal).

Enfin, le Chapitre V se termine par la distinction des ensembles en ensembles *dénombrables* et ensembles *non dénombrables* et par les définitions relatives à la *puissance*, à l'*étendue* d'un ensemble.

La deuxième Section du Livre a pour titre : Principes de la théorie générale des fonctions de quantités complexes.

Elle débute par une introduction rappelant les définitions et les opérations sur les nombres complexes, les théorèmes de la moyenne de Weierstrass et de M. Darboux pour les fonctions complexes d'une variable réelle.

Dans le Chapitre VI, on définit les fonctions analytiques et l'on donne les équations de Cauchy-Riemann exprimant que $P + iQ$

est une fonction analytique de la variable complexe $x + iy$. Tout de suite après, la représentation conforme est expliquée et son importance indiquée, la transformation linéaire $w = \frac{az+b}{cz+d}$ est décomposée en transformations élémentaires. En même temps qu'on définit les fonctions simples, puissance entière de z, exponentielle et logarithme, fonctions circulaires, on examine les représentations conformes qui leur correspondent.

Revenant à la transformation linéaire, on distingue les transformations hyperbolique, elliptique, loxodromique, parabolique et l'on en indique quelques propriétés se rattachant à la théorie des groupes.

Le Chapitre VII introduit les théories de Cauchy. Il débute par la définition d'une intégrale de fonction complexe comme limite d'une somme où l'on considère séparément la partie réelle et le coefficient de i. On donne comme théorème fondamental ce résultat que l'intégrale

$$\int_{(C)} \frac{f(t)\,dt}{t-z},$$

où $f(t)$ désigne une fonction continue de t, définit une fonction analytique. Seulement après ce résultat vient le théorème de Cauchy, la formule de Cauchy et la suite de conséquences qui, l'auteur le rappelle, forment comme la base naturelle de la théorie des fonctions.

Il y a lieu d'indiquer avec quelques détails ce que le Chapitre contient sur les points singuliers isolés. Le point est un *pôle* si la fonction devient infinie en ce point; on a une *discontinuité qui peut être levée* (*Lebbare Unstetigkeit*) si l'on change en un seul point la valeur d'une fonction continue.

Exemple :

$$f(z) = (z-a)^2, \qquad z \neq a,$$
$$f(a) = 1$$

et l'on démontre ce théorème de Riemann :

Si $f(z)$ est analytique dans le voisinage du point $z = a$, sauf en ce point lui-même, et si $f(z)$ reste finie, alors $f(z)$ ten

vers une limite A quand z se rapproche de a et, si l'on prend A comme valeur de $f(z)$ pour $z = a$, la fonction $f(z)$ devient une fonction analytique, même au point a.

Un point singulier isolé est essentiel s'il n'est ni pôle ni discontinuité qui peut être enlevée. Arrivé à ce point, on démontre aisément que, dans le voisinage d'un point singulier isolé essentiel, la fonction s'approche autant que l'on veut de toute valeur donnée ; on complète ce résultat en indiquant le théorème de M. Picard. Enfin, l'on établit que, si $f(z)$ est continue dans un domaine S et analytique dans le même domaine, sauf peut-être pour les points d'une ligne régulière simple Γ tracée dans S, elle est analytique aussi en tous les points de Γ.

Ensuite viennent le théorème des résidus, les séries de Taylor et de Laurent, des explications détaillées pour le cas où l'on veut ordonner, suivant les puissances de x, une série de séries entières en x.

Le Chapitre se termine par la démonstration de M. Goursat pour le théorème de Cauchy, démonstration qui ne suppose pas la continuité de la dérivée, enfin, par des remarques profondes et des vues d'ensemble, comme s'attendaient à en trouver ici tous ceux qui ont lu avec soin l'article de M. Osgood dans l'*Encyclopédie des Sciences mathématiques*.

E. Lacour.

TANNERY (Jules). — Introduction a la théorie des fonctions d'une variable, 2me édition entièrement refondue, t. I. Un vol. grand in-8 de 422 pages, à la librairie scientifique Hermann, Paris, 1904.

Cette Introduction, critique approfondie des notions premières de l'Analyse, œuvre de pénétration puissante et de rigoureuse logique, a exercé, dans bien des directions, une influence dont l'effet utile était loin d'être épuisé. Toutefois, en publiant une seconde édition, l'auteur a préféré l'écrire à nouveau, presque entièrement. La nouvelle édition comprendra deux Volumes : le

premier, déjà paru, contient les généralités sur les nombres irrationnels, les propositions d'un caractère fondamental qui concernent les ensembles, les limites, les séries, les fonctions d'une variable réelle, les dérivées. Il est d'un accès plus facile que le Volume unique de la première édition. Des images géométriques, les définitions et les conclusions présentées souvent sous une forme abrégée et familière qui prépare l'esprit à la complication nécessaire des formules plus précises, des exemples plus nombreux viennent, à chaque instant, en aide au lecteur. Mais le changement le plus important me paraît être le rôle fondamental attribué décidément aux ensembles, « notion, dit l'auteur, aussi essentielle et plus primitive que celle même de limite, qui lui est d'ailleurs liée étroitement ».

Il semble, en effet, que les propriétés élémentaires des ensembles forment maintenant, dans l'Ouvrage, comme une trame où sont rattachés les nombres irrationnels, les suites infinies et les limites, les premières généralités sur les fonctions. C'est cet enchaînement que je vais essayer de montrer, en rapprochant, dans un résumé sommaire, les définitions principales et les résultats saillants.

On dit qu'on a déterminé un nombre si l'on a défini une décomposition de tous les nombres rationnels en deux classes, telles que tout nombre de la première classe est inférieur à tout nombre de la seconde classe. Le nombre ainsi déterminé est *irrationnel* s'il n'y a pas dans la classe inférieure un nombre qui soit plus grand que tous les autres, ni dans la classe supérieure un nombre qui soit plus petit que tous les autres. Deux nombres sont dits *égaux* si les deux décompositions qui les définissent sont les mêmes. On dit que A est plus grand que B s'il existe un nombre rationnel qui figure dans la classe inférieure relative à A et dans la classe supérieure relative à B.

Pour définir un nombre, il n'est pas nécessaire de faire intervenir tous les nombres rationnels. Il suffit, pour cela, de connaître deux ensembles (E) et (E′) jouissant des propriétés suivantes : tout nombre de l'ensemble (E) est plus petit que tout nombre de l'ensemble (E′); dans l'ensemble (E) il n'y a pas de nombre plus grand que tous les autres; dans l'ensemble (E′) il n'y pas de nombre qui soit plus petit que tous les autres. Enfin, si petit que soit le nombre rationnel positif ε, on peut trouver un nombre a dans

l'ensemble (E), un nombre a' dans l'ensemble (E'), tels que la différence $a' - a$ soit moindre que ε.

Si les nombres d'un ensemble (E) sont tous inférieurs à un nombre fixe, il existe un nombre M, la *borne supérieure* de l'ensemble qui jouit des propriétés suivantes :

1° Aucun nombre de (E) n'est plus grand que M;

2° Quel que soit le nombre M' plus petit que M, il y a un nombre de (E) qui est plus grand que M'.

Pour obtenir M, on range dans une première classe tout nombre rationnel qui est inférieur ou égal à un nombre de (E) et dans une seconde classe les nombres rationnels qui sont plus grands que tous les nombres de (E). On définit d'une manière analogue la *borne inférieure* d'un ensemble.

A partir de maintenant, il n'est plus nécessaire de faire intervenir dans les démonstrations la décomposition de tous les nombres en deux classes qui a servi, au début, à définir un nombre. Par exemple, la somme de deux nombres A et B est la borne supérieure de l'ensemble des nombres rationnels distincts que l'on obtient en ajoutant deux nombres rationnels respectivement moindres que A et B et en même temps la borne inférieure des nombres rationnels distincts que l'on obtient en ajoutant deux nombres rationnels respectivement plus grands que A et B.

Avant d'aborder les suites infinies, il est commode de définir un *point d'accumulation* d'un ensemble infini : un point a est un point d'accumulation de l'ensemble (E) si, quelque petit que soit le nombre positif ε, il y a dans (E) un point autre que a, dont la distance au point a est moindre que ε. Un ensemble infini borné en haut et en bas admet au moins un point d'accumulation.

Ces notions étant acquises, pour reconnaître si une suite

$$u_1,\quad u_2,\quad \ldots,\quad u_n,\quad \ldots$$

a une limite, c'est-à-dire s'il existe un nombre L, tel que $L - u_n$ tend vers zéro quand n augmente indéfiniment, on considérera l'ensemble U des nombres distincts qui figurent dans la suite (je supposerai ici que l'ensemble U est infini, ce qui pourrait ne pas arriver si un même nombre était répété une infinité de fois dans

la suite donnée). Pour que la suite ait une limite, il faut et il suffit que l'ensemble (U) soit borné et admette un point d'accumulation unique.

Pour démontrer le caractère de convergence de Cauchy ou, ce qui revient au même, la proposition suivante : Une suite u_1, u_2, ..., u_n, ... a une limite si a tout nombre positif ε correspond un entier p tel que, si m et n sont supérieurs à p, on a $|u_m - u_n < \varepsilon|$, M. Tannery fait voir que l'ensemble U est borné et admet un point d'accumulation unique.

Pour cette autre proposition : Si une suite est croissante et si les termes de cette suite sont inférieurs à un nombre fixe, la suite a une limite, il donne une démonstration dont la simplicité est à remarquer. Soit A, dit-il, la borne supérieure des termes de la suite et ε un nombre positif quelconque. Il y a certainement un terme de la suite au delà de $A - \varepsilon$, tous les termes suivants sont *a fortiori* plus grands que $A - \varepsilon$ ils sont aussi plus petits que A; on voit donc qu'à partir d'une certaine valeur de n, $A - u_n$ est plus petit que ε : u_n a pour limite A quand n augmente indéfiniment.

La plus grande des limites d'une suite infinie, considérée par Cauchy, est représentée ici comme la borne supérieure des points d'accumulation de l'ensemble U (supposé borné supérieurement).

Jusqu'ici on n'a considéré que des ensembles ou des suites de nombres représentés par des points sur un axe; or il y a un très grand intérêt à considérer des ensembles dont les éléments sont des systèmes de deux nombres donnés dans un ordre déterminé, plus généralement des systèmes de p nombres. On introduit ici une notion fondamentale pour des ensembles infinis d'objets quelconques, la notion de *puissance*. Après aveir défini avec précision ce qu'on appellera *une correspondance parfaite entre les éléments de deux ensembles,* au lieu de dire qu'il est possible d'établir entre deux ensembles une correspondance parfaite, on dira qu'ils ont même *puissance*.

Les ensembles qui ont même puissance que l'*ensemble* des nombres naturels, ensembles que l'on appelle *dénombrables,* jouent un rôle particulièrement simple. Si (E), (E') sont deux ensembles dénombrables, l'ensemble des éléments distincts qui appartiennent soit à (E), soit à (E') est aussi dénombrable cette

proposition s'étend à trois, quatre, ... ensembles dénombrables. Par exemple, l'ensemble des nombres entiers positifs, nuls ou négatifs et dénombrables.

Pour qu'un ensemble soit dénombrable, il faut d'abord qu'on puisse imposer à ses éléments un ordre de succession tel que, quels que soient les éléments a et b de l'ensemble, le nombre des éléments de l'ensemble, qui, d'après l'ordre de succession imposé, sont entre a et b, soit fini. Sous ces conditions, l'ensemble est fini ou dénombrable; s'il est infini, ses éléments pourront être rangés dans une suite de la forme

$$\ldots,\quad u_{-2},\quad u_{-1},\quad u_0,\quad u_1,\quad u_2,\quad \ldots$$

(la suite pouvant être limitée à droite ou à gauche), puis dans une suite

$$v_1,\quad v_2,\quad v_3,\quad \ldots,\quad v_n,\quad \ldots.$$

Il est indispensable de définir avec précision ce qu'on appellera *changer l'ordre des termes dans une suite infinie;* on verra avec quel soin cette question, et d'autres du même genre, sont éclaircies par l'auteur; j'indique en gros quelques-unes de ses conclusions. On comprend bien ce que l'on veut dire quand on énonce qu'une suite infinie

$$(\alpha)\qquad \alpha_1,\quad \alpha_2,\quad \ldots,\quad \alpha_n,\quad \ldots$$

est identique, à l'ordre près, à la suite des nombres naturels: cela signifie que tout terme de (α) est un nombre naturel et que tout nombre naturel figure une fois, et une fois seulement, dans la suite (α). Ceci posé, pour définir un changement dans l'ordre des termes d'une suite infinie

$$u_1,\quad u_2,\quad \ldots,\quad u_n,\quad \ldots,$$

on prendra pour représentant d'un terme le nombre naturel qui indique son rang et il suffira de définir un changement dans l'ordre de ces représentants (c'est-à-dire dans la suite des nombres naturels), enfin, après le changement, de remplacer chaque nombre naturel par le terme qu'il représentait; ou, encore, d'une

façon plus abrégée, on numérote les termes de la suite donnée et l'on appelle les numéros dans un autre ordre.

Des Tableaux très clairs formés de cases, comme une Table de multiplication, montrent comment on peut faire correspondre les systèmes de deux entiers (α, β) à la suite des nombres naturels et le raisonnement s'étend aux systèmes de p entiers. On en conclut aisément qu'un ensemble dénombrable d'ensembles dénombrables est un ensemble dénombrable d'éléments, puisque les nombres algébriques forment un ensemble dénombrable.

L'ensemble des nombres qui appartiennent à l'intervalle (0, 1) n'est pas dénombrable, on le montre par l'absurde. On dit de tout ensemble, qui a même puissance que l'ensemble des nombres de l'intervalle (0, 1), qu'il a la *puissance du continu*. L'ensemble des nombres réels a la puissance du continu. Un ensemble infini garde la même puissance quand on supprime de cet ensemble des éléments en nombre fini ou formant un ensemble dénombrable, pourvu que l'ensemble restant soit infini.

Pour un ensemble infini (E) de points, l'ensemble des points d'accumulation forme ce que l'on appelle l'ensemble *dérivé* de (E).

Un ensemble est *clos* s'il est borné et s'il contient tous ses points d'accumulation, *parfait* s'il est clos et si chacun de ses points est un point d'accumulation, *dense dans un intervalle* si tout point de cet intervalle est un point d'accumulation pour l'ensemble.

La question, assez compliquée, du changement de l'ordre des termes dans une série simple ou multiple est heureusement traitée avec l'aide des définitions et des explications qui précèdent. Pour donner un aperçu de la solution, je me limiterai au cas des séries à termes tous positifs.

La somme d'une série simple à termes tous positifs est la borne supérieure de l'ensemble des nombres distincts que l'on obtient en faisant la somme de tels termes de la série que l'on voudra. Soit maintenant une série attachée à un ensemble dénombrable (E) [qui pourra être l'ensemble des systèmes de deux nombres entiers (α, β) ou de trois nombres entiers (α, β, γ)], de façon que, à tout élément ρ de l'ensemble (E), on fait correspondre un terme v_ρ de la série. Puisque (E) est dénombrable, on peut ima-

giner une correspondance parfaite entre cet ensemble et l'ensemble des nombres naturels; on peut dire que les termes v_ρ de la série sont, par là même, rangés dans un ordre $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$. Si la série $u_1 + u_2 + u_3 + \ldots$ est convergente, sa somme, V, ne dépend pas de l'ordre des termes et il est naturel de regarder cette somme comme valeur du symbole Σv_ρ.

Supposons qu'on décompose l'ensemble (E) en une infinité dénombrable d'ensembles partiels sans éléments communs (E_1), (E_2), ..., (E_n), ... et qu'on désigne par w_α la somme Σv_ρ attachée à l'ensemble (E_α), la série

$$(w) \qquad w_1 + w_2 + \ldots + w_n + \ldots$$

est convergente et a pour somme V. En effet, on voit de suite que la série (w) est convergente et que la somme est inférieure ou égale à V; pour montrer que cette somme est bien égale à V, on remarque que V est la borne supérieure de l'ensemble des nombres obtenus en ajoutant des termes v_ρ, de sorte que, si petit que soit le nombre positif ε, il y a un de ces nombres qui est compris entre $V - \varepsilon$ et V. On peut, d'après cela, assigner un nombre entier m tel que, si $n > m$, on a

$$V - \varepsilon < w_1 + w_2 + \ldots + w_n < V$$

et la proposition se trouve ainsi démontrée.

La théorie des ensembles permet de donner à la définition d'une fonction toute sa généralité et d'approfondir des notions importantes comme celle de la continuité. Si à toute valeur x d'un ensemble (X) de nombres distincts on fait correspondre une valeur y, on dit que y est une fonction de x déterminée dans l'ensemble (X).

Il y a un intérêt particulier à étudier la façon dont une fonction $f(x)$ se comporte aux environs d'un point a d'accumulation de l'ensemble (X). On dit que la fonction $f(x)$ tend vers la limite A quand x tend vers a, pour dire que la valeur de la fonction $f(x)$ est très voisine du nombre A, lorsque le nombre x, que l'on suppose toujours appartenir à l'ensemble (X), est très voisin de a. Lorsque le point d'accumulation a appartient à l'ensemble (X), la fonction $f(x)$ a, en ce point, une valeur déter-

minée $f(a)$. Si l'on a, au sens qui vient d'être indiqué,

$$\lim_{x=a} f(x) = f(a),$$

on dit que la fonction est continue au point a.

Si la fonction $f(x)$ est bornée aux environs d'un point d'accumulation a de l'ensemble (X), il existe un ou plusieurs nombres k, tels que, pour des valeurs de x appartenant à (X) et très voisines de a, les valeurs de $f(x)$ viennent se serrer autour de l'un ou l'autre de ces points k; l'ensemble des points k, s'il est infini, est clos. Pour que $f(x)$ admette une limite au point a, il faut que cet ensemble se réduise à un seul point k.

Une fonction $f(x)$ déterminée dans un ensemble clos (X) et continue en chacun des points d'accumulation de cet ensemble y est nécessairement bornée; l'ensemble (Y) des valeurs de la fonction est fini ou clos; enfin la fonction $f(x)$ est uniformément continue dans l'ensemble (X), c'est-à-dire qu'à tout nombre positif α correspond un nombre positif β, tel que l'on ait

$$|f(x') - f(x)| < \alpha$$

sous la seule condition que x et x' appartiennent à (X) et que

$$|x' - x| < \beta.$$

Pour les définitions relatives à la dérivée d'une fonction en un point x_0, l'auteur se borne au cas où la fonction est définie dans un *intervalle* $(x_0 - \alpha, x_0 + \alpha)$; mais, afin de montrer ce qu'a de restrictif la supposition de l'existence d'une dérivée, il explique ce qu'on entend par dérivées supérieures ou inférieures, à droite ou à gauche. La fonction de h

$$\varphi(h) = \frac{f(x_0 + h) - f(x)}{h}$$

est définie dans un ensemble (H) qui n'est autre que l'intervalle $(-\alpha, \alpha)$, d'où l'on aurait exclu le point o, lequel est évidemment un point d'accumulation de l'ensemble (H). On reconnaît l'existence de points k dont chacun a la propriété suivante : il y a des valeurs positives de h aussi petites que l'on veut, pour lesquelles $\varphi(h)$ diffère aussi peu que l'on veut de la valeur k consi-

dérée; la borne inférieure et la borne supérieure de l'ensemble de ces points k se nomment *dérivée inférieure* et *dérivée supérieure*, à droite, de la fonction $f(x)$, pour $x = x_0$. On définit d'une façon analogue la dérivée inférieure et la dérivée supérieure, à gauche, en considérant des valeurs négatives de h.

Ce résumé sommaire permettra-t-il d'apercevoir l'unité de composition et la belle ordonnance du Livre dans le développement des idées fondamentales? Le désir que j'avais de les faire ressortir m'a fait laisser de côté des additions importantes, comme l'approximation de nombres irrationnels à l'aide de fractions dont le dénominateur est inférieur à un nombre donné ou à l'aide de nombres quadratiques, deux Chapitres consacrés aux fractions continues arithmétiques et aux fractions plus générales de la forme

$$a_0 + \cfrac{b_1}{a_1 + \cfrac{b_2}{a_2 + \cfrac{b_3}{a_3 + \ddots}}},$$

l'exemple d'une fonction continue sans dérivée, donné par Weierstrass, expliqué ici avec beaucoup de netteté.

Enfin je n'ai parlé que des changements apportés dans l'exposition des généralités, tandis que le Livre contient beaucoup d'applications particulières et une étude détaillée des fonctions élémentaires « qui, par la simplicité, la beauté et l'importance de leurs propriétés doivent retenir longtemps les commençants ». La meilleure correction que j'y puisse faire, c'est d'inviter le lecteur à se reporter au Volume déjà paru de la nouvelle édition.

Le second Volume, d'après une indication rapide de la Préface, se rapportera à quelques points essentiels du Calcul intégral et de la Théorie des fonctions d'une variable complexe.

E. LACOUR.

LANDAU (E.). — ÜBER DEN PICARDSCHEN SATZ. 67 pages in-8°. Zurich, Zürcher et Furrer, 1906 ([1]).

Parmi les nombreuses et intéressantes contributions que M. E. Landau a, dans ces dernières années, apportées à l'Analyse et à la théorie des nombres, celle qui concerne le célèbre théorème de M. Picard sur les fonctions entières est peut-être une des plus inattendues ([2]). La Communication de M. Landau à l'Académie des Sciences de Berlin a été rapidement suivie de plusieurs résultats importants obtenus par MM. Hurwitz ([3]), Schottky ([4]), Carathéodory ([5]), Boutroux ([6]). M. Landau revient aujourd'hui sur son propre travail et sur ceux de ses continuateurs : il donne ainsi l'occasion de résumer quelques points de ces importantes recherches.

Rappelons d'abord une des formes de la proposition fondamentale de M. Landau :

I. Si l'on se donne les deux nombres a_0, a_1 dont le second est supposé essentiellement différent de zéro, il existe un nombre positif

$$R = R(a_0, a_1),$$

([1]) Extrait de la 51e année (1906) du *Vierteljarsschrift der Naturforschenden Gesellschaft in Zürich.*

([2]) *Über eine Verallgemeinerung des Picardschen Satzes* (*Sitzungsberichte der K. P. Akad. d. Wiss.*, Berlin, 1904, p. 1118-1133).

([3]) *Über die Anwendung der elliptischen Modulfunktionen auf einen Satz der allgemeinen Funktionentheorie* (*Vierteljarsschrift ... in Zürich,* t. XLIX, 1904, p. 242-253).

([4]) *Über den Picardschen Satz un die Borelschen Ungleichungen* (*Sitzungsberichte ...*, Berlin, 1904, 1214-1262).

([5]) *Sur quelques généralisations du théorème de M. Picard* (*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences,* t. CXLI, Paris, 1905, p. 1213-1215).

([6]) *Propriétés d'une fonction holomorphe dans un cercle où elle ne prend pas les valeurs zéro et un* (*Bulletin de la Société mathématique de France,* t. XXXIV, 1906, p. 30-39). *Voir* aussi *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*. t. CXLI, 1905, p. 305-307.

ne dépendant que de a_0 et de a_1, tel que la fonction

$$F(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots,$$

que l'on suppose régulière pour $x = 0$, admette dans le cercle défini par l'inégalité

$$|x| < R$$

soit un point singulier, soit une valeur nulle, soit une valeur égale à un.

Sous cette forme, on ne suppose pas qu'on ait affaire à une fonction entière. Si $F(x)$ est une telle fonction, le cas d'un point singulier ne peut se présenter; il faut donc que, dans le cercle considéré, $F(x)$ prenne l'une des valeurs zéro ou un. C'est le théorème de M. Picard.

M. Landau est parvenu à cette proposition, où les deux premiers coefficients de la série qui définit $F(x)$ se trouvent jouer un rôle si particulier, en étudiant la belle démonstration du théorème de M. Picard, indépendante de la théorie des fonctions modulaires, par laquelle M. Borel a su répondre à une question que plusieurs géomètres s'étaient sans doute posée, et qui avait un peu le caractère d'une énigme mathématique. M. Landau a donné, dans le Mémoire des *Sitzungsberichte* cité plus haut, deux démonstrations de la proposition I : l'une peut être regardée comme une continuation de la démonstration de M. Borel, l'autre est fondée sur la théorie de la fonction modulaire.

Une conséquence presque immédiate du théorème de M. Landau est la suivante.

Si l'on se donne les deux nombres a_0, a_1, dont le second est supposé différent de zéro, il existe un nombre φ ou plutôt une fonction $\varphi(a_0, a_1)$, qui jouit des propriétés suivantes.

Cette fonction est finie et bien déterminée; elle est positive si a_0 n'est égal ni à zéro, ni à un.

Quel que soit le nombre positif δ, toute fonction

$$a_0 + a_1 x + \ldots,$$

régulière dans le cercle défini par l'inégalité $|x| < \varphi + \delta$, prend dans ce cercle soit la valeur zéro, soit la valeur un.

En supposant

$$\rho > 0, \quad 0 < \delta < \rho,$$

il y a une fonction

$$a_0 + a_1 x + \ldots,$$

régulière dans le cercle défini par l'inégalité $|x| < \rho - \delta$, et ne prenant dans ce cercle ni la valeur zéro, ni la valeur un.

Ce nombre ρ se définit immédiatement par une coupure, en partant du théorème I.

Les efforts ont naturellement porté sur la limitation, puis sur la détermination de la fonction $\rho(a_0, a_1)$. Au moyen de la fonction modulaire, M. Hurwitz est parvenu à la limitation suivante :

$$\rho(a_0, a_1) \leqq \frac{22\,|a_0|^{\frac{2}{3}}\,|a_0 - 1|^{\frac{1}{2}}}{|a_1|}.$$

II. M. Carathéodory est parvenu à une expression explicite de la fonction $\rho(a_0, a_1)$, au moyen de la fonction modulaire. Ce résultat est peut-être la meilleure preuve que l'introduction de la fonction modulaire dans cet ordre de questions est dans la nature des choses et, dès lors, il n'y a peut-être pas lieu de s'étonner de la difficulté qu'a présentée la démonstration du théorème de M. Picard, lorsqu'on a voulu se passer de cette fonction.

Quoi qu'il en soit, voici une autre forme du résultat de M. Carathéodory, forme que M. Hartog a communiquée à M. Landau.

III. En désignant par K et K′ les fonctions bien connues de la théorie des fonctions elliptiques formées avec le module $k^2 = a_0$ et en désignant par $\mathfrak{R}\left(\frac{K'}{K}\right)$ la partie réelle du rapport $\frac{K'}{K}$, on a

$$\rho(a_0, a_1) = \frac{8}{\pi}\,|K|^2\,\mathfrak{R}\left(\frac{K'}{K}\right)|a_0|\,|1 - a_0|\,\frac{1}{|a_1|}.$$

M. Landau, en supposant $a_1 = 1$, tire diverses conséquences de cette formule, en particulier une formule asymptotique convenable pour les petites valeurs de a_0.

Les recherches de M. Schottky comportent une belle démonstration élémentaire du théorème de M. Picard; c'est vers cette dé-

monstration qu'elles étaient dirigées; elles sont fondées sur les relations d'inégalité entre la valeur absolue d'une fonction analytique et la partie réelle de cette fonction que l'on doit à MM. Hadamard et Borel. M. Landau appelle l'attention sur les deux propositions suivantes qui résultent immédiatement de ces recherches.

IV. Soit

$$F(x) = a_0 + a_1 x + \ldots$$

une fonction régulière pour $|x| < r$ et ne prenant, dans le cercle défini par cette inégalité, ni la valeur zéro, ni la valeur un; soit $M\left(\frac{r}{2}\right)$ le maximum de $|F(x)|$ pour $|x| \leq \frac{r}{2}$, on a

$$M\left(\frac{r}{2}\right) < \Omega(a_0),$$

en désignant par $\Omega(a_0)$ une fonction qui ne dépend que de a_0.

V. Lorsque, en désignant par n un nombre naturel quelconque, on se donne les deux nombres a_0 et a_n, dont le second est différent de zéro, il y a un nombre positif

$$R = R(a_0, a_n)$$

qui ne dépend que de a_0 et de a_n, tel que la série

$$F(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n + \ldots,$$

convergente dans le cercle défini par l'inégalité $|x| < R$, s'annule ou prenne la valeur un pour un point intérieur à ce cercle.

De ce dernier théorème résulte l'existence d'une fonction $\varphi(a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n)$ des $n+1$ premiers coefficients telle que, en désignant par δ un nombre positif quelconque, on soit certain que toute fonction dont le développement en série commune par les coefficients $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ et qui est régulière dans lecerc le $|x| < \varphi + \delta$ prend dans ce cercle la valeur zéro ou la valeur un, tandis qu'il y a des fonctions qui ne prennent ni l'une ni l'autre de ces valeurs dans le cercle $|x| < \varphi - \delta$.

M. Landau donne une expression de cette fonction. Il annonce aussi que M. Carathéodory est parvenu à une autre solution du

même problème, fondée sur de tout autres principes. Je dois signaler aussi, d'une part, une nouvelle démonstration élémentaire du théorème de M. Picard, assez rapprochée de celle de M. Schottky mais plus simple, puis la façon dont M. Landau montre comment, soit dans cette démonstration, soit pour établir les résultats de M. Hurwitz, on peut faire intervenir la fonction modulaire.

Le Mémoire de M. P. Boutroux contient, outre divers lemmes, la démonstration du théorème IV de M. Schottky. Il convient de remarquer que M. Boutroux ne connaissait pas le Mémoire de M. Schottky.

J'ai laissé de côté bien des points traités par M. Landau. Je dois signaler la question, déjà posée dans sa Communication de 1904, sur laquelle il revient à la fin du présent Mémoire.

Le théorème I est évidemment valable pour un polynome

$$F(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$$

dont on se donne les deux premiers coefficients. D'autre part, une preuve directe de ce théorème, qui devient alors un théorème d'algèbre, entraînerait le théorème général et le théorème de M. Picard. M. Landau s'est efforcé en vain d'obtenir une telle preuve, en n'utilisant que les ressources propres de l'Algèbre : cela, sans doute, n'est pas encourageant pour les autres; M. Landau n'en souhaite pas moins très vivement que quelque géomètre soit plus heureux que lui. J. T.

LEATHEM (J.-G.). — VOLUME AND SURFACE INTEGRALS USED IN PHYSICS (N° 1 des *Cambridge Tracts in Mathematics and Mathematical Physics*). 1 volume in-8°, 47 pages. Cambridge University Press., 1905.

Dans la théorie de l'Attraction, par exemple, on remarque la matière attirante comme continue; la densité en un point est définie comme une limite; elle est regardée comme une fonction continue, en général, des coordonnées du point.

C'est grâce à ces suppositions, ou à des suppositions analogues, que s'introduisent, en Physique, les intégrales de volume et de surface. Or, ces suppositions sont évidemment contradictoires avec notre connaissance de la matière, ou, si l'on veut, avec les hypothèses sur la constitution de la matière auxquelles cette connaissance nous conduit et qui rendent tant de services dans d'autres parties de la Science. D'habitude, on ne s'embarrasse guère de cette contradiction et l'on adopte, avec quelque cynisme, telle ou telle conception de la matière, suivant que cette conception s'accorde mieux avec le but que l'on poursuit. Cette façon de faire est sans doute légitimée, pour un temps, par la nécessité d'aller en avant et par le succès même. Le moment peut venir où il sera nécessaire de regarder de près les difficultés que M. Leathem met nettement en lumière; il y a d'ailleurs, à les résoudre, un intérêt logique, évident; aussi les mathématiciens et les physiciens lui sauront-ils gré d'avoir examiné dans quelle mesure la substitution d'un milieu continu au milieu discontinu est permise et d'avoir repris, de ce point de vue, les propositions fondamentales de la théorie de l'attraction, de l'électricité et du magnétisme.

J. T.

PINCHERLE (S.). — LEZIONI DI ALGEBRA COMPLEMENTARE DETTATE NELLA R. UNIVERSITA DI BOLOGNA E REDATTE PER USO DEGLI STUDENTI. ANALISI ALGEBRICA. 1 volume in-8°, 366 pages. Bologne, Zanichelli, 1906.

Les leçons de M. Pincherle ont été vraiment rédigées, comme il le dit, pour l'usage des étudiants. L'exposition est claire, précise, rigoureuse; elle est aussi très sobre; l'auteur a éloigné tout ce qui n'est pas essentiel.

Les premiers chapitres sont consacrés à la revision et à l'extension de la notion de nombre : nombres entiers, rationnels, irrationnels, complexes. Le nombre irrationnel est introduit par la notion de coupure (Dedekind). Les nombres complexes sont considérés comme des systèmes de deux nombres réels, puis interprétés géométriquement.

La notion de limite est judicieusement rattachée à celle d'ensemble. Les propositions fondamentales sur les séries, les produits infinis et les fractions continues montrent bien l'importance de cette notion.

L'idée de fonction est présentée, dans sa généralité, comme une correspondance entre deux ensembles. Après avoir étudié les fonctions rationnelles, entières ou non, l'auteur passe à la notion de dérivée et montre le parti qu'on en peut tirer pour l'étude de la marche des fonctions. Il traite ensuite des séries entières.

La définition de la fonction exponentielle et l'établissement de ses propriétés fondamentales au moyen de la série

$$1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{1.2}+\ldots$$

fournit un excellent exemple. La série binominale est étudiée en détail, au point de vue de la convergence, et l'on établit qu'elle représente $(1+x)^m$, pour $|x|<1$, quelle que soit la valeur réelle ou complexe de m. Un dernier chapitre est enfin consacré à la fonction logarithmique, considérée dans sa généralité.

Le livre de M. Pincherle constitue une excellente introduction à un cours élevé d'Analyse; l'auteur annonce un second volume

sur les équations algébriques, qui ne peut manquer d'être accueilli avec le même intérêt que les présentes leçons. J. T.

MÉLANGES.

NOTE SUR LES SURFACES (B) ALGÉBRIQUES;

PAR M. HAAG,
Professeur de Mathématiques spéciales au lycée de Douai.

Cette Note a pour but de compléter celle que j'ai publiée dans le numéro de mars 1906 du *Bulletin des Sciences mathématiques*. Ainsi que je l'avais annoncé, j'ai étudié à part les surfaces (B) algébriques en m'occupant surtout des questions de degrés et de classes. Voici les résultats de cette étude exposés d'une façon très sommaire, car l'étude en elle-même n'offre pas grand intérêt.

Tout d'abord, si, dans les formules (B) de la Note que je viens de rappeler, on remplace $t^{\frac{1}{q}}$ par α et $e^{\frac{i\mu}{q}}$ par β, on obtient pour x, y, z des fonctions rationnelles de α et de β, en supposant $m = \frac{p}{q}$, la fraction $\frac{p}{q}$ étant d'ailleurs supposée irréductible. On voit donc déjà que *toute surface* (B) *algébrique est unicursale.*

On peut ensuite, au moyen de nouvelles expressions de x, y, z, calculer, suivant les méthodes connues, le degré de la surface. On peut de même calculer la classe de la surface en faisant la même substitution que plus haut dans l'équation du plan tangent et exprimant que ce plan tangent passe par deux points donnés.

Mais, dans les deux cas, on est conduit à des calculs très compliqués, et il est plus simple d'employer la méthode générale indiquée par Sophus Lie pour déterminer la classe et le degré d'une surface minima quelconque.

Si l'on appelle R le rang d'une des courbes minima Γ dont la translation engendre une surface minima réelle et M l'ordre de multiplicité du cercle de l'infini sur la développable formée par les tangentes à cette courbe, la classe c de la surface est donnée par la formule

$$c = 2M(R - M),$$

en supposant que la surface n'est pas double.

Or, j'ai déjà dit que la fonction $\mathfrak{F}(u)$, relative à la surface (B) correspondant au nombre m, était iu^{m-2}. On peut prendre, à une homothétie près,

$$\mathfrak{F}(u) = m(m^2 - 1)u^{m-2},$$

et alors l'équation générale du plan osculateur à Γ peut s'écrire

$$(1) \qquad (1 - u^2)x + i(1 + u^2)y + 2uz + 2u^{m+1} = 0.$$

Le nombre M est égal au nombre de ces plans qui passent par une tangente quelconque du cercle de l'infini, c'est-à-dire au nombre de ces plans qui correspondent à une valeur donnée de u. Or, ce nombre n'est autre que le nombre des déterminations de la fonction $u^{m+1} = u^{\frac{p+q}{q}}$. Il est égal à q, puisque q est premier avec p et, par suite, avec $p + q$. Donc $M = q$.

Quant au nombre R, il se calcule en cherchant le nombre de tangentes de Γ qui rencontrent une droite donnée quelconque. En se donnant celle-ci par ses coordonnées plückériennes, en posant $u^{\frac{1}{q}} = v$ et remarquant qu'à deux valeurs différentes de v correspondent certainement deux tangentes distinctes de Γ, on trouve sans grandes difficultés

$$R = p + 2q.$$

Si enfin on remarque que, d'après la forme même de la fonction $\mathfrak{F}(u)$, la surface ne peut pas être double, on voit que la classe

est donnée par la formule

$$c = 2q(p+q).$$

Il est facile de voir que cette classe est minima et égale à 6 pour $m = 2$, c'est-à-dire pour la surface d'Enneper.

Passons au degré de la surface. Il est donné par la formule

$$d = \mu^2 - \omega,$$

où μ désigne le degré de Γ et ω le nombre de points à l'infini où Γ rencontre sa conjuguée.

Or, les équations paramétriques de Γ sont :

$$\begin{aligned} x &= \frac{m(1-m)}{2} v^{p+q} + \frac{m(m+1)}{2} v^{p-q}, \\ y &= i\left[\frac{m(m-1)}{2} v^{p+q} + \frac{m(m+1)}{2} v^{p-q}\right], \\ z &= (m^2-1) v^p. \end{aligned}$$

On en déduit immédiatement $\mu = p + q$, en remarquant que deux valeurs différentes de v donnent deux points différents de Γ. Les points à l'infini de Γ sont obtenus pour $v = \infty$ si $p > q$, et pour $v = 0$ et $v = \infty$ si $p < q$.

Dans le premier cas, on a un seul point qui est dans la direction $z = 0$, $y + ix = 0$, et qui ne coïncide pas par conséquent avec le point à l'infini de la courbe conjuguée de Γ. Dans ce cas, on a donc $\omega = 0$.

Dans le second cas, $v = \infty$ donne toujours le point sur $z = 0$, $y + ix = 0$. Mais $v = 0$ donne le point à l'infini sur $z = 0$, $y - ix = 0$.

On retrouve donc les deux mêmes points sur la courbe conjuguée de Γ. En tenant compte des ordres de multiplicité de ces points et appliquant les méthodes connues, on trouve

$$\omega = q^2 - p^2.$$

Finalement, on voit que, si $p > q$, on a

$$d = (p+q)^2,$$

et, si $p < q$, on a

$$d = (p+q)^2 - (q-p)(q+p) = 2p(p-q).$$

J'ai étudié le degré des lignes asymptotiques et des lignes de courbure. Mais cette étude est très compliquée et ne peut être poussée jusqu'au bout que pour $p = 1$, 2 ou 4. Pour $p = 1$ et 2, ces lignes sont d'ailleurs unicursales et à ces conditions seulement.

J'ai étudié également la classe des lignes asymptotiques, ce qui théoriquement semble facile, si l'on remarque que les plans osculateurs d'une telle ligne sont les plans tangents à la surface pour lequels on a

$$\sin\frac{m\mu}{2} = at^{-\frac{\mu}{2}} \qquad (a = \text{const.}).$$

Mais, pratiquement, on est encore conduit à des calculs compliqués qui ne peuvent s'achever que pour $p = 1$, 2 ou 4. Enfin, le degré des courbes $u = \text{const.}$ est immédiat; c'est $d = 2(p+q)$. Celui des courbes $v = \text{const.}$ est $d = p + q$.

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE.

DUHEM (P.). — *Les origines de la Statique.* T. I. Gr. in-8°, 360 p. avec fig. Paris, Hermann. 10 fr.

DUHEM (P.). — *La Théorie physique, son objet et sa structure.* In-8°, 450 p. Paris, Chevalier et Rivière. 8 fr. Relié : 9 fr. 50 c.

LIPPMANN (G.). — *Thermodynamique.* Leçons professées à la Sorbonne. Nouvelle édit. Gr. in-8° avec fig. Paris, A. Hermann. 9 fr.

1re Partie.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES

BROMWICH (T.-J). — QUADRATICS FORMS AND THEIR CLASSIFICATION BY MEANS OF INVARIANT FACTORS. 1 vol. in-8°, VI-108 pages. Cambridge, University Press, 1906 ([1]).

Le titre de ce petit Livre dit clairement son objet : il est très bien fait pour permettre aux étudiants de connaître les points essentiels d'une théorie qui est fort intéressante en elle-même et qui a de très belles applications.

L'auteur expose systématiquement la réduction d'une forme quadratique, en partant de l'identité

$$A = A' + \frac{1}{D_k} f(x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_n),$$

où A désigne une forme quadratique à n variables $\Sigma a_{ij} x_i x_j$, où D_k désigne le déterminant, supposé différent de 0,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1k} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{k1} & \ldots & a_{k.k} \end{vmatrix},$$

où f désigne ce que devient, quand on y remplace par 0 les variables $x_1, x_2, \ldots, x_k$, le précédent déterminant, bordé à droite et en bas par les demi-dérivées $X_1, X_2, \ldots, X_k$ de A par rapport à $x_1, x_2, \ldots, x_k$, et, dans la dernière case de la diagonale principale, par A lui-même; où A′ est, au signe près, ce dernier déterminant dans lequel on a remplacé A par 0 dans la dernière case. A′ ne dépend que des formes linéaires indépendantes $y_1, y_2, \ldots, y_k$ définies par les équations

$$a_{i1} y_1 + a_{i2} y_2 + \ldots + a_{ik} y_k = X_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, k).$$

([1]) N° 3 de la Collection du *Cambridge tracts in Mathematics and mathematical Physics*.

Cette identité fournit de suite les formules classiques qui permettent d'isoler le carré d'une forme linéaire, ou le produit de deux pareilles formes, en supprimant de la forme quadratique, suivant les cas, une ou deux variables. M. Bromwich montre qu'elle fournit aussi bien deux formules analogues, dont l'une permet d'isoler une variable x_1, par exemple, si le mineur D_{11} relatif à a_{11} n'est pas nul, en substituant aux autres variables $x_2, \ldots, x_n$ des formes telles que $x_2 + \alpha_2 x_1, \ldots, x_n + \alpha_n x_1$; l'autre formule correspond au cas où D_{11} est nul et permet d'isoler le produit $2x_1x_2$. Les quatre formules de réduction, dans le cas où $n = 3$, sont interprétées géométriquement.

M. Frobenius (*Sitzungsberichte,* Berlin, 1894) avait montré que cette identité, à peine modifiée, s'applique aux formes bilinéaires et conduit, par une voie très facile, à établir une proposition importante, due à Sylvester, de la théorie des déterminants.

M. Bromwich montre la portée de l'identité qu'il a prise pour point de départ, en indiquant comment elle permet d'établir des propriétés importantes de l'énergie cinétique

Après avoir démontré la loi de l'inertie et quelques propositions fondamentales relatives aux substitutions linéaires dans les formes quadratiques, l'auteur passe aux faisceaux de formes et à la réduction simultanée de deux formes quadratiques.

Il définit les facteurs invariants (diviseurs élémentaires) et les invariants de Kronecker, établit leur caractère d'invariants et fait prévoir qu'ils constituent un système complet d'invariants : la démonstration est achevée un peu plus loin. Quant à la méthode de réduction, c'est celle de Kronecker que M. Bromwich développe. Le choix de cette méthode lui était, comme il le dit, imposée par les dimensions de son petit Traité. Elle est d'ailleurs naturelle, appropriée à l'enseignement et aux explications géométriques ($n = 3,4$). M. Bromwich insiste avec détail sur ces applications géométriques. On sent d'ailleurs qu'il a écarté avec regret la belle méthode que l'on doit à M. Darboux, qui, sans doute, comporte un *appareil,* mais un appareil qui vaut par lui-même.

Outre les applications relatives aux coniques et aux quadriques, tant au point de vue projectif qu'au point de vue métrique, signalons celles qui concernent les quartiques bicirculaires, les surfaces cyclides, les complexes linéaires, les petites oscillations d'un sys-

tème dynamique à n degrés de liberté autour d'un état d'équilibre.

Enfin, dans les dernières pages de son Traité, M. Bromwich a donné d'utiles références aux principaux Livres et Mémoires relatifs à la matière. J. T.

HARDY (G.-H.). — THE INTEGRATION OF FUNCTIONS OF A SINGLE VARIABLE. 1 vol. in-8°, VIII-53 pages. Cambridge, University Press.

Ce Volume fait partie d'une intéressante collection dirigée par MM. Leathem et Whitaker sous le titre : *Cambridge Tracts in Mathematics and mathematical Physics*. A en juger par ceux qui sont parus, les Volumes de cette collection devront être très courts : chacun devra traiter d'un sujet limité, de façon à compléter sur ce point les connaissances que les étudiants peuvent puiser dans les Manuels classiques. Ce complément de connaissances est d'ailleurs dirigé dans le sens scientifique : il s'agit plutôt d'idées générales développées ou indiquées, que d'applications particulières.

C'est de la recherche des fonctions primitives que s'occupe M. Hardy : sauf pour ce qui concerne les fonctions rationnelles, cette recherche, il y a quarante ans, n'était présentée que comme un recueil de recettes, d'heureuses transformations, qui ne se fixaient dans la mémoire que par l'usage fréquent que l'on en faisait. La considération des courbes unicursales et, plus généralement, du genre des courbes, a permis de ramener systématiquement à ce cas les intégrales à différentielle algébrique relatives à des courbes unicursales, et de constituer une première classification dans les transcendantes qu'introduisent en général les intégrales à différentielle algébrique.

Mais ce n'est pas à cette seule considération, aujourd'hui bien classique, que se borne M. Hardy.

Il reprend quelques-unes des idées développées par Liouville

dans une suite d'importants Mémoires (¹), qui ont pour point de départ les résultats dus à Abel et le principe, indiqué par Laplace : « L'intégrale d'une fonction différentielle ne peut contenir d'autres radicaux, dépendant de la variable, que ceux qui entrent dans cette fonction. » Il parvient ainsi, dans des cas étendus, à prévoir quelle peut être la forme de la fonction primitive de certaines fonctions algébriques, ou transcendantes, et à déterminer cette forme. Pour ce qui est des fonctions transcendantes élémentaires, M. Hardy reprend la classification de Liouville en transcendantes du premier, du second ordre, etc., et montre comment on peut en tirer parti. Les procédés d'intégration auxquels conduisent ces idées générales se trouvent, dans les exemples que donne l'auteur, les plus simples et les plus élégants.

J. T.

MANNING (H.-P.). — IRRATIONAL NUMBERS AND THEIR REPRESENTATION BY SEQUENCES AND SERIES. 1 vol. petit in-8°, VI-123 pages. New-York, John Wiley and Sons, 1906.

Ce petit Livre contient une exposition rigoureuse et parfaitement intelligible pour tout étudiant des sujets suivants : introduction des nombres irrationnels; définition des radicaux, de l'exponentielle, du logarithme; suites; séries convergentes; séries entières; série exponentielle; série logarithmique.

(¹) *Mémoire sur la classification des transcendantes* (*Journal de Math.*, 1re série, t. II, p. 56). — *Nouvelles recherches sur la détermination des intégrales dont la valeur est algébrique* (*Journal de Math.*, 1re série, t. III, p. 22). — *Suite du Mémoire sur la classification des transcendantes* (*Ibid.*, p. 523). — *Note sur les transcendantes elliptiques considérées comme fonction de leur module* (*Journal de Math.*, 1re série, t. V, p. 34 et 44). — *Premier Mémoire sur la détermination des intégrales dont la valeur est algébrique* (*Journal de l'École Polytechnique*, t. XIV, cahier 22, p. 124, et *Mémoires des Savants étrangers*, t. V). — *Second Mémoire* (*Ibid.*, p. 149). — *Mémoire sur les transcendantes elliptiques considérées comme fonction de leur amplitude* (*Ibid.*, Chap. XXIII, p. 37). — *Mémoire sur l'intégration d'une classe de fonctions transcendantes* (*Journ. für r. n. a. Math.*, t. XIII, p. 93).

Les nombres irrationnels sont introduits par la notion de coupure (Dedekind). Pour les autres sujets, l'auteur s'est borné aux points essentiels, comme l'indique assez la brièveté de son Livre.

L'auteur dit qu'une suite représente un nombre a lorsque, pour parler le langage ordinaire, elle admet ce nombre a pour limite. En établissant les propositions élémentaires qui concernent de pareilles suites, M. Manning se garde de prononcer le mot *limite;* son langage est parfaitement légitime et cohérent. Il consacre ensuite quelques pages aux limites, en écrivant le mot cette fois; mais on ne voit pas bien en quoi les considérations qu'il développe alors diffèrent de celles qui concernaient les suites, auxquelles il préférerait se borner : il ne parle de limites que pour se conformer aux habitudes.

Il me paraît toutefois que la notion de limite est plus générale que la première. Quand on reste dans l'analyse, cette notion se présente simplement, dans sa généralité, en la rattachant à celle d'ensemble et de point d'accumulation; mais, d'une part, on n'embrasse pas ainsi tous les cas, celui par exemple où l'on parle d'une figure qui a une autre figure pour limite, et, d'autre part, dans un enseignement élémentaire, il convient, chaque fois qu'il est question d'une limite, de préciser les conditions sous lesquelles la quantité variable dont on parle tend vers sa limite, et le sens de cette dernière façon de parler. A chaque sorte de conditions, correspond une sorte de limite. C'est la particularisation des conditions qui particularise l'espèce de limites. Dire, dans le langage adopté par l'auteur, que la suite $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ représente le nombre a, c'est dire que u_n, qui est une fonction de n définie pour les valeurs naturelles de n, tend vers la limite a, quand n augmente indéfiniment par valeurs naturelles. Les conditions ne sont pas les mêmes quand on dit que $\frac{1}{x}$ admet la limite o pour $x = \pm\infty$, ou encore quand x est une variable complexe dont la valeur absolue croît indéfiniment. Elles sont d'une nature tout autre quand on dit que l'intégrale définie est la limite d'une somme.

En résumé, le mot *limite,* tout seul, comporte un vague qu'il convient d'éviter dans l'enseignement, et c'est là sans doute la pensée de M. Manning; mais, par cela même que le mot est

vague, il est général et s'étend à beaucoup de cas; on n'a, dans chaque cas particulier, qu'à préciser son sens. A la vérité, on peut, très souvent, s'en tirer en introduisant des suites et en raisonnant sur ces suites, mais cette introduction est souvent artificielle, au moins autant, par exemple, que l'est, d'après M. Manning lui-même, l'introduction des suites de nombres rationnels dans la définition du nombre irrationnel; la notion de coupure donne, tout de suite, une idée plus adéquate de ce nombre.

Ces observations, qui ne concernent d'ailleurs que quelques pages, n'enlèvent rien au mérite de l'exposition que l'on doit à M. Manning : celle-ci ne manquera pas de rendre service à de nombreux étudiants qui trouveront dans son livre le moyen d'acquérir, avec un minimum d'efforts, des idées essentielles.

J. T.

COUTURAT (L.). — Les principes des Mathématiques, avec un Appendice sur la *Philosophie des Mathématiques*, de Kant. 1 volume in-8° de VIII-308 pages. Paris, Alcan, 1905.

Nous avons enfin, grâce à M. Couturat, un exposé fort clair, et le plus simple possible, des travaux qui ont paru en si grand nombre depuis quelques années sur la Logique symbolique et sur la transformation possible des Mathématiques pures en divers Chapitres de cette Logique. L'auteur s'inspire surtout, dans cet exposé, des *Principes des Mathématiques*, de Russell; mais d'abord il le simplifie, ou même en modifie parfois la méthode pour mieux l'adapter à l'esprit des lecteurs français, et en outre, quand il le juge nécessaire, il va droit aux mémoires originaux, utilisés par Russell lui-même, de Pieri, de Peano, de Vailati, etc. Ce livre rendra d'autant plus de services que, jusqu'ici, tous les travaux qu'il résume ont été publiés par des étrangers, sans que les mathématiciens français y aient encore pris part. Si cette abstention se prolongeait, ce ne serait vraiment pas la faute de M. Couturat, dont l'ouvrage nous permet de nous initier sans fatigue à la

langue nouvelle de la *Logistique,* en même temps qu'il est, de la première page à la dernière, une éloquente et vigoureuse protestation contre l'indifférence où elle a laissé jusqu'ici les savants français.

Le mouvement d'idées qu'il nous fait connaître résulte de la rencontre assez naturelle de deux courants déjà anciens. D'une part, les mathématiciens se sont efforcés, dans la deuxième moitié du dernier siècle, d'assurer la rigueur de leurs démonstrations en éliminant le plus possible toute trace d'intuition; et, d'un autre côté, les logiciens se sont peu à peu habitués à traduire leurs relations dans un langage qui rappelait celui des Mathématiques. Celles-ci sont allées de plus en plus vers la Logique, tandis que la Logique se revêtait de mieux en mieux d'une forme mathématique : il est arrivé à la fin qu'elles se sont fondues l'une dans l'autre. Le premier de ces courants est trop connu des lecteurs du *Bulletin* pour qu'il soit utile d'insister. M. Couturat nous donne une idée des derniers travaux auxquels aboutit le second en nous exposant, surtout d'après Russell et Peano, les principes de la Logique moderne.

Les premiers novateurs, tels que Boole, héritiers directs de la vieille Logique classique, s'appliquaient avant tout au calcul des classes; le calcul des propositions ne venait que comme conséquence du premier. Au contraire, il y a une tendance aujourd'hui à poser comme fondamental le calcul des propositions. Celui-ci repose sur une première notion indéfinissable, une première *constante logique,* à savoir la notion *d'implication.* $p \supset q$ signifie : p implique q. La proposition est *ce qui s'implique soi-même.* Le produit logique de deux propositions $(p.q)$ est l'affirmation simultanée de ces propositions. L'équivalence de p et de q, ou la double affirmation $p \supset q$ et $q \supset p$, s'énonce et s'écrit : $p \supset q . q \supset p$. La somme logique est l'affirmation de l'une ou de l'autre de deux propositions, et s'écrit $p \smile q$.

Cinq principes fondamentaux sont posés, parmi lesquels le principe du Syllogisme hypothétique : Si p implique q et q implique r, p implique r, ou

$$p \supset q . q \supset r \supset p \supset r.$$

Ces principes, joints aux premières notions, permettent de

démontrer séparément trois propositions qui, jusqu'ici, étaient admises comme formant à elles trois la base de toute logique, à savoir : le principe de contradiction, p et non-p (ou p') ne sont pas vrais à la fois, ou $(pp')'$; le principe du milieu exclu, $p \smile p'$; le principe de la double négation, $(p')' = p$.

La notion de classe se tire de celle de proposition et de celle de fonction. Une fonction est une expression contenant une ou plusieurs variables. Lorsque, pour toutes valeurs attribuées aux variables, la fonction devient une proposition, elle est dite *fonction propositionnelle*. Supposons qu'elle ne dépende que d'une variable : l'ensemble des valeurs pour lesquelles la fonction devient une proposition vraie forme une *classe*. A l'implication des propositions correspond l'inclusion des classes. Dire que la classe a est incluse dans la classe b, c'est dire que $x \,\varepsilon\, a$ implique $x \,\varepsilon\, b$, ce que l'on peut écrire

$$a \supset b = x \,\varepsilon\, a \supset x \,\varepsilon\, b,$$

le signe ε exprimant qu'un terme ou un individu logique appartient à une classe. La somme et le produit logiques des classes se définissent sans peine; le calcul des classes coïncide avec celui des fonctions propositionnelles. La classe nulle ou zéro est définie par une fonction propositionnelle toujours fausse; la classe singulière, ou un, se trouvera définie par une fonction propositionnelle telle que deux valeurs quelconques qui y satisfont se trouvent toujours identiques.

Après les propositions et les classes vient le calcul des *relations*, qui est la partie la plus neuve de l'œuvre de Russell. $x\mathrm{R}y$ exprime que x a la relation R avec y. Le calcul des relations est soumis à quelques axiomes fondamentaux :

1° Si R est une relation, $x\mathrm{R}y$ est une proposition pour toutes valeurs de x et de y;

2° Toute relation R a sa converse $\breve{\mathrm{R}}$, ou $x\mathrm{R}y$ et $y\breve{\mathrm{R}}x$ s'impliquent l'un l'autre;

3° Toute relation R a sa négative R';

4° Si l'on a $x\mathrm{R}y$ et $y\mathrm{R}_1 z$, il y a entre x et z une relation qui s'appellera *le produit relatif* de R et de R_1.

Une relation est symétrique si elle est identique à sa converse;

elle est transitive si le produit de la relation avec elle-même est identique à cette relation, ou si

$$xRy.yRz \supset xRz.$$

La somme logique de deux relations R_1 et R_2 est la relation qui existe entre x et y, dès qu'il existe entre eux l'une au moins des deux relations R_1, R_2. Le produit logique, distinct du produit relatif, est la relation qui existe entre x et y, dès que R_1 et R_2 existent à la fois entre ces deux termes. Quelques axiomes spéciaux permettent de postuler l'existence de la somme et du produit logiques pour toute une classe de relations finie ou infinie; et enfin peuvent se démontrer sur les relations une série de théorèmes importants.

La Logique moderne montre, dit M. Couturat en terminant cette première partie, l'erreur de ceux qui faisaient reposer la Logique sur un principe unique. Les principes de contradiction, d'identité, de milieu exclu, sont indépendants, et ils ne suffisent pas encore, car le Syllogisme a besoin d'un nouveau principe spécial, et même, à y regarder de près, de quelques principes nouveaux.

Comment, de ces notions logiques, fera-t-on sortir le nombre? Il y a deux manières de poser le nombre, soit comme cardinal, soit comme ordinal. Russell et Couturat préfèrent la théorie cardinale, qui permet de dégager la notion de nombre de celle d'ordre. Exposons-la en quelques mots.

Deux classes sont dites *avoir le même nombre* quand on peut établir entre leurs termes une correspondance univoque et réciproque, ou, comme on dit, une relation biuniforme, ou encore quand elles sont *équivalentes*. On appellera *zéro* le nombre de deux classes nulles; *un*, le nombre de deux classes singulières. Si les mots *un, nul, zéro* intervenaient déjà dans les notions qui sont ici invoquées, ils avaient des définitions purement logiques. L'*un* en particulier, qui semble se présenter dans la relation biuniforme, se définissait à l'aide d'une relation d'identité entre deux individus; et, pour ce qui est des classes singulières, l'unité impliquée dans leur définition est une propriété de classe et non d'élément.

Mais cette définition du nombre comme propriété commune aux classes équivalentes a pourtant un inconvénient : elle procède par abstraction, et ne montre pas l'existence de cette propriété commune à laquelle on donne un nom. Du moins les classes équivalentes, ou ayant le même nombre, forment elles-mêmes une classe. Il y a là une entité correspondante à la propriété abstraite des classes qui en sont les termes : pourquoi ne pas la considérer comme représentant le nombre cardinal correspondant? C'est ce que fait Russell. M. Couturat montre, en invoquant les principes du calcul des relations, que cette définition est logiquement très naturelle. Elle est aussi, remarque-t-il, conforme au sens commun et même à l'usage : le nombre deux n'est-il pas l'idée de couple, le nombre trois l'idée de trio, etc.?

Le nombre étant une classe, l'addition logique de deux classes a et b (c'est-à-dire la classe des x qui sont soit des a, soit des b) nous conduit immédiatement à la somme arithmétique de deux nombres. Et de même pour le produit. Soit k une classe de classes n'ayant pas d'élément commun; si l'on appelle avec Whithead *classe multiplicative* des k la classe des classes formées en empruntant un élément et un seul à chacune des classes k, le nombre de la classe k représentera le produit des nombres des classes de k. Comme l'addition, la multiplication se trouve être commutative par sa définition même. En outre, comme toutes les définitions précédentes, elle n'implique aucune définition des nombres finis et des nombres infinis.

La théorie ordinale du nombre ne donne, au contraire, que le nombre fini. On y considère les nombres comme consécutifs et on les définit, par leur succession même, à l'aide de trois notions indéfinissables : *zéro, nombre entier,* et *le suivant de,* sur lesquelles on énonce cinq postulats :

1° Zéro est de la classe nombre entier;

2° Zéro n'est le suivant d'aucun nombre entier;

3° Le suivant d'un nombre entier est un nombre entier;

4° Deux nombres entiers sont égaux si leurs suivants le sont;

5° (Principe de l'induction complète). Si s est une classe qui contient zéro, et si, pour tout x qu'elle contient, elle contient aussi le suivant de x, s contient tous les nombres entiers.

Peano et Padoa ont démontré l'indépendance de ces cinq postulats, de sorte qu'on ne peut espérer en réduire le nombre; d'autre part, ils suffisent pour fonder toute l'Arithmétique. Russell complète cette théorie et lui ôte son indétermination (car elle est également valable pour toutes les suites commençant à n'importe quel nombre autre que zéro) en faisant reposer les notions premières sur des définitions déjà données en Logique :

1° *Zéro* est le nombre cardinal de la classe nulle ;

2° *Un* est le nombre cardinal des classes singulières ;

3° *Le suivant d'*un nombre n est le nombre $n+1$, somme arithmétique de n et de 1 ;

4° *Nombre entier* désigne la classe des nombres entiers finis, c'est-à-dire des nombres qui appartiennent à toute classe qui contient zéro, et qui contient $n+1$ dès qu'elle contient n.

Ces définitions permettent de démontrer les cinq postulats de Peano, et finalement servent de lien entre les deux théories du nombre cardinal. En tous cas, l'Arithmétique se trouve complètement rattachée à la Logique.

La théorie cardinale permet de donner une définition très claire des nombres infinis. Une classe est infinie quand elle est équivalente à une partie intégrante d'elle-même (G. Cantor). De deux infinis a, b, a est plus petit que b, si a est équivalent à une partie intégrante de b, sans que b soit équivalent à une partie intégrante de a. La théorie des nombres cardinaux peut être ainsi tout entière constituée sur une base purement logique.

De plus, et c'est là un point sur lequel M. Couturat insiste fortement, la notion d'ordre a été jusqu'ici complètement inutile. Les deux idées de nombre et d'ordre forment ensemble l'objet essentiel des Mathématiques, mais il a été intéressant de pouvoir dégager complètement la théorie du nombre de l'idée d'ordre. D'ailleurs celle-ci est moins simple que l'autre, car, si toutes deux ont pour support des classes ou des ensembles, toute classe donnée immédiatement a un nombre, tandis qu'elle n'a un ordre que moyennant certaines relations établies entre ses termes.

Pour définir l'ordre, il faut pouvoir définir les notions d'*avant* et d'*après,* et d'*entre.* Plusieurs méthodes permettent d'y arriver,

suggérées toutes par l'étude des Mathématiques modernes; elles reviennent toutes à poser des relations qui se réduisent à un seul et même type de relation binaire, à savoir à la relation asymétrique et transitive. La théorie de l'ordre engendre celle des nombres ordinaux, en entendant par là les types d'ordre des classes bien ordonnées (G. Cantor), et permet d'obtenir la généralisation de l'idée de nombre et la définition du continu. Pour les nombres irrationnels, M. Couturat explique comment la méthode de Russell et Pasch par les *segments* permet d'éviter l'axiome de Dedekind qui postule l'existence de la chose définie. Et, quant au continu, il rappelle comment G. Cantor est parvenu à en donner une définition purement ordinale. Finalement l'étude des nombres et du continu semble pouvoir se constituer sur les seules propriétés ordinales, à l'exclusion de toute idée de grandeur. On peut ensuite greffer sur une théorie arithmétique ainsi construite un ensemble de postulats qui formeront (Burali-Forti) une définition nominale et logique de la grandeur, mais il faudra sortir de l'esprit et de la logique pour déclarer que telle ou telle espèce de grandeur y satisfait, et c'est pourquoi Russell, avec quelques mathématiciens, rejette l'étude des grandeurs hors de la Mathématique pure. Reste à savoir, observe M. Couturat, si en réalité la généralisation du nombre qui logiquement se passe de la grandeur ne dérive pas rationnellement de la notion de grandeur. Mais la question dépasse le ressort de la logique.

Reste pour notre auteur à exposer les théories géométriques. Une première branche de la Géométrie, plus analytique que géométrique, est celle où l'on considère les lignes et les surfaces comme telles, l'*analysis situs* de Riemann. La ligne, la surface, l'espace y seront définis comme ensembles continus à une, deux ou trois dimensions. En laissant de côté cette branche isolée et peu développée, toutes les théories géométriques se rattachent à trois corps de doctrine : la Géométrie *projective,* la Géométrie *descriptive,* la Géométrie *métrique*. Toutes trois ont pour notion première indéfinissable *le point*. On admet, à propos du point, que les points forment une classe; qu'il y a des points; que, si a est un point, il existe un point différent de a... A cette première notion la Géométrie projective en ajoute une seconde, la droite illimitée, qui est déterminée par deux points et dont la donnée

s'accompagne de quelques postulats du genre de ceux-ci : Si a et b sont des points différents, la droite ab est une classe; chaque individu de cette classe est un point; la droite ab est contenue dans la droite ba; a appartient à la droite ab; la droite ab contient au moins un point distinct de a et de b, etc. La Géométrie descriptive ajoute au point, comme autre notion première, le *segment rectiligne*. (L'idée de segment équivaut à la relation *entre*, le segment ab est l'ensemble des points entre a et b.) La Géométrie métrique ajoute *la distance* et *le mouvement*.

Il serait trop long de suivre M. Couturat dans tous les détails des travaux, qu'il résume lui-même après Russell, de Pieri, de Pasch, de Peano, de Hilbert, de Veronèse, etc., et d'où se dégage un corps de Géométrie pure semblant, comme l'Arithmétique, se fondre elle aussi dans la Logique. Aussi bien, en insistant davantage sur les notions essentielles de l'Arithmétique, nous avons donné une idée suffisante de la méthode et de l'esprit de ces recherches. Pour M. Couturat plus encore que pour Russell, elles aboutissent à constituer définitivement la véritable Philosophie des Mathématiques; en particulier, elles ruinent les systèmes où les notions mathématiques gardent une signification propre et demeurent un objet spécifique d'une science qui se trouve être autre chose alors qu'un mode de penser et de raisonner, comme chez Kant. Aussi n'est-on point surpris de trouver à la suite des *Principes des Mathématiques*, et comme Appendice, la condamnation en règle de la Philosophie des Mathématiques de Kant. Elle se dégageait à chaque page des réflexions de l'auteur; mais Kant n'est pas un adversaire banal, et l'on comprend le désir qu'a eu M. Couturat de lui porter un dernier coup direct et d'éclairer ses erreurs à la lumière des nouvelles théories.

Je crois superflu d'insister près des lecteurs du *Bulletin* sur l'intérêt des travaux que ce livre nous fait connaître. Ils forment une suite naturelle à tous ceux par lesquels Helmholtz, Riemann, Dedekind, Cantor et quelques autres ont cherché à construire logiquement les notions fondamentales de l'Arithmétique et de la Géométrie. Si quelques-uns de nos jeunes mathématiciens, séduits par les problèmes que soulève la nouvelle école de logisticiens, tournent leurs efforts de ce côté, ils pourront même avoir le sen-

timent qu'ils se conforment aux tendances les plus naturelles de la pensée mathématique, à celles qu'elle a manifestées non pas seulement depuis Weierstrass, mais depuis les premiers Grecs qui apportaient tant de soin à chercher le minimum de demandes et de définitions sur lesquelles ils pussent essayer de construire logiquement l'édifice entier de leur Géométrie. Mais que par là ils doivent collaborer à une révolution philosophique décisive, c'est ce que je ne saurais leur affirmer avec la foi robuste de M. Couturat. On pourra lire, dans la *Revue de Métaphysique,* une série de discussions, notamment entre M. Henri Poincaré et M. Couturat. Je ne suis pas sûr que M. Poincaré, par quelques exagérations, et par son insistance à attribuer au principe de l'induction complète une signification et une valeur trop spéciale, n'ait pas parfois donné beau jeu à son redoutable adversaire; mais, d'un autre côté, ni la tranquillité sereine que M. Couturat continue à apporter dans ses affirmations, ni la vigoureuse dialectique avec laquelle il tente de réfuter toutes les objections, n'ont pu m'ôter cette impression que les logiciens nouveaux dépassent les bornes et la portée de leurs savantes constructions dans les conclusions philosophiques qu'ils en tirent. J'ai soutenu jadis que Kant, s'il revenait, pourrait, contrairement aux thèses de Helmholtz, de Riemann et de presque tous les néogéomètres, maintenir son attitude en face des géométries non euclidiennes, logiques sans doute, mais pour lui artificielles et non adaptées à la capacité intuitive de notre esprit. De même il serait aujourd'hui peut-être fort peu intimidé par les travaux de nos logisticiens.

« Vous parvenez, leur dirait-il, à supprimer toute intuition! Mais ce n'est là qu'une apparence. Les données de cette intuition, qui forment l'objet spécial des Sciences mathématiques, sont la seule raison de vos ingénieuses définitions et de l'ordre savant dans lequel vous les enchaînez. Et à quoi aboutissez-vous, sinon à énoncer dans une certaine langue ce que l'intuition naturelle vous suggérait d'un coup? Vos constructions sont logiques, mais artificielles... »

N'importe, dira-t-on, artificielles ou non, puisque ces constructions sont possibles, il n'est plus permis d'affirmer le caractère

synthétique des jugements mathématiques. Et c'est là l'un des points sur lesquels, dans l'Appendice, M. Couturat tente le plus vigoureux effort. Mais que signifie donc au juste la thèse de Kant? Sinon que, si l'on veut justifier complètement une proposition mathématique, quelle qu'elle soit, il faudra toujours invoquer un emprunt à l'intuition (d'autres diraient à l'expérience). Personne n'a jamais voulu dire que tout jugement mathématique implique une synthèse nouvelle par rapport aux précédents. Kant, pas plus que d'autres, n'a pu contester la possibilité de construire des suites de propositions arithmétiques ou géométriques se déduisant logiquement les unes des autres, sans *emprunt nouveau*. Il lui suffit pour qu'un jugement mathématique soit dit *synthétique* qu'il découle logiquement (Kant disait, à tort ou à raison, *selon le principe de contradiction*) et de façon plus ou moins lointaine, d'axiomes antérieurs énoncés ou tacitement utilisés.

« On constatait, dit-il, dans les *Prolegomènes* (p. 27 de la traduction), que les Mathématiques tirent toutes leurs conclusions selon le principe de contradiction (ce qu'exige la nature d'une certitude apodictique) ([1]), et alors on se persuadait que les principes fondamentaux eux-mêmes nous sont connus grâce à ce même axiome. En quoi l'on se trompait fort, car une proposition synthéthique peut sans doute être considérée sous le rapport du principe de contradiction; mais ce n'est pas en elle-même, c'est seulement en tant qu'on suppose au préalable une autre proposition synthétique d'où elle peut découler. »

Bref, pour ruiner la thèse kantienne, il faudrait non pas seulement reculer les traces des emprunts faits à l'intuition, mais les supprimer d'une façon absolue. Or, que sont les constantes logiques de Russell, et les postulats qui, à chaque instant, viennent servir de support aux notions nouvelles de la Logistique? M. Couturat proteste énergiquement contre tout soupçon de nominalisme. Ce ne sont pas là des mots vides de sens par eux-mêmes et ne valant que par des conventions sur l'usage qui sera fait de tels ou tels arrangements verbaux... Les idées d'implication, de fonction,

([1]) Kant n'y contredit pas.

de relation, de classe..., répondent à quelque chose de réel pour l'esprit; les postulats qu'on énonce sur elles sont vrais. On les prend pour points de départ des développements logiques et mathématiques, et par conséquent on renonce à définir ces notions, à démontrer ces principes. Mais nous donne-t-on l'assurance qu'on n'a pas enfermé dans ces données premières toute la matière spécifique qui forme pour quelques-uns l'objet propre des Sciences mathématiques?

Certes, il est difficile de n'être pas frappé des efforts tentés par Russell et par Couturat pour dégager, par exemple, de toute notion numérique les idées de classe, d'ensemble, de variables, de termes, d'individu, de correspondance biuniforme, de un, de zéro, ..., telles qu'elles interviennent d'abord dans la logique symbolique. La sérénité avec laquelle des esprits aussi lucides et aussi vigoureux affirment la distinction radicale du sens purement logique des premiers mots et de la signification arithmétique des notions auxquelles on n'aboutira qu'après un long détour, quand on croyait les trouver à la racine même du langage élémentaire de la Logique, cette sérénité a de quoi nous troubler, et j'avoue pour ma part que je ne lis jamais M. Couturat sans me demander si je l'ai bien compris, et s'il ne faudrait pas s'être longtemps exercé aux questions de Logistique pour y acquérir une sorte de flair comparable à ce sens de la rigueur géométrique que seuls possèdent les mathématiciens exercés. Sous cette réserve, je ne peux m'empêcher de penser que la Logique symbolique, pas plus que la grammaire, pas plus que les formes primitives du langage humain, ne se trouve exempte de quelques traces de ces intuitions numériques ou spatiales (*a priori* ou fournies par l'expérience, ce n'est pas en question ici) qui n'attendent qu'un certain degré de maturité de l'esprit pour se constituer l'objet propre de l'Arithmétique et de la Géométrie.

Au reste, je n'ose pas insister et je veux seulement résumer mes préoccupations par un dernier mot. Quand il se demande incidemment quelle est celle des deux notions, nombre et grandeur, qui est vraiment le fondement de l'autre, M. Couturat nous dit en substance : « Qu'on définisse le nombre par la grandeur ou la grandeur par le nombre, cela est également logique, mais il faudrait dépasser les bornes de la Logique pour décider laquelle

des deux méthodes est la plus *rationnelle.* » Eh bien, au fond, c'est la même pensée qui m'empêche de croire que la Logique mathématique puisse aboutir à fixer définitivement la Philosophie des Mathématiques. Philosophique ou rationnel, n'est-ce pas presque la même chose? Et ne suffit-il pas peut-être, pour faire des réserves à propos des conclusions de M. Couturat, d'en appeler simplement, par une voie qu'il nous indique lui-même, de la Logique... à la Raison? G. MILHAUD.

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE.

BUCHEL (CARL). — *Ueber Sternnamen* (Progr.). In-8°, 15 p. Hamburg, Herold'sche Buchh. 1 m. 50 pf.

DÖLP (H.). — *Grundzüge und Aufgaben der Differential- u. Integralrechnung nebst den Resultaten,* neu bearb. von *Eug. Netto.* 11. Aufl. In-8°, IV-216 p. Giessen, Töpelmann. Relié : 1 m. 80 pf.

HORN (J.). — *Gewöhnliche Differentialgleichungen beliebiger Ordnung.* In-8°, X-391 p. Leipzig, Göschen (Sammlung Schubert). Relié : 10 m.

HUSSON (E.). — *Recherche des intégrales algébriques dans le mouvement d'un solide pesant autour d'un point fixe* (thèse). In-4°, 85 p. Paris, Gauthier-Villars.

RÉVEILLE (M.-J.). — *Étude synthétique et analytique du déplacement d'un système qui reste semblable à lui-même* (thèse). In-4°, 157 p. avec fig. Paris, Challamel.

WEBER (HEINR.) et WELLSTEIN (JOS.). — *Encyklopädie der Elementar-Mathematik. Handbuch für Lehrer u. Studierende.* (In 3 Bänden) : 1. Bd. Gr. in-8°, XVIII-540 p. avec 38 fig. Leipzig, Teubner (H. WEBER, *Encyklopädie der elementaren Algebra u. Analysis.* 2ᵉ édit.). Relié : 9 m. 60 pf.

Chwolson (O.-D.). — *Traité de Physique.* Traduit sur les éditions russe et allemande par *E. Davaux.* 2 vol. in-8°. T. I, fasc. 1 (6 fr.). T. II, fasc. 2 (6 fr.). Paris, Hermann.

Helmholtz (H. v.). — *Ueber die physikalische Bedeutung des Princips der kleinsten Wirkung.* Aus H.'s hinterlassenen Papieren herausgeg. von *Leo Königsberger.* In-8°, 21 p. Berlin, G. Reimer. 1 m.

Kaufmann (W.). — *Ueber die Konstitution des Elektrons.* In-8°, 8 p. Berlin, G. Reimer. 50 pf.

Leathem (J.-G.). — *Volume and Surface. Integrals used in Physics.* In-8°, 54 p. London, Cambridge Univ. Press., 2 sh. 6 d.

Lodge (Sir Oliver). — *Sur les électrons.* Conférence faite à l'Institution of Electrical Engineers le 5 novembre 1905. Traduit de l'anglais. In-16 xiii-168 p. avec 7 fig. Paris, Gauthier-Villars. 2 fr. 75 c.

Angus (A.-H.). — *A preliminary course in differential and integral Calculus.* In-8°, 116 p. London, Longmans. 2 sh. 6 d.

Clerke (Agnes-M.). — *Modern Cosmogonies.* In-8°, 296 p. London, Black. 3 sh. 6 d.

Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften m. Einschluss ihrer Anwendungen. Bd. VI, 2. *Astronomie.* Red. von K. Schwarzschild. 1. Heft. In-8°, 193 p. Leipzig, Teubner. 5 m. 80 pf.

Fischer (Vict.). — *Grundbegriffe u. Grundgleichungen der mathematischen Naturwissenschaft.* In-8°, viii-108 p., avec 12 fig. Leipzig, Barth., 4 m. 50 pf.

Hegemann (E.). — *Lehrbuch der Landesvermessung.* In-8°, viii-261 p. avec 114 fig. et 1 Carte. Berlin, Parey. Relié, 12 m.

Kobold (Herm.). — *Der Bau des Fixsternsystems m. besond. Berücksichtigg. der photometrischen Resultate.* In-8°, xi-256 p. avec 19 fig. et 3 planches. Braunschweig, Vieweg und Sohn. (*Die Wissenschaft.* 11 Heft.) 6 m. 50 pf.; relié, 7 m. 30 pf.

Schubert (Herm.). — *Die Ganzzahligkeit in der algebraischen Geometrie.* In-8°, 58 p. Hamburg, Herold. 2 m.

Guichard (C.). — *Traité de Mécanique.* 1re Partie : *Cinématique.* 4e édit. In-8°, viii-144 p. avec fig. Paris, Vuibert et Nony. 1 fr. 50 c.

— 2e Partie : *Cinématique, Statique, Dynamique.* 2e édit. In-8°, viii-196 p. 2 fr. 50 c.

Broggi (H.). — *Matematica attuariale*. In-16. Milano, Hoepli. 3 l. 50 c.

Czubert (Eman.). — *Vorlesungen über Differential- u. Integralrechnung*. 1. Bd. 1. Hälfte. 2. Aufl. gr. in-8°; 256 p. avec 20 fig. Leipzig, Teubner. 6 m.

Dreyer (J.-L.-E.). — *History of the planetary systems from Thales to Kepler*. In-8°, 454 p. London. Cambridge Univ. Press. 10 sh. 6 d.

Koebe (Paul). — *Ueber diejenigen analytischen Functionen ein. Arguments, welche ein algebraisches Additionstheorem besitzen* (Dissert.). Gr. in-8°, 32 p. Berlin; Mayer et Müller. 1 m. 80 pf.

Love (A.-E.-H.). — *Treatise on the mathematical Theory of Elasticity*. 2e édit. In-8°, 570 p. London, Cambridge Univ. Press. 18 sh.

Muir (P.). — *Theory of determinants; in the historical order of development*. 2e édit. In-8°, 504 p. London, Macmillan. 17 sh.

Nielsen (Niels). — *Handbuch der Theorie der Gammafunktion*. Gr. in-8°, x-326 p. Leipzig, Teubner. Relié, 12 m.

Schröder (Ernst). — *Vorlesungen über die Algebra der Logik* (*exakte Logik*). II. Bd. 2. Abtlg. Herausgeg. von Eug. Müller. Gr. in-8° avec 1 portrait. Leipzig, Teubner. 8 m.

Tannery (Jules). — *Leçons d'Algèbre et d'Analyse*. 2 vol. gr. in-8°, de vii-423 p. avec 35 fig.; et 636 p. avec 104 fig. Paris, Gauthier-Villars. Chaque vol. 12 fr.

Bruns (Heinr.). — *Wahrscheinlichkeitsrechnung u. Kollektivmasslehre*. viii-310 et 18 p. Gr. in-8°. Leipzig, Teubner (B.-G. Teubner's Sammlung von Lehrbüchern auf dem Gebiete der mathemat. Wissenschaften m. Einschluss ihrer Anwendungen. XVII. Bd.). 7 m. 80 pf.; relié, 8 m. 40 pf.

Vivanti (G.). — *Théorie der eindeutigen analytischen Functionen*. Deutsch herausgeg. von A. Guzmer. Gr. in-8°, vi-512 p. Leipzig, Teubner. Relié, 12 m.

Jamin (J.) et Bouty. — *Cours de Physique de l'École Polytechnique*. 3e Supplément : *Radiations; Électricité; Ionisation*. In-8°, vi-420 p. avec 104 fig. Paris, Gauthier-Villars. 8 fr.

Benoit (J.-R.) et Guillaume (C.-E.). — *Les nouveaux appareils pour la mesure rapide des bases géodésiques*. In-8°. 88 p. avec fig. Paris, Gauthier-Villars.

Couturat (L.). — *Les principes des Mathématiques, avec un appen-*

dice sur la Philosophie des Mathématiques de Kant. In-8°, VIII-311 p. Paris, Alcan. 5 fr.

FASSBINDER (C.). — *Théorie et pratique des approximations numériques.* In-8°, VI-92 p. Paris, Gauthier-Villars. 3 fr.

HARTWIG (Theod.). — *Schule der Mathematik zum Selbstunterrichte.* (Neue mathemat. Unterrichtsbriefe). III. (Schluss-) Bd. *Differential-u. Integralrechnung.* Gr. in-8°, 200 p. avec 32 fig. Wien, Perles. 2 m. 50 pf.

POCKELS (F.). — *Lehrbuch der Kristalloptik.* X-520 p. avec 168 fig. et 6 planches. Relié. 16 m.

OSGOOD (W. F.). — *Lehrbuch der Funktionentheorie.* (In 2 Bdn.) 1. Bd. 1. Hälfte. 306 p. avec fig. 7 m. [*Teubner's (B. G.) Sammlung von Lehrbüchern auf dem Gebiete der mathemat Wissenschaften m. Einschluss ihrer Anwendungen.* Gr. in-8°. Liepzig, Teubner, XIX et XX].

THOMAE (J.). — *Grundriss einer analytischen Geometrie der Ebene.* In-8°, X-184 p. avec 8 fig. Leipzig. Teubner. Relié, 3 m. 60 pf.

VOGT (H.). — *Éléments de Mathématiques supérieures,* à l'usage des physiciens, chimistes et ingénieurs. 3e édit. In-8°, VII-620 p. avec fig. Paris, Vuibert et Nony.

Annales de l'Observatoire de Paris, publiées sous la direction de MAURICE LOEWY. *Observations.* 1902. In-4°, VIII-520 p. Paris, Gauthier-Villars. 40 fr.

BOHLER (Otto). — *Ueber die Picard'schen Gruppen aus dem Zahlkörper der* 3. *u.* 4. *Einheitswurzel.* (Dissert.) Gr. in-8°, III-102 p. avec fig. Zürich, Rascher. 2 m.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

MÜLLER (F.). — KARL SCHELLBACH RÜCKBLICK AUF SEIN WISSENSCHAFTLICHES LEBEN NEBST ZWEI SCHRIFTEN AUS SEINEM NACHLASS UND BRIEFEN VON JACOBI, JOACHIMSTHAL UND WEIERSTRASS. 86 pages in-8°. Leipzig, Teubner, 1906 (¹).

Cet article a été écrit avec une véritable piété, qui honore M. Félix Müller. Qu'on exalte le génie de ceux qui ont fait de grandes découvertes, cela est bon ; il faut que la gloire scientifique soit désirée par les jeunes gens. Mais il est bon aussi de ne pas laisser trop tôt tomber dans l'inévitable oubli le nom d'hommes qui ont, comme Schellbach, apporté par leur travail une longue et utile contribution à la Science, et qui ont, par leur enseignement, exercé une influence considérable. Une pareille influence, sans doute, continue d'agir et de vivre chez ceux qui l'ont subie, chez ceux à qui elle a été transmise ; mais elle devient latente en se diffusant ; au bout de deux ou trois générations, elle n'est plus qu'une de ces *influences ancestrales* dont nul ne sait l'origine. M. Félix Müller a bien fait de fixer les traits de Schellbach, de retracer sa longue vie, de résumer ses intéressants travaux, d'insister sur son rôle comme éducateur et comme examinateur, sur l'intérêt passionné qu'il apportait aux grandes découvertes scientifiques, de montrer la part importante qu'il a prise à la création de l'Observatoire d'Astronomie physique de Potsdam, de publier enfin deux écrits de lui, dont l'un célèbre avec enthousiasme sa science de prédilection et la place qu'elle devrait tenir dans l'enseignement, dont l'autre est le projet détaillé d'un grand Institut mathématique, physique et technologique qui n'a jamais vu le jour.

(¹) Extrait des *Abhandlungen zur Geschichte der mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen*, t. XX.

Karl Schellbach est né en 1804; il mourut en 1892. Ses travaux mathématiques se rapportent à l'Analyse, à la Mécanique rationnelle, à l'Optique. Il a vu le rôle des produits infinis dans la théorie des fonctions périodiques; il a publié, en 1864, un livre important sur la théorie des fonctions elliptiques ([1]), où se trouvent de nombreuses applications. On lui doit une intéressante démonstration du théorème d'addition ([2]) une ingénieuse interprétation de la transformation de Landen ([3]); il s'est occupé à plusieurs reprises des quadratures approchées. Il a donné une élégante solution du problème de Malfatti ([4]) pour le plan et pour la sphère; il a traité un grand nombre de sujets de Mécanique, touchant l'attraction, la rotation d'un corps solide, diverses trajectoires; signalons en particulier le mouvement d'un point sur un ellipsoïde, attiré par le centre proportionnellement à la distance ([5]); il a développé aussi plusieurs applications du calcul des variations ([6]).

Les *Annalen der Physik und Chemie*, la *Zeitschrift für den physikalischen und chemischen Unterricht* contiennent un grand nombre de Notes et de Mémoires de Schellbach sur l'Optique géométrique et d'autres sujets. Sa *Darstellende Optik*, publiée en collaboration avec le dessinateur Engel (Halle, 1849, 1850, 1856), est un livre classique qui a été traduit en anglais et en français.

Il s'intéressa vivement à la Daguerréotypie et à la Photographie. Les découvertes de Bunsen et de Kirchhoff sur le spectre, « qui permettent aux hommes de lire l'écriture hiéroglyphique des raies de Fraunhofer », excitèrent chez lui un enthousiasme bien naturel; il conçut alors le projet d'un observatoire destiné principalement à étudier le Soleil; il intéressa à ce sujet le *Kronprinz* Friedrick-Wilhelm, auquel il avait enseigné, pendant neuf années, les Mathématiques et la Physique; la création de cet observatoire

---

([1]) *Die Lehre von den elliptischen Integralen und den Thetafunctionen.*

([2]) *Journal f. d. r. u. a. Mathematik*, t. 54.

([3]) *Ibid.*, t. 91.

([4]) *Ibid.*, t. 45.

([5]) *Ibid.*, t. 54.

([6]) *Ibid.*, t. 41. A partir de la mort de Crelle, il a été un des rédacteurs du journal que celui-ci avait fondé en 1826.

(Potsdam) fut décidée une dizaine d'années plus tard (1872). A cette décision, à la fondation de l'établissement, Schellbach prit encore une part importante.

Il a cherché à déterminer expérimentalement la loi de la résistance de l'air et fit construire pour cela un appareil qu'il a décrit dans les *Annalen der Physik und Chemie* (t. CXLIII). Ses expériences ont été poursuivies par M. Thiesen (1).

En dehors de leur valeur scientifique, la plupart des publications de Schellbach ont une tendance très marquée : le savant pense à ses élèves; il désire rendre les choses aisées pour eux et leur donner le goût de la beauté scientifique; il se plaît à rendre élémentaire la démonstration des faits importants; il fait ressortir les parties de la démonstration qui ont de la portée et qui peuvent être utilisées ailleurs. Je viens de lire, par exemple, sur l'indication de M. Félix Müller, les quelques pages du *Journal de Crelle* (t. 80) intitulées *Construction der Bahn eines Punktes, der von einem festen Punkte nach dem Newtonschen Gesetse angezogen wird :* c'est bien le type d'un article dont la lecture est vraiment utile à un étudiant en Mathématiques.

Au reste, c'est vers l'enseignement que l'activité de Schellbach a été principalement tournée. Il fut nommé en 1834, sur la recommandation de Lejeune-Dirichlet, *Lehrer* au *Friedrichs-Gymnasium* et reçut le titre de *Professor* en 1840. Il enseigna plus tard au *Friedrich-Wilhelms-Gymnasium* et dirigea un séminaire de pédagogie mathématique qui devint, en 1855, l'*Institut zur Ausbildung der Lehrer Mathematik und Physik für Gymnasien und Realschulen*. La liste est longue des noms des mathématiciens illustres qui ont passé par là : c'est Clebsch qui l'ouvre. Schellbach enseigna en outre, à partir de 1843, à l'École de Guerre, plus tard *Kriegs-Akademie*. Son action sur le progrès de l'enseignement mathématique a été considérable : il l'a exercée non seulement comme professeur et comme membre de la *Prüfungs-Kommission*, mais encore par les nombreux livres classiques qu'il a publiés ou inspirés. Voici, d'après M. Müller, les titres de quelques-uns de ces livres :

---

(1) *Ibid.*, 2e série, t. 26.

Die Kegelschnitte, für den Gebrauch im Gymnasien und Realschulen (1843);

Hauptsätze der Elementar-Mathematik zum Gebrauche an Gymnasien und Realschulen, bearbeitet von F.-G. Mehler, mit einem Vorworte von Schellbach (1859);

Neue Elemente der Mechanik von Schellbach, dargestellt und bearbeitet von G. Arendt (1860);

Mathematische Lehrstunden von Schellbach; Ausgaben aus der Lehre von Grössten und Kleinsten, bearbeitet und herausgegeben von A. Bode und E. Fischer (1860);

Sammlung und Auflösung mathematischer Aufgaben von Schellbach; unter Mitwirkung von H. Lieber, bearbeitet und herausgegeben von E. Fischer (1863).

Le *Plan zur Grundung eines mathematischen Instituts zu Berlin*, que M. Félix Müller a tiré des papiers posthumes de Schellbach, est fort curieux. Il s'agit d'un projet détaillé pour instituer à Berlin une grande École qu'on peut assez bien se figurer comme réunissant notre École polytechnique et notre École normale, section des sciences. Elle aurait donné accès aux fonctions d'ingénieur, d'officier de terre et de mer, de professeur. Schellbach pousse le projet jusqu'à l'horaire des études et des exercices, à la rétribution scolaire, au traitement des directeurs et des maîtres, au devis des frais de premier établissement, au budget annuel. Les études sont surtout dirigées vers les Mathématiques; pourtant une large part est faite à la Physique et à la Chimie, à la Technologie, à la Physiologie; même l'étude du latin, indispensable alors pour lire les grands mathématiciens, celle du français et de l'anglais y trouvent leur place. La durée prévue des études y est de quatre ans ; il ne faut pas s'en étonner, puisque les élèves devaient y entrer directement, en sortant du gymnase. Point de concours à la porte : les élèves qui ont fait leurs études au gymnase entrent librement; pour les autres, un examen établira qu'ils en sont à peu près au même point que ceux-ci. Le premier trimestre se passera à reviser les connaissances acquises, à s'assurer

de leur solidité ; les maîtres connaîtront alors leurs élèves et pourront éliminer ceux qui sont incapables de profiter de l'enseignement ultérieur.

Non seulement on aura ainsi préparé les jeunes gens aux carrières scientifiques, mais on leur aura donné une excellente formation scientifique, où les Mathématiques occupent la position centrale, comme l'étude des langues anciennes (¹) dans la formation littéraire ; les sciences expérimentales compléteront et assureront cette formation intellectuelle.

Une pareille conception étonne dans un pays d'universités : il est vrai qu'elle remonte à 1844, à une époque où, sans doute, les universités étaient sous la main des philologues. Schellbach, qui est revenu d'ailleurs plusieurs fois sur son projet, estimait que ni les universités ni les écoles techniques ne peuvent former des ingénieurs, des officiers ou des professeurs vraiment savants. Au fond, ce qu'il propose c'est l'organisation d'une scolarité. Cette scolarité, les universités peuvent l'organiser chez elles, pour les étudiants qui veulent s'y soumettre ; elles peuvent l'organiser sérieusement si elles sont assez riches en maîtres, en argent et en étudiants. Comme l'observe M. Müller, ce que M. F. Klein et ses collègues s'efforcent de réaliser à Gœttingue n'est pas éloigné de la conception de Schellbach. En France, plusieurs universités tendent aussi à organiser une scolarité, mais avec un but plus limité que le but visé par Schellbach, il y a soixante ans : une plus grande spécialisation est sans doute devenue nécessaire. Il y aurait beaucoup à dire sur ce qui se passe à Paris, sur les rapports intimes ou nuls de nos grandes écoles spéciales avec l'Université.

Mais il faut revenir au Livre de M. Müller ; il se termine par des lettres fort intéressantes écrites à Schellbach : une lettre de Jacobi sur l'aire d'un quadrilatère dont on donne les côtés et un angle ; une lettre de Joachimsthal sur la surface des ondes, une autre sur

---

(¹) Je ne puis résister au plaisir de citer, d'après M. Müller, une phrase d'un haut fonctionnaire prussien de la première moitié du dernier siècle ; elle contient, sous une forme lapidaire, de quoi réjouir amplement des gens d'opinions très opposées :

« Il y a plus de matière pour la formation de l'esprit dans une ligne de Cornelius Nepos que dans vingt formules mathématiques. »

la caustique par réflexion du cercle ; deux lettres de Weierstrass, l'une sur une enveloppe de plans signalée par Steiner, l'autre sur un problème de calcul des variations.

On trouvera en tête un beau portrait de Schellbach. J. T.

BURKHARDT (H.). — ELLIPTISCHE FUNKTIONEN. Zweite, durchgesehene und verbesserte Auflage. 1 vol. in-8°. XVI-373 pages. Leipzig, von Veit, 1906.

Nous sommes heureux d'annoncer la seconde édition des *Fonctions elliptiques* de M. Burkhardt ; le succès de cet excellent Livre, où l'auteur a su condenser, dans un petit espace et sous une forme élégante et claire, tant de choses importantes, est tout naturel. La nouvelle édition ne comporte pas de changements essentiels ; l'auteur s'est borné à ces améliorations et corrections de détails qu'entraîne toute revision consciencieuse ; il se félicite d'ailleurs du secours que lui ont apporté ses jeunes lecteurs. Je me contenterai de rappeler que l'exposition est fondée, en grande partie, sur la considération de la surface à deux feuillets, de Riemann ; que le problème de l'inversion est traité avec un soin particulier ; que la façon dont les propriétés fondamentales des fonctions modulaires sont exposées est très bien faite pour introduire le lecteur dans les parties élevées de cette théorie, et, pour le reste, je renverrai le lecteur au compte rendu que le *Bulletin* a publié de la première édition (t. XXIV, 1906, p. 145-151). J. T.

PESLOUÄN (LUCAS DE). — N.-H. ABEL, SA VIE ET SON ŒUVRE. 1 vol. in-8°, XIII-168 pages. Paris, Gauthier-Villars, 1906.

Retracer la vie d'Abel, situer ses grandes découvertes dans cette vie même; suivre leur filiation, pénétrer la pensée du créateur et la coordonner, tel a été le but de M. Lucas de Peslouän, en écrivant ce Livre. C'est un but très noble et très haut. Est-il possible de l'atteindre? Que d'efforts demande l'étude approfondie de ce qui nous reste de l'œuvre d'Abel, et de ce qui est sorti de cette œuvre, de ce qu'elle contenait donc en germe! Jusqu'où Abel a-t-il prévu le développement de ce qu'il créait? Sans doute, M. de Peslouän ne s'est pas dissimulé les difficultés, mais il a été séduit et soutenu par la beauté de sa tâche. On doit l'en féliciter.

Pour juger son Livre, il faudrait avoir approfondi soi-même un sujet qui, si courte que soit l'œuvre d'Abel, demanderait peut-être toute une vie, bien employée : contentons-nous de dire qu'il se lit avec une émotion grandissante, qu'aucun détail n'est de trop sur le caractère et la vie intime d'Abel en Norvège, à Copenhague, à Berlin, à Paris; que les inductions et les questions de M. de Peslouän, relatives à l'œuvre mathématique, sont bien dignes d'être discutées, et qu'il y a dans son étude de quoi intéresser le grand public, les psychologues et les mathématiciens. J. T.

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE.

CREMIEU (V.). — *Recherches expérimentales sur la gravitation.* In-8°, 15 p. avec fig. Tours, impr. Deslis frères.

DOKULIL (Theod.). — *Das Universaltachymeter Patent Laska-Rost*

zur Bestimmg. von Horizontaldifferenz u. Höhenunterschied ohne jede Rechnung. Gr. in-8°, 88 p. avec fig. Wien, Seidel et Sohn. 3 m.

Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen. II. Bd. *Analysis.* Redig. von W. Burkhardt u. W. Wirtinger. 1. Thl. 6. Heft. In-8°. Leipzig, Teubner. 1 m. 60 pf.

— V. Bd. *Physik.* Redig. von A. Sommerfeld. 1. Thl. 3. Heft, avec 1 planche lith. 5 m. 20 pf.

— VI. Bd. 1. Thl. *Geodäsie u. Geophysik.* Redig. von Ph. Furtwängler u. E. Wiechert. 1. Heft. In-8. 3 m. 40 pf.

Hagen (Joh.-G.). — *Atlas stellarum variabilium.* Series V, totius cœli stellas variabiles complectens, quarum lux minima est supra magnitudinem 7^{m}, composita a H., et typis descripta subsidiis Cl. Dominæ Catharinæ W. Bruce, 21 planches et VIII p. texte. In-4°, Berlin, Dames. 37 m. 20 pf.

— *Synopsis der höheren Mathematik.* III. Bd. *Differential- u. Integralrechnung.* 7e fasc. In-4°. Berlin, Dames. 5 m. (III. vol. compl. 35 m.).

Hardy (G.-H.). — *Integration of functions of a single variable.* (*Cambridge tracts in mathematics and mathematical Physics.* N° 2.) In-8°, 62 p. London, Cambridge Univ. Press. 2 sh. 6 d.

ERRATA.

Page 154, ligne 16 (numéro de mai) :

Au lieu de 1865, *lisez* 1565.

FIN DE LA PREMIÈRE PARTIE DU TOME XXX.



TABLES

DES

MATIÈRES ET NOMS D'AUTEURS.

TOME XXX; 1906. — PREMIÈRE PARTIE.

TABLE ALPHABÉTIQUE

DES AUTEURS.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

MÉLANGES.

FIN DE LA TABLE DE LA PREMIÈRE PARTIE DU TOME XXX.

PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS,
37835 Quai des Grands-Augustins, 55.

BULLETIN

DES

SCIENCES MATHÉMATIQUES.

AVIS.

Toutes les communications doivent être adressées à M. *Darboux*, Secrétaire perpétuel de l'Académie des Sciences, rue Gay-Lussac, 36, à Paris.

BIBLIOTHÈQUE DE L'ÉCOLE DES HAUTES ÉTUDES

PUBLIÉE SOUS LES AUSPICES DU MINISTÈRE DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE.

3

BULLETIN

DES

SCIENCES MATHÉMATIQUES,

RÉDIGÉ PAR MM. G. DARBOUX, É. PICARD ET J. TANNERY,

AVEC LA COLLABORATION DE

MM. BROCARD, GOURSAT, KŒNIGS,

LAISANT, LAMPE, MANSION, MOLK, RADAU, RAFFY, S. RINDI, SAUVAGE,

SCHOUTE, ZEUTHEN, ETC.,

Sous la direction de la Commission des Hautes Études.

PUBLICATION FONDÉE EN 1870 PAR MM. G. DARBOUX ET J. HOÜEL

CONTINUÉE DE 1876 A 1886 PAR MM. G. DARBOUX, J. HOUEL ET J. TANNERY

ET DE 1886 A 1905 PAR MM. G. DARBOUX ET J. TANNERY.

DEUXIÈME SÉRIE.

TOME XXX. — ANNÉE 1906.

(XLIe VOLUME DE LA COLLECTION.)

SECONDE PARTIE.



PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

Quai des Grands-Augustins, 55.

1906

BULLETIN

DES

SCIENCES MATHÉMATIQUES.

SECONDE PARTIE.

REVUE DES PUBLICATIONS ACADÉMIQUES ET PÉRIODIQUES.

BULLETIN DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE.

Tome XXXI, 1903 ([1]).

De Montcheuil. — La développée moyenne et les surfaces applicables. (1-27).

Une surface S_1 étant définie comme l'enveloppe du plan mobile

$$(u+u_1)\,x_1 - i(v-u_1)\,y_1 + (uu_1-1)\,z_1 + \xi = 0,$$

où ξ est une fonction donnée de u et u_1, les équations

$$\psi = (u+u_1)\,x - i(u-u_1)\,y + (uu_1-1)\,z + i(uu_1+1)\rho + \xi = 0,$$
$$\frac{\partial\psi}{\partial u} = 0, \qquad \frac{\partial\psi}{\partial u_1} = 0, \qquad \frac{\partial^2\psi}{\partial u\,\partial u_1} = 0$$

déterminent la développée moyenne ponctuelle S de la surface S_1. Ses coordonnées

---

([1]) Voir *Bulletin*, t. XXVII_2, p. 150.

sont x, y, z et $-i\rho$ est la demi-somme des rayons de courbure principaux de S_1 au point (x_1, y_1, z_1) qui correspond à (x, y, z).

Si l'on prend pour ξ la fonction φ_α tirée de la relation

$$(u+u_1)a_\alpha - i(u-u_1)b_\alpha + (uu_1-1)c_\alpha + i(uu_1+1)d_\alpha + \varphi_\alpha = 0,$$

où $a_\alpha, b_\alpha, c_\alpha, d_\alpha$ sont des constantes, les quatre équations ci-dessus définissent une sphère de centre $a_\alpha, b_\alpha, c_\alpha$ et de rayon $-i\,d_\alpha$.

A l'aide de quatre fonctions $\varphi_\alpha(\alpha = 1, 2, 3, 4)$, on définit quatre fonctions θ_α par l'équation

$$\theta_\alpha = \frac{1}{2}\left(\varphi_\alpha \frac{\partial^2 \xi}{\partial u\,\partial u_1} - \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial u_1}\frac{\partial \xi}{\partial u} - \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial u}\frac{\partial \xi}{\partial u_1} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u\,\partial u_1}\xi\right),$$

puis quatre fonctions θ'_α composées avec les mêmes φ_α, ξ étant remplacé par une autre fonction ξ' et l'on calcule la forme quadratique

$$\Theta = d\theta_1 d\theta'_1 + d\theta_2 d\theta'_2 + d\theta_3 d\theta'_3 + d\theta_4 d\theta'_4,$$

qui joue un rôle fondamental dans le présent travail. En effet, les θ sont des combinaisons linéaires de x, y, z et ρ; elles se réduisent à x, y, z et ρ dans des cas particuliers.

Pour son objet l'auteur restreint la généralité de la forme quadratique Θ en imposant aux seize constantes $a_1, \ldots, a_4$ les neuf conditions qui expriment qu'on a *identiquement*

$$\sum_1^4 \varphi_\alpha^2 = 0.$$

Alors les quatre sphères $\varphi_\alpha(\alpha = 1, 2, 3, 4)$ sont de même puissance par rapport à l'origine; la distance des deux points de contact d'une tangente commune à deux d'entre elles est constante, quel que soit le couple de sphères considéré. Les quatre sphères sont orthogonales à la sphère de rayon 1, ayant son centre à l'origine, qui sert de représentation sphérique à la surface S_1. Ce système de quatre sphères doit être rapproché du système pentasphérique de M. Darboux.

Moyennant les neuf conditions ci-dessus, la forme Θ se réduit à

$$\Theta = \sum d\theta_\alpha d\theta'_\alpha = \frac{K^2}{2}\left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial u^2}\frac{\partial^2 \xi'}{\partial u_1^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial u_1^2}\frac{\partial^2 \xi'}{\partial u^2}\right) du\,du_1.$$

où l'on a posé

$$\sum \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial u}\frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial u_1} = 2K^2 = \text{const.}$$

Dès lors $(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$ et $(\theta'_1, \theta'_2, \theta'_3)$ seront les coordonnées de deux surfaces se correspondant avec orthogonalité des éléments linéaires, si l'on annule à la fois θ_4 et le coefficient de $du\,du_1$, ce qui donne

$$\xi = (U' + U'_1)\varphi - 2U\frac{\partial \varphi}{\partial u} - 2U_1\frac{\partial \varphi}{\partial u_1},$$

$$U'''_1 \frac{\partial^2 \xi'}{\partial u^2} + U'''\frac{\partial^2 \xi'}{\partial u_1^2} = 0,$$

$U(u)$ et $U_1(u_1)$ étant des fonctions arbitraires, dont les lettres accentuées représentent les dérivées. De là se déduisent, comme le montre l'auteur, de nombreux couples de surfaces qui se correspondent avec orthogonalité des éléments et des couples de surfaces applicables d'une grande généralité.

En étudiant le cas particulier où les deux fonctions ξ et ξ' sont identiques, Θ ayant toujours sa forme réduite, on obtient des résultats remarquables.

Tout d'abord, en désignant par ρ au lieu de $-i\rho$ la demi-somme des rayons de courbure, on a pour l'élément linéaire de la développée moyenne

$$ds^2 = d\rho^2 + \frac{\partial^2 \xi}{\partial u^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial u_1^2} du \, du_1,$$

formule qui donne lieu à diverses conséquences.

Attribuant ensuite à ξ l'expression $F(u)\,F_1(u_1)$, on obtient tout à la fois les coordonnées, mises sous forme entièrement explicite des développées moyennes des surfaces enveloppes de sphères passant par un point fixe et dont le centre décrit cette développée, et une surface applicable sur chacune de ces développées.

Le Mémoire se termine par l'examen du cas où ξ vérifie l'équation

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial u^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial u_1^2} = U' U'_1.$$

Maillet (*Edm.*). — Sur les fonctions monodromes à point singulier essentiel isolé (troisième Note). (27-47).

Introduction. — Soit $F(z)$ une fonction monodrome dans une certaine région R comprenant tous les points du plan à l'extérieur d'un cercle Γ ayant pour centre l'origine, et qui n'a dans R qu'un point critique A à l'infini.

F est développable dans R d'après la formule de Laurent :

$$F(z) = \varphi_0(z) + \varphi\left(\frac{1}{z}\right),$$

$$\varphi_0(z) = A_0 + A_1 z + \ldots + A_l z^l + \ldots,$$

$$\varphi(y) = B_1 y + \ldots + B_l y^l.$$

La série $\varphi_0(z)$ a un rayon de convergence infini : c'est donc une fonction entière dans la région R; $\varphi\left(\frac{1}{z}\right)$ reste fini et même tend vers zéro avec $\frac{1}{z}$. C'est la croissance de $\varphi_0(z)$ aux environs de $z = \infty$ qui détermine la croissance de $F(z)$ pour $z = \infty$.

Il sera donc naturel de classer la croissance de $F(z)$ comme celle de $\varphi_0(z)$ pour $z = \infty$. Si $\varphi_0(z)$ est d'ordre fini ρ, on dira que $F(z)$ est d'ordre fini ρ aux environs de $z = \infty$ et l'on aura

$$|F(z)| < e^{r^{\rho+\varepsilon}}$$

(ε étant donné, fini et positif) si $r = |z|$ est suffisamment grand.

Si $\varphi_0(z)$ est d'ordre infini, on dira que $F(z)$ est d'ordre infini; toute classification des ordres infinis des fonctions entières s'appliquera aux fonctions $F(z)$.

Nous dirons que $F(z)$ est une *fonction quasi-entière dans* R *pour* $z = \infty$.

En appliquant à $F(z)$ des raisonnements semblables à ceux de la théorie des fonctions entières et quasi-entières, nous lui étendrons : 1° le théorème de Weierstrass sur la représentation des fonctions entières par un produit infini; 2° ceux de M. Borel sur les fonctions entières d'ordre fini à croissance régulière; 3° celui de Laguerre-Chio sur les racines de la dérivée d'une fonction entière réelle d'ordre $< r$ et dont toutes les racines sont réelles; 4° enfin les théorèmes de MM. Picard et Borel sur la fréquence des racines des fonctions entières et méromorphes.

Nous retrouverons ainsi une démonstration du théorème de M. Picard sur les racines des équations $f(z) = a$ (a constante quelconque) aux environs d'un point singulier essentiel.

Incidemment, nous établirons ce résultat :

Étant donné un contour C quelconque, soit

$$f(z) = A'_0 + A'_1 z + \ldots + A'_l z^l + \ldots$$

une fonction entière;

$$f_l(z) = A'_0 + A'_1 z + \ldots + A'_l z^l;$$

on peut toujours prendre λ assez grand pour qu'à toute racine de $f_l(z) = 0$ dans $C(\lambda \leqq l)$ en corresponde, dans C pour $f(z)$, une et une seule qui en diffère aussi peu qu'on veut.

Buhl (*A.*). — Sur les surfaces dont un système de lignes asymptotiques se projette suivant une famille de courbes données. (47-54).

Toute famille de courbes définie par l'équation différentielle

$$(1) \qquad \frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

est la projection de l'une des familles de lignes asymptotiques d'une surface dont la troisième coordonnée z est assujettie uniquement à vérifier l'équation

$$(2) \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2f\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} + f^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

L'équation la plus générale de ce type linéaire et homogène, à caractéristiques confondues,

$$(3) \qquad A^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2AB\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} + B^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

définit des surfaces dont une famille d'asymptotiques se projette suivant les courbes intégrales de l'équation différentielle

$$(4) \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{B}{A}.$$

Elle se ramène toujours, *par un changement de variables*, à la forme

$$(5) \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial s^2} - \lambda\frac{\partial z}{\partial t} = 0.$$

Pour que λ, en général variable, se réduise à une constante, auquel cas on peut supposer $\lambda = 1$ et obtenir de nombreuses solutions de l'équation (5), il faut et il suffit qu'il existe un facteur R tel que RA et RB soient des solutions de l'équation (3).

En particulier, si A et B vérifient cette équation (3), la réduction sera possible. C'est ce qui arrive notamment, si $A = 0$ et $B = 0$ sont les équations de deux droites. Les courbes intégrales de l'équation (4) sont alors les lignes invariantes des transformations projectives qui conservent la droite de l'infini. Elles rentrent toutes dans quatre types simples que l'auteur examine successivement.

Perrin (*Raoul*). — Sur quelques conséquences géométriques de l'équation différentielle des coniques. (54-64).

L'auteur fait remarquer tout d'abord que l'équation différentielle des coniques à centre

$$(1) \qquad 9y''^2 y^{\mathrm{v}} - 45 y'' y''' y^{\mathrm{iv}} + 40 y'''^3 = 0$$

admet l'intégrale première

$$\frac{y''^8}{(3y''y^{\mathrm{iv}} - 5y'''^2)^3} = \text{const} = k.$$

Il exprime ensuite la constante k au moyen des deux discriminants δ et Δ et trouve

$$k = \frac{\Delta^2}{3^6 \delta^2},$$

ce qu'on peut encore écrire

$$k = \frac{\alpha^2 \beta^2}{3^6 \sin^2 \omega}$$

en désignant par α et β les deux demi-axes de la conique et par ω l'angle des coordonnées. Si l'on convient d'appeler *aire* d'une conique quelconque le produit $\pi\alpha\beta$ et de le représenter par S, on aura

$$k = \frac{S^2}{3^6 \pi^2 \sin^2 \omega},$$

de sorte que l'équation du quatrième ordre où figure k représente toutes les coniques qui ont même *aire*. D'ailleurs S est réelle et positive pour une ellipse réelle; réelle et négative pour une ellipse imaginaire; imaginaire pour une hyperbole; nulle pour un système de deux droites; infinie pour une parabole.

L'auteur considère ensuite une courbe plane quelconque et attache à chacun de ses points sa conique osculatrice. Le carré de l'aire S de cette conique est déterminé, les axes étant supposés rectangulaires, par la formule

$$S^2 = \frac{3^6 \pi^2 y''^8}{(3y''y^{\mathrm{iv}} - 5y'''^2)^3},$$

où y'', y''', y^{iv} sont les dérivées de l'ordonnée considérée comme fonction de l'abscisse.

On peut donc caractériser la forme de la courbe en ses points successifs par les valeurs successives de S^2 et dire qu'un point appartient au type elliptique, hyperbolique ou parabolique, suivant que la valeur de S^2 en ce point est positive, négative ou infinie. M. Perrin étudie par ce moyen la répartition, sur les branches réelles d'une courbe quelconque, des points du type elliptique, hyperbolique, parabolique, des points d'inflexion ou des points sextactiques (où la conique osculatrice a, non plus 5, mais 6 points confondus avec la courbe).

Des considérations analogues sont développées pour l'équation différentielle

$$3y''y^{\text{IV}} - 5y'''^2 = 0$$

des paraboles qui admet l'intégrale première

$$\frac{y''^5}{y'''^3} = \text{const.},$$

et pour la variation de forme et de position de la parabole osculatrice à une courbe quelconque en ses différents points.

Dans la dernière partie de son Mémoire, M. Perrin transforme les équations différentielles des paraboles et des coniques à centre de manière à n'y laisser subsister que des éléments purement géométriques; savoir le rayon de courbure R en un point M, le rayon de courbure ρ_1 de la première développée au point M_1 qui correspond à M, le rayon de courbure ρ_2 de la seconde développée au point M_2 qui correspond à M_1 et ainsi de suite. Grâce à une convention qui précise les signes de ces divers segments, on trouve pour les paraboles

$$9R^2 - 3R\rho_2 + 4\rho_1^2 = 0,$$

et pour les coniques à centre

$$9R^2(\rho_3 + 4\rho_1) - 45R\rho_1\rho_2 + 40\rho_1^3 = 0.$$

L'analogie de cette dernière équation avec l'équation (1) est frappante : on passe de l'équation (1) à celle-ci en remplaçant y'', y''', y^{IV}, y^{V} respectivement par R, ρ_1, ρ_2, $\rho_3 + 4\rho_1$.

De Séguier. — Sur une proposition de Mathieu. (65-66).

Nouvelle démonstration, très simple, de ce théorème :

Dans un groupe G transitif, de degré $q = 2p + 1$ (p et q étant premiers), d'ordre inférieur ou au plus égal à $\frac{1}{2}q!$ et supérieur à $q(q-1)$, les diviseurs d'ordre p sont permutables à des substitutions de degré

$$2(p-1) = q - 3.$$

Laisant (C.-A.). — Note sur un problème d'interpolation (66-68).

Il s'agit de représenter par une formule d'interpolation l'ordonnée variable y d'une courbe, connaissant les aires comprises entre l'axe des y, la courbe et

ses ordonnées correspondant à n abscisses données, ainsi que le moment de chacune de ces aires par rapport à l'axe des y.

Appell (Paul). — Sur les fonctions et vecteurs de point contenant uniquement les dérivées premières des composantes de la vitesse. (68-73).

Dans une Note des *Comptes rendus* et un Mémoire du *Journal de Mathématiques* (1903), l'auteur a étudié les fonctions et vecteurs du point relatifs à un fluide en mouvement, ces grandeurs étant supposées ne dépendre que des neuf dérivées partielles

$$\frac{\partial u}{\partial x}, \quad \frac{\partial u}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial z}; \qquad \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial v}{\partial z}; \qquad \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \frac{\partial w}{\partial y}, \quad \frac{\partial w}{\partial z}$$

des composantes u, v, w de la vitesse du point (x, y, z). Il complète ici, sur quelques points particuliers, l'étude de ces grandeurs qu'il désigne par le nom de *fonctions et vecteurs de point du premier ordre*.

Raffy (L.). — Détermination explicite des surfaces qui présentent un réseau doublement cylindré. (77-104).

Quand une surface présente un réseau conjugué (u, v) tel que les plans osculateurs, menés aux courbes $v =$ const. en tous les points de chaque ligne $u =$ const., soient parallèles à une direction fixe, l'auteur dit que la famille $u =$ const. est *cylindrée*. Si la même propriété appartient aux deux familles du réseau, le réseau est dit *doublement cylindré*. C'est à la détermination explicite des surfaces qui présentent un réseau conjugué de cette espèce qu'est consacré le Mémoire actuel.

Il débute par quatre lemmes qui caractérisent comme familles cylindrées certaines familles de courbes communes à toutes les surfaces. Dans tous les énoncés qui suivent, B et B_1 sont les coefficients de l'équation

$$\text{(E)} \qquad \frac{\partial^2 x_n}{\partial u \, \partial v} = B \frac{\partial x_n}{\partial u} + B_1 \frac{\partial x_n}{\partial v}$$

à laquelle satisfont les trois coordonnées ponctuelles x_n $(n = 1, 2, 3)$ d'une surface (S) rapportée aux paramètres (u, v) d'un réseau conjugué.

1° Pour que les lignes $u =$ const. soient des courbes de contact de cylindres circonscrits, il faut et il suffit que l'on ait identiquement

$$B_1 = 0.$$

2° Si les lignes $u =$ const. sont des courbes de contact de cylindres circonscrits, les plans osculateurs, menés aux courbes $v =$ const. en tous les points de chaque ligne $u =$ const., sont parallèles à un plan fixe, et réciproquement.

3° Pour que les lignes $u =$ const. soient des courbes de contact de cônes circonscrits, il faut et il suffit que l'on ait identiquement

$$BB_1 - \frac{\partial B_1}{\partial v} = 0.$$

4° Si les lignes $u = \text{const.}$ sont des courbes de contact de cônes circonscrits, les plans osculateurs, menés aux courbes $v = \text{const.}$ en tous les points de chaque ligne $u = \text{const.}$, passent par une droite fixe, qui est la tangente au lieu du sommet des cônes, et réciproquement.

Vient ensuite le caractère analytique général d'une famille cylindrée :

Pour que les lignes $u = \text{const.}$, supposées n'être pas des courbes de contact de cylindres circonscrits, forment une famille cylindrée, il faut et il suffit que l'on ait identiquement :

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(B - \frac{\partial \log B_1}{\partial v}\right) + B_1\left(B - \frac{\partial \log B_1}{\partial v}\right) = 0.$$

Il y a lieu de partager les réseaux doublement cylindrés en deux grandes catégories, suivant qu'ils sont ou ne sont pas *singuliers*, c'est-à-dire qu'une de leurs familles est ou n'est pas composée de courbes de contact de cylindres circonscrits.

Pour définir analytiquement toutes les solutions, on représentera par des lettres U des fonctions arbitraires de la seule variable u, par des lettres V des fonctions arbitraires de la seule variable v; les accents désigneront des dérivées.

Il y a trois classes de surfaces présentant un réseau doublement cylindré *singulier;* voici leurs définitions et leurs représentations :

I. Les surfaces pour lesquelles les deux familles du réseau sont des courbes de contact de cylindres circonscrits. Ce sont les *surfaces de translation*

$$x_n = U_n + V_n \qquad (n = 1, 2, 3).$$

II. Les surfaces qui admettent un réseau conjugué formé par une famille $u = \text{const.}$ de courbes de contact de cylindres circonscrits et par une famille $v = \text{const.}$ de courbes de contact de cônes circonscrits. Coordonnées :

$$x_n = U_n V + V_n \qquad (n = 1, 2, 3).$$

III. Les surfaces qui admettent un réseau conjugué formé par une famille $u = \text{const.}$ de courbes de contact de cylindres circonscrits et par une famille de lignes $v = \text{const.}$ qui ne sont ni des courbes de contact de cylindres circonscrits, ni des courbes de contact de cônes circonscrits. Coordonnées :

$$x_n = \frac{U'_n}{U'}(U + V) - (U_n + V_n) \qquad (n = 1, 2, 3).$$

La recherche des réseaux doublement cylindrés *non singuliers* revient à l'intégration de l'équation (E) lorsque ses coefficients B et B_1 satisfont au système

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(B - \frac{\partial \log B_1}{\partial v}\right) + B_1\left(B - \frac{\partial \log B_1}{\partial v}\right) = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(B_1 - \frac{\partial \log B}{\partial u}\right) + B\left(B_1 - \frac{\partial \log B}{\partial u}\right) = 0,$$

et constitue une application de la méthode de Laplace. En effet, les deux condi-

tions ci-dessus conduisent à distinguer trois cas, suivant que les deux invariants h et k de l'équation (E) sont *tous les deux nuls*, ou qu'*un seul est nul*, ou qu'***aucun n'est nul***. Il y a trois classes de surfaces correspondantes.

IV. Surfaces pour lesquelles les deux familles du réseau conjugué sont des courbes de contact de cônes circonscrits. Coordonnées :

$$x_n = \frac{U_n - V_n}{U + V} \qquad (n = 1, 2, 3).$$

V. Surfaces pour lesquelles une seule famille $u =$ const. du réseau conjugué est formée par des courbes de contact de cônes circonscrits. Coordonnées :

$$x_n = \frac{\frac{U'_0}{U'}(U - V) - U_0}{\left(\frac{U'_0}{U'}\right)'(U + V)} U'_n + \frac{U_0 V_n}{U - V} - U_n \qquad (n = 1, 2, 3).$$

VI. Surfaces pour lesquelles aucune des deux familles du réseau conjugué ne se compose de courbes de contact, soit de cylindres, soit de cônes circonscrits. Coordonnées :

$$x_n = \frac{\frac{U'_0}{U'}(U - V) - (U_0 - V_0)}{\left(\frac{U'_0}{U'}\right)'(U - V)} U'_n - \frac{\frac{V'_0}{V'}(U + V) - (U_0 + V_0)}{\left(\frac{V'_0}{V'}\right)'(U + V)} V'_n - (U_n + V_n).$$

Ici se place une digression sur l'importante transformation de Peterson, retrouvée par M. Guichard (loi de parallélisme des réseaux). Il y est prouvé, entre autres, que la transformation de Peterson, appliquée aux réseaux à invariants égaux, conduit à la transformation de Moutard.

Le Mémoire se termine par la recherche des surfaces qui admettent un réseau doublement cylindré à invariants égaux. Ce sont d'abord les surfaces I, II et IV; puis celles qu'on déduit des surfaces VI en faisant $2V_0 = V^2$, $2U_0 = -U^2$; enfin, celles qui sont définies par les formules

$$x_n = \frac{U_0 - V_0}{U_0 + V_0}\left(\frac{U_0}{U'_0} U'_n - \frac{V_0}{V'_0} V'_n\right) - (U_n + V_n) \qquad (n = 1, 2, 3).$$

André (*Désiré*). — Mémoire sur les couples actifs des permutations. (105-140).

Introduction. — 1. Pour donner une idée de l'objet et des résultats du présent Mémoire, il est nécessaire de rappeler deux notions déjà anciennes, celle des *séquences* des permutations, celle des *deux espèces* de permutations, et de faire connaître une notion toute nouvelle, celle des ***couples actifs*** de permutations.

Les permutations, d'ailleurs, dont nous nous occupons, sont celles des n premiers nombres : ces nombres en sont les éléments.

2. Une permutation quelconque des n premiers nombres est formée évidemment de suites alternatives d'éléments croissants ou décroissants. Chacune de

ces suites est une séquence. La permutation

$$87164235 9$$

est ainsi formée des quatre séquences

$$871,\quad 16,\quad 642,\quad 2359;$$

et la permutation

$$781642359$$

des cinq séquences

$$78,\quad 81,\quad 16,\quad 642,\quad 2359.$$

3. Les permutations de n éléments se partagent en deux espèces : celles qui contiennent un nombre pair de séquences composent la première; celles qui en contiennent un nombre impair composent la seconde. La première des permutations ci-dessus (2) contient quatre séquences : elle appartient à la première espèce; la deuxième en contient cinq : elle appartient à la seconde.

4. Lorsque, dans une permutation de n éléments, on échange entre eux deux éléments quelconques, tantôt cette permutation change d'espèce, tantôt elle n'en change pas. Si elle en change, les deux éléments considérés constituent un *couple actif;* sinon, un *couple inactif.* Dans chacune (2) des permutations précédentes, 8 et 6 forment un couple actif; 4 et 3, un couple inactif.

C'est aux couples actifs, et à eux seulement, que sont consacrés les trois Chapitres composant ce Mémoire.

5. D'abord (Chapitre Ier), je considère les éléments d'une permutation déterminée quelconque de n éléments; je classe les couples de ces éléments; et je donne les conditions nécessaires et suffisantes pour que l'un quelconque d'entre eux soit un couple actif. Je cherche le nombre total des couples actifs contenus dans cette permutation, et j'exprime ce nombre à l'aide d'une formule unique, très simple, où il n'entre, avec le nombre n des éléments, que trois paramètres distincts. J'en déduis la probabilité pour que deux éléments, pris au hasard dans la permutation considérée, forment un couple actif; et je fais connaître la valeur maxima et la valeur minima que cette probabilité peut prendre dans les permutations de n éléments.

6. Passant ensuite (Chapitre II) de la considération d'une permutation déterminée à celle de toutes les permutations de n éléments, je partage ces permutations en trois sortes; je nomme, pour des raisons presque géométriques, les permutations entrant dans chacune d'elles : permutations à *segments séparés*, permutations à *segments imbriqués*, permutations à *segments superposés;* et je montre que, dans ces trois sortes, les permutations sont en même nombre. Dans ces trois sortes, d'ailleurs, je ne prends provisoirement que les permutations où les deux premiers éléments, les deux derniers et les $n-4$ intermédiaires se suivent dans l'ordre des grandeurs croissantes : ce sont les *permutations ordonnées;* et je donne des formules indiquant les calculs à effectuer pour obtenir les nombres φ_n, χ_n, ψ_n des couples actifs contenus respectivement dans les permutations ordonnées des trois sortes. Ces formules présentent chacune une superposition de quatre Σ; mais elles ne sont, toutes les trois, que des cas particuliers d'une formule unique; et, en effectuant sur cette dernière des

calculs indiqués, j'obtiens, pour $\varphi_n, \chi_n, \psi_n$ en fonction de n, des expressions très courtes, d'une remarquable simplicité.

7. Enfin (Chapitre III), ne me bornant plus aux permutations ordonnées, je considère toutes les permutations de n éléments; je fais connaître, en fonction de n, le *nombre total* des couples actifs contenus dans l'ensemble des permutations à segments séparés, dans l'ensemble des permutations à segments imbriqués, dans l'ensemble des permutations à segments superposés; et j'en déduis, pour chacun de ces ensembles, le *nombre moyen* des couples actifs contenus dans une permutation. Faisant abstraction des trois sortes de permutations, je considère le système complet des permutations de n éléments; je détermine, en fonction de n, le *nombre total* des couples actifs qu'il contient; le *nombre moyen* de ceux que contient une permutation quelconque; et le rapport de ce nombre moyen au nombre n des éléments. Tous ces résultats me permettent alors de résoudre plusieurs questions de probabilités, dont voici la dernière :

Quelle est la probabilité d'obtenir un couple actif en prenant deux éléments quelconques dans une permutation quelconque de n éléments ?

Autonne (*Léon*). — Sur l'hypohermitien. (140-155).

Laisant (*C.-A.*). — Sur une propriété des mouvements dus à une force centrale. (156).

Soit M_0M un arc de la trajectoire d'un point matériel sollicité par une force centrale, S étant le centre des forces; considérons le centre de gravité G de l'arc de courbe M_0M, la densité en chaque point étant inversement proportionnelle à la vitesse; soit, en outre, O le centre de gravité du secteur SM_0M; on a

$$SG = \tfrac{3}{2}SO,$$

les trois points S, O, G étant en ligne droite.

Borel (*Emile*). — Sur l'approximation des nombres réels par les nombres quadratiques. (257-184).

Liste, dressée d'après la Table des racines carrées de Barlow, des racines des 500 premiers nombres, rangés par ordre de grandeur des parties décimales.

Goursat (*E.*). — Sur la théorie des fonctions implicites. (184-192).

L'auteur applique la méthode des approximations successives de M. Picard à l'équation

$$y = f(x, y),$$

dont le second membre s'annule pour $x = y = 0$ et reste continu quand x varie de $-a$ à $+a$ et y de $-b$ à $+b$. De plus, a et b doivent pouvoir être choisis

assez petits pour que l'on ait

$$|f(x, y') - f(x, y'')| < K(y' - y''),$$

x, y' et y'' étant quelconques dans le domaine considéré, et K un nombre positif constant *inférieur à l'unité*. Ayant prouvé que l'équation proposée admet une racine et une seule y qui tend vers zéro avec x, M. Goursat passe facilement à la forme habituelle du théorème d'existence de la fonction implicite d'une variable.

Un lemme analogue, relatif aux fonctions de plusieurs variables, lui permet d'aborder le système le plus général,

$$F_i(x_1, x_2, \ldots, x_n; y_1, y_2, \ldots, y_p) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, p),$$

dont les premiers membres sont des fonctions continues, et admettent des dérivées partielles continues $\frac{\partial F_i}{\partial y_k}$ dans le voisinage d'un système de valeurs

$$x_1^0, \quad x_2^0, \quad \ldots, \quad x_n^0; \quad y_1^0, \quad \ldots, \quad y_p^0$$

qui les annule tous, avec la condition supplémentaire que le déterminant fonctionnel

$$\frac{D(F_1, F_2, \ldots, F_p)}{D(y_1, y_2, \ldots, y_p)}$$

soit différent de zéro pour ce système de valeurs.

Lecornu (*L.*). — Sur les lignes asymptotiques de certaines surfaces. (122-127).

L'auteur appelle *surface à pente uniforme* une surface dont chaque ligne de plus grande pente, prise individuellement, présente une pente constante, qui peut d'ailleurs varier d'une ligne à l'autre suivant une loi quelconque. Avec les notations usuelles, l'équation des surfaces à pente uniforme est

$$(1) \qquad p^2 r + 2pqs + q^2 t = 0;$$

elle montre immédiatement que les lignes de plus grande pente

$$\frac{dx}{p} = \frac{dy}{q}$$

forment une famille d'asymptotiques.

De plus, elles sont divisées par les lignes de niveau en parties proportionnelles; la propriété subsiste en projection horizontale et l'on obtient ainsi une famille de courbes divisées proportionnellement par leurs trajectoires orthogonales (*réseau proportionnel*).

L'équation (1) a, comme le montre M. Lecornu, pour intégrales les surfaces enveloppes du plan

$$(2) \qquad z = e^{\text{[illegible]}}(x \sin \alpha - y \cos \alpha) + u,$$

où u satisfait à l'équation

$$(3) \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} - \frac{\partial u}{\partial \gamma} = 0.$$

On a ainsi des surfaces dont une famille d'asymptotiques se projette suivant les courbes intégrales d'une équation de la forme

$$(4) \qquad \frac{dy}{dx} = f(x, y),$$

et dont la détermination dépend de l'équation (3).

Cette équation est celle que M. Buhl a considérée (*voir* ci-dessus). Seulement, ici, la réduction de l'équation (1) à l'équation (3) s'effectue non plus par un simple changement de variables, mais par un changement simultané *de fonction et de variables*. On aura donc de nouvelles solutions du problème de M. Buhl si l'on assujettit la fonction f à la condition qui exprime que l'équation (4) définit une famille de courbes formant avec leurs trajectoires orthogonales un réseau proportionnel. On trouve ainsi que f doit vérifier l'équation

$$(5) \qquad \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + 2f\frac{\partial \theta}{\partial x\, \partial y} + f^2\frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} = 0 \qquad (\theta = \operatorname{arc\,tang} f).$$

Alors le réseau proportionnel est donné par les équations

$$(6) \qquad x = e^{\gamma}\left(\frac{\partial u}{\partial \gamma}\sin\alpha - \frac{\partial u}{\partial \alpha}\cos\alpha\right), \qquad y = e^{\gamma}\left(\frac{\partial u}{\partial \gamma}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial \alpha}\sin\alpha\right),$$

où $\gamma =$ const. définit les courbes du système. On obtient la surface à pente uniforme en adjoignant à ces relations l'équation (2).

Enfin, pour choisir u de façon à identifier la famille de courbes (6) avec une famille donnée de courbes vérifiant l'équation (5), on a à intégrer une équation différentielle du premier ordre et deux quadratures à effectuer.

Lebesgue (*H.*). — Sur le problème des aires. (197-203).

L'auteur pose en ces termes le problème des aires des domaines plans : Attacher à chaque domaine plan un nombre positif (que l'on appellera son *aire*) tel que : 1° deux domaines superposables aient la même aire; 2° le domaine formé par la réunion de deux domaines, sans points intérieurs communs, ayant en commun un arc de frontière et un seul, ait pour aire la somme des aires des domaines composants.

Il montre ici que le problème des aires est indéterminé pour les domaines non quarrables.

Estanave (*E.*). — Sur les coefficients des développements en séries de tang$x$, sécx et d'autres fonctions; leur expression à l'aide d'un déterminant unique. (203-208).

Les nombres A_n de M. Désiré André qui figurent dans les développements

$$\operatorname{tang} x = A_1 \frac{x}{1!} + A_3 \frac{x^3}{3!} + A_5 \frac{x^5}{5!} + \ldots + A_{2p-1} \frac{x^{2p-1}}{(2p-1)!} + \ldots,$$

$$\operatorname{séc} x = A_0 \quad + A_2 \frac{x^2}{2!} + A_4 \frac{x^4}{4!} + \ldots + A_{2p} \frac{x^{2p}}{2p!} \qquad + \ldots,$$

peuvent être substitués avec avantage à la considération d'autres suites de nombres tels que ceux d'Euler, de Bernoulli, de Genocchi, suites disparates d'entiers et de fractions, sans loi simple et sans signification intrinsèque. Au contraire, les nombres A_n sont tous entiers; ils ont une signification combinatoire propre, et, par suite, une existence indépendante des développements où ils figurent comme coefficients.

M. Estanave donne du nombre A_n une expression générale par un déterminant d'ordre n dont les éléments sont des nombres de combinaisons.

Hadamard. — Sur un problème mixte aux dérivées partielles. (208-229).

Étant données une équation de Laplace

$$(1) \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial u} + a \frac{\partial z}{\partial x} + b \frac{\partial z}{\partial y} + c z = 0$$

et une ligne L coupée en un seul point par chaque droite $x =$ const. et chaque droite $y =$ const., une solution de l'équation (1) sera déterminée si l'on donne, en chaque point de L, les valeurs de z et de ses dérivées premières (données de Cauchy).

Il n'en est plus de même si la ligne L, toujours coupée en un seul point par toute droite $x =$ const., se compose de deux arcs BA, AC tels que toute droite $y =$ const. qui coupe l'un coupe aussi l'autre. Le problème devient impossible (Picard) par surabondance de conditions.

M. Hadamard lui substitue un problème *mixte*, intermédiaire entre celui de Cauchy et celui de Dirichlet, en se donnant sur l'arc BA les données de Cauchy, sur l'arc AC les valeurs de z seulement. Le problème est alors possible et déterminé. Il intervient dans diverses recherches de physique mathématique. C'est pourquoi l'auteur en a cherché une solution analogue à celle qui résulte pour le problème de Dirichlet de la considération de la fonction de Green, et pour le problème de Cauchy, relatif à l'équation (1), de la méthode de Riemann.

Cette solution s'accorde, dans le cas particulier de l'équation des télégraphistes, avec celle qui a été trouvée directement par M. Brillouin. Elle conduit même à simplifier cette dernière en formant la fonction U à l'aide de deux fonctions de Bessel sans quadrature. La comparaison de cette expression avec celle que l'on obtient par quadrature fournit, pour la fonction de Bessel d'indice zéro, une propriété fonctionnelle qui a d'ailleurs son analogue pour les fonctions de Bessel d'indices quelconques.

Saltykow (N.). — Sur l'existence des intégrales d'un système

complet d'équations aux dérivées partielles du premier ordre d'une seule fonction inconnue (224-229).

Soit donné un système *complet* de m équations

$$(1) \quad p_k = \mathrm{H}_k(x_1, x_2, \ldots x_n, z, p_{m+1}, p_{m+2}, \ldots, p_n) \qquad (k = 1, 2, \ldots, m),$$

où les fonctions H_k sont holomorphes au voisinage des valeurs zéro des quantités $x_1, x_2, \ldots, x_n, z, p_{m+1}, \ldots, p_n$. L'auteur prouve qu'il existe une intégrale du système (1) holomorphe dans le domaine du point $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$ et telle que les valeurs de

$$z, \quad \frac{\partial z}{\partial x_{m+1}}, \quad \frac{\partial z}{\partial x_{m+2}}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial z}{\partial x_n}$$

en ce point deviennent identiques à

$$f, \quad \frac{\partial f}{\partial x_{m+1}}, \quad \frac{\partial f}{\partial x_{m+2}}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial f}{\partial x_n},$$

f étant une fonction des variables $x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots, x_n$, arbitraire, mais holomorphe aux environs du point

$$x_{m+1} = x_{m+2} = \ldots = x_n = 0$$

et s'annulant en ce point ainsi que ses dérivées du premier ordre.

De Montcheuil. — Séparation analytique d'un système de rayons incidents et réfléchis. (233-258).

Deux familles de surfaces normales, l'une à une congruence de rayons incidents, l'autre à la congruence des rayons réfléchis, peuvent être considérées comme les deux nappes de l'enveloppe d'une sphère dont le centre décrit la surface dirimante. La séparation analytique de ces deux nappes n'est possible que dans des cas particuliers dont l'un fait l'objet du présent Mémoire.

Avant de l'aborder, l'auteur résout l'équation

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2,$$

classique dans la théorie des courbes gauches, par une méthode toute nouvelle. Il obtient ainsi le système

$$(1) \quad \begin{cases} x = \dfrac{1-u^2}{2}(\mathrm{C}'' + \mathrm{D}') + u\mathrm{C}' - \mathrm{C}, \\ y = i\left[\dfrac{1+u^2}{2}(\mathrm{C}'' + \mathrm{D}') - u\mathrm{C}' + \mathrm{C}\right], \\ z = u(\mathrm{C}'' + \mathrm{D}') - \mathrm{C}', \\ s = \mathrm{D}, \end{cases}$$

qui présente l'important avantage d'exprimer les inconnues en fonction rationnelle des éléments de la solution, savoir la variable u, les fonctions arbitraires C et D, ainsi que leurs dérivées C′, C″, D′.

On peut alors prendre comme variable indépendante l'arc s de la courbe, lieu du point (x, y, z), et, désignant les dérivées par des accents, on trouve :

$$(2) \quad \frac{x - \dfrac{uC' - Cu'}{u'}}{\dfrac{1 - u^2}{2}} = \frac{y + i\dfrac{uC' - Cu'}{u'}}{i\dfrac{1 + u^2}{2}} = \frac{z + \dfrac{C'}{u'}}{u} = \frac{u'C'' - C'u'' + u'^2}{u'^3}.$$

Ces formules, curieuses en elles-mêmes, permettent notamment de déterminer toutes les courbes gauches *dont les coordonnées sont des fonctions rationnelles de leur arc :* on n'a qu'à prendre pour u et C des fonctions rationnelles de s.

Une autre solution du problème général conduit l'auteur à de nouvelles formules d'où il déduit entre autres pour les coordonnées d'une courbe sphérique des expressions entièrement rationnelles (l'arc dépend d'une quadrature).

Il est ensuite montré comment les formules (1) réalisent la séparation des deux plans tangents isotropes : on déduit, en effet, de ces formules, deux *équations distinctes* pour les deux plans tangents isotropes, équations dont les coefficients sont *rationnels* en u, C, C', C'', C''', D', D''. L'auteur montre, à cette occasion, que les courbes unicursales dont les plans tangents isotropes sont analytiquement séparables ne sont autres que celles dont la différentielle de l'arc est rationnelle par rapport à la variable.

Ces préliminaires permettent d'étudier le réseau des courbes génératrices d'une surface de translation lieu des milieux M des cordes reliant deux courbes P et P_1 définies par deux systèmes tels que (1). On considère deux sphères variables ayant pour centre commun le point M et pour rayons, l'une la demi-somme, l'autre la demi-différence des arcs compris sur P et P_1 entre une origine fixe et les extrémités du segment dont M est le milieu. Soient Q et Q_1 les courbes de mêmes paramètres que P et P_1 qui se croisent en M. Les enveloppes des deux sphères se composeront de quatre surfaces respectivement normales aux quatre congruences de droites intersections des quatre plans isotropes tangents aux courbes Q, Q_1. La surface de translation pourra être considérée comme la surface dirimante de deux systèmes de rayons incidents et réfléchis fournis par les quatre congruences. Pour que les deux nappes des enveloppes des deux sphères soient analytiquement séparables, il faut et il suffit que les coordonnées des deux courbes P et P_1 soient des fonctions rationnelles de leurs arcs.

Le Mémoire se termine par des exemples et la détermination des systèmes dérivés des sphères ci-dessus et pour lesquels l'une des congruences est formée de rayons parallèles.

Lecornu (L.). — Propriétés géométriques des milieux continus. (258-268).

« Toute équation $\varphi(x, y, z) = C$ dans laquelle C désigne une constante arbitraire définit une famille de surfaces; mais la réciproque n'est pas vraie et une même famille de surfaces correspond à une infinité d'équations obtenues en remplaçant φ par une fonction arbitraire de φ. Si l'on veut avoir une représentation adéquate de l'équation $\varphi = C$, il faut considérer une variable de plus et imaginer, par exemple, un milieu matériel dans lequel $\varphi(x, y, z)$ serait la densité au point (x, y, z). Les surfaces $\varphi = C$ sont alors les surfaces d'égale densité. Parmi les propriétés d'un pareil milieu, les unes se confondent avec les propriétés purement géométriques du système de surfaces et demeurent inva-

riables, quelle que soit la loi de variation de la densité dans le passage d'une surface à une autre; les autres dépendent essentiellement de cette *loi de distribution.*

« Je me propose d'établir ici quelques théorèmes de géométrie infinitésimale concernant ces deux sortes de propriétés. »

Autonne (L.). — Sur quelques propriétés des matrices hypohermitiennes *n*-aires. (268-271).

Borel (Emile). — Quelques remarques sur les ensembles de droites ou de plans. (272-275).

Perrin (Raoul). — Sur les intégrales de l'équation différentielle des coniques et leur interprétation géométrique. (275-285).

L'auteur a déjà fait connaître (*voir* ci-dessus) une intégrale première de l'équation différentielle des coniques

$$(1) \qquad 9y''^2y^{\text{v}} - 45y''y'''y^{\text{iv}} + 40y'''^2 = 0,$$

que l'on peut aussi mettre sous la forme

$$(2) \qquad 9\,\text{R}^2(\rho_3 + 4\rho_1) - 45\,\text{R}\,\rho_1\rho_2 + 40\,\rho_1^8 = 0,$$

en introduisant le rayon de courbure R de la conique et les rayons de courbure ρ_1, ρ_2, ρ_3 de ses développées successives en des points correspondants et les affectant de signes tels que ce soient aussi les dérivées successives de l'arc de la conique par rapport à l'angle de contingence. L'intégrale première, obtenue par M. Perrin, peut s'écrire

$$(3) \qquad \left(\frac{9\,\text{R}^2 - 3\,\text{R}\,\rho_2 + 4\,\rho_1^2}{\text{R}^{10}}\right)^3 = \text{const.} = \text{K},$$

et donne pour K = o l'équation différentielle des paraboles. Or l'auteur a remarqué que le type

$$\alpha\,\text{R}^2 + \beta\,\text{R}\,\rho_2 + \gamma\rho_1^2 = 0$$

comprend pour des valeurs convenables des constantes α, β, γ les équations différentielles de courbes remarquables : chaînettes, certaines courbes de poursuite, hyperboles équilatères. Ces dernières ont pour équation

$$18\,\text{R}^2 - 3\,\text{R}\,\rho_2 + 5\,\rho_1^2 = 0.$$

Il y avait dès lors lieu de rechercher si cette équation des hyperboles équilatères ne conduirait pas à une nouvelle intégrale première de l'équation (2), analogue à la relation (3). Effectivement, il existe une telle intégrale, qui est

$$\frac{18\,\text{R}^2 - 3\,\text{R}\,\rho_2 + 5\,\rho_1^2}{\text{R}^8} = \text{const.}$$

Mais, si l'on exprime cette intégrale au moyen des dérivées de y, l'angle ω

des coordonnées s'introduit, et la conique étant représentée par

$$ax^2 + by^2 + c + 2fx + 2gy + 2hxy = 0,$$

son discriminant $abc + 2fgh - af^2 - bg^2 - ch^2$ par Δ, on trouve

$$9\Delta^{-\frac{1}{3}}(a + b - 2h\cos\omega)y''^{\frac{10}{3}} + 9y''^4 + 6y''^2y'''(y' + \cos\omega) + (3y''y^{\text{IV}} - 4y'''^2)(y'^2 + 2y'\cos\omega + 1) = 0.$$

L'angle ω étant arbitraire, on obtient *deux* intégrales distinctes en égalant séparément à zéro le coefficient de $\cos\omega$ et la partie indépendante de $\cos\omega$. Avec l'intégrale (3) cela fait *trois* intégrales premières de l'équation (1).

L'auteur déduit de la connaissance de ces trois intégrales diverses conséquences, notamment le moyen de former l'équation différentielle du quatrième ordre de tout système de coniques défini par une relation où ne figurent que la forme ou l'orientation ou les deux ensemble, mais non la position absolue dans le plan.

Quiquet (*Albert*). — Sur l'emploi simultané de lois de survie distinctes. (286-290).

Boulanger (*A.*). — Sur les équations différentielles du troisième ordre qui admettent un groupe continu de transformations. (290-299).

L'objet de cette étude est de déterminer toutes les équations du troisième ordre

$$y''' = R(x, y, y', y'')$$

où R est rationnel en y'', y', analytique en y et x, qui admettent un groupe continu de transformations de la forme

$$X = x, \qquad Y = F(x, y, a, b, c),$$

où F, *rationnel en* y, *analytique en* x, dépend essentiellement des trois paramètres a, b, c.

D'après un théorème, dû à M. Painlevé, les équations qui admettent un tel groupe (Γ) transitif ont leurs points critiques fixes. En conséquence, elles se ramènent à des combinaisons d'équations linéaires et de quadratures. Mais on pouvait se demander si les inversions au moyen desquelles s'effectue cette réduction ne conduiraient pas à des transcendantes nouvelles. Dans le cas du groupe (Γ) il n'en est rien, et la conclusion de M. Boulanger est la suivante :

Les seules équations du type considéré qui répondent à la question sont des équations linéaires ou se déduisent des équations linéaires par une transformation homographique effectuée sur la fonction y, suivie ou non du changement de fonction $y = e^z$.

Hadamard. — Sur les surfaces à courbure positive. (300-301).

L'auteur a démontré antérieurement qu'une surface fermée S à courbure

positive correspond d'une manière univoque à sa représentation sphérique. De cette propriété il déduit ici cette conséquence :

Une surface à courbure partout positive, dépourvue de singularités et fermée, est tout entière située d'un même côté de chacun de ses plans tangents.

Cette proposition ne saurait être considérée comme évidente, car l'énoncé correspondant relatif aux courbes est faux.

Tome XXXII, 1904.

Mittag-Leffler (*G.*). — Sur le théorème de M. Jeusen. (1-4).

Soit $f(z)$ une fonction méromorphe à l'intérieur d'un contour fermé S comprenant à son intérieur le point x, qui n'est ni un pôle ni un zéro. Cette fonction est supposée holomorphe et différente de zéro sur le contour même. Soient a_1, a_2, ..., a_n les zéros de $f(z)$ intérieurs au contour, chacun d'eux étant compté avec son ordre de multiplicité, et b_1, b_2, ..., b_m les pôles de $f(z)$ intérieurs à S, chacun d'eux étant compté avec son degré de multiplicité.

L'auteur évalue l'intégrale

$$\frac{1}{2i\pi}\int^{S}\frac{\log f(z)}{z-x}\,dz$$

prise le long du contour S dans le sens direct, à partir d'un point A du contour. Par ce moyen il trouve

$$f(x) = \frac{(a_1-x)(a_2-x)\dots(a_n-x)}{(b_1-x)(b_2-x)\dots(b_m-x)}(A-x)^{m-n}e^{\frac{2}{2i\pi}\int^{S}\frac{\log f(z)}{z-x}dz}.$$

Faisant $z - x = re^{i\theta}$ et prenant pour S le cercle du centre x, de rayon r, on obtient

$$|f(x)| = \frac{|a_1-x|\,|a_2-x|\dots|a_n-x|}{|b_1-x|\,|b_2-x|\dots|b_m-x|}r^{m-n}e^{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|f(z)|\,d\theta},$$

formule qui donne celle de M. Jeusen quand on y fait $x = 0$.

M. Mittag-Leffler établit ensuite une nouvelle expression de $f(x)$, qu'il généralise.

De Polignac (*C.*). — Recherches sur la divisibilité du nombre

$$\frac{1.2\dots nx}{(1.2\dots x)^n}$$

par les puissances de la factorielle $1.2\dots n$. (5-43).

Le Mémoire débute par la démonstration de trois lemmes, où figure un entier positif x, et son expression dans le système de numération dont la base est un nombre premier p

$$x = a_n p^n + a_{n-1}p^{n-1} + \dots + a_2 p^2 + a_1 p + a_0.$$

Désignant par Σx la somme $a_0 + a_1 + \ldots + a_{n-1} + a_p$ des chiffres de x, on a les propositions suivantes :

I. L'exposant de la plus haute puissance de p qui entre comme diviseur dans le produit $1.2.3\ldots x$ est $\frac{x - \Sigma x}{p-1}$.

II. Soit n un second nombre entier écrit dans le système numérique de base ρ_0; faisant l'addition $x + n$, on aura

$$\Sigma(x+n) = \Sigma x + \Sigma n - k(p-1),$$

où k désigne le nombre total d'unités que, dans l'addition, on est amené à reporter d'une colonne à la suivante.

III. Faisant le produit nx, on aura

$$\Sigma nx = \Sigma n . \Sigma x - k(p-1),$$

k ayant la même signification.

Ces propositions conduisent à diverses conséquences; en voici une : Si le produit $1.2.3\ldots(n-1)n$ est divisible par p^α et non par $p^{\alpha+1}$, le produit

$$(x+1)(x+k)\ldots(x+n)$$

sera divisible par $p^{\alpha+k}$, k ayant toujours la même signification.

Voici maintenant celle qui fait l'objet propre du Mémoire actuel :

L'entier

$$E = \frac{1.2\ldots nx}{(1.2\ldots x)^n}$$

est divisible par la factorielle $1.2\ldots n$.

Partant de là, M. de Polignac pousse plus loin l'investigation. Introduisant le nombre σ qui est la plus petite des valeurs que prend Σx quand p parcourt la suite indéfinie des nombres premiers, il prouve que E *est toujours divisible* par $(1.2\ldots n)^\sigma$.

Il parvient ensuite à établir que la plus haute puissance de la factorielle $1.2\ldots n$ qui puisse diviser l'entier E est $\sigma + 3$. Mais divers exemples montrent que cet exposant peut n'être pas supérieur à σ. Il est possible que σ soit, dans tous les cas, l'exposant maximum; mais on n'est pas en droit de l'affirmer.

Rémoundos (*Georges*.). — Sur les zéros d'une classe de fonctions transcendantes. (44-50).

L'auteur considère la fonction $u(z)$ définie par l'équation

$$\sigma_0(u) + \sigma_1(u)\,A_1(z) + \sigma_2(u)\,A_2(z) + \ldots + \sigma_\nu(u)\,A_\nu(z) = 0,$$

où les $A(z)$ sont des fonctions transcendantes entières *de genre fini* et les $\sigma(u)$ des fonctions entières de u absolument quelconques.

Il prouve d'abord que cette fonction prend, dans le domaine de l'infini, toutes les valeurs, sauf peut-être un ensemble dénombrable qu'il définit.

Il examine, en particulier, le cas où l'équation qui définit u est algébrique en u :

$$u^\nu + A_1(z)u^{\nu-1} + A_2(z)u^{\nu-2} + \ldots + A_{\nu-1}(z)u + A_\nu(z) = 0.$$

La fonction $u(z)$ est alors dite *algébroïde;* son *genre* et son *ordre* sont, par convention, le plus grand des genres et le plus grand des ordres des coefficients $A(z)$. Ces fonctions peuvent, d'ailleurs, être méromorphes. Si elles sont *quasi-entières* ou *quasi-méromorphes* au sens de M. Maillet, la fonction u sera dite *quasi-algébroïde.*

M. Rémoundos démontre le théorème suivant :

Toute fonction transcendante algébroïde ou quasi-algébroïde à ν *branches et de genre fini prend, dans le domaine de l'infini, toutes les valeurs, sauf* 2ν *au plus. Si le nombre des valeurs exceptionnelles est supérieur à* 2ν, *la fonction* $u(z)$ *est algébrique.*

Lecornu (*L.*). — Sur le mouvement d'un point pesant guidé par une courbe rigide. (50-56).

L'auteur pose et résout le problème suivant :

Quelle doit être la forme d'une courbe rigide, située dans un plan vertical, pour qu'un mobile pesant qui parcourt cette courbe sans frottement exerce sur elle une pression constante?

Si l'on construit l'hodographe du mouvement, en menant par une origine fixe un vecteur égal et parallèle à la vitesse du mobile, on reconnaît immédiatement que *l'hodographe est une conique.* Mais il y a plus : *l'extrémité du vecteur considéré se meut exactement comme une planète.*

De là résulte cette remarque intéressante, que dans le mouvement planétaire la vitesse est à chaque instant la résultante de deux vitesses constantes, l'une perpendiculaire au grand axe de l'orbite, et l'autre normale au rayon vecteur du Soleil.

M. Lecornu examine successivement les trois cas où l'hodographe est une ellipse, une hyperbole ou une parabole. Il exprime les coordonnées du mobile pesant en fonction de l'anomalie excentrique de l'hodographe : dans les deux premiers cas, la courbe cherchée est transcendante, mais son arc s'exprime algébriquement en fonction des coordonnées de son extrémité; dans le dernier, on trouve une courbe unicursale du cinquième degré avec un point double réel et deux branches paraboliques à direction asymptotique horizontale.

Laisant (*C.-A.*). — Influence de la forme des équations en géométrie analytique. (56-58).

Exemples d'équations qui représentent des portions de courbes ou des segments de droite.

Estanave (*E.*). — Sur un hyperbolographe à liquide. (58-63).

Une branche d'hyperbole est, comme on sait, l'enveloppe d'une droite qui forme avec les deux asymptotes un triangle d'aire constante.

D'après cela, une cuve en forme de prisme triangulaire contenant un liquide, si l'une de ses faces pivote autour de l'arête du prisme placée horizontalement, la surface libre du liquide enveloppera un cylindre hyperbolique dont les génératrices seront parallèles à cette arête.

Tel est le principe de l'hyperbolographe réalisé par M. Estanave.

Petrovitch (*Michel*). — Remarque sur les zéros des fonctions entières. (65-67).

On considère une fonction entière $F(z)$ de genre p. Désignant par $M(r)$ le maximum du module de $F(z)$ lorsque le module de z est égal à r, r étant une variable réelle positive, on sait que, quel que soit le nombre réel et positif α, le produit

$$M(r)\,e^{-\alpha r^{p+1}}$$

reste inférieur à un certain nombre fini N lorsque r varie de zéro à l'infini. L'auteur montre comment on peut obtenir des limites inférieures des modules des racines de l'équation $F(z) = C$, lorsque l'on connaît, outre cette constante C, la valeur $F(o)$ et une limite supérieure du nombre N correspondant à une valeur donnée de α.

Petrovitch (*Michel*). — Sur les fonctions représentées par une classe étendue d'intégrales définies. (67-103).

Ce Mémoire a pour objet l'étude des intégrales de la forme

$$(1)\qquad F(z) = \int_L R(t, z)\,dt,$$

où R est une fonction *rationnelle en z*, à coefficients *quelconques en t*, intégrales qui sont susceptibles de représenter des fonctions analytiques arbitraires de z.

En effet, toute fonction analytique de z est représentée par la formule fondamentale de Cauchy

$$F(z) = \frac{1}{2i\pi}\int_L \frac{F(z)}{t-z}\,dt.$$

Des résultats analogues ont été donnés par Stieltjes et plus récemment par M. Le Roy et M. Petrovitch.

Le problème est, d'ailleurs, indéterminé. Car, *une fois la fonction* $F(z)$ *exprimée d'une manière quelconque sous la forme* (1), *on saura l'exprimer d'une infinité de manières par une intégrale de la forme* (1), par addition d'intégrales du même type et dont la valeur est nulle.

De plus, il arrive souvent qu'étant donnée une transcendante $F(z)$, irréductible aux fonctions usuelles, on peut lui faire correspondre des fractions $R(t, z)$ dont les coefficients sont des fonctions très simples de t.

Enfin, les intégrales du type (1) se présentent d'elles-mêmes dans la solution

de problèmes variés, notamment lorsque, étant donnée une équation algébrique du premier ordre

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0$$

à points critiques fixes et du genre zéro, on veut évaluer l'intégrale

$$\int_L R(x, y)\, dx,$$

où R est rationnel en y.

Ainsi l'élément analytique considéré dans toute sa généralité par M. Petrovitch peut donner lieu à des recherches intéressantes, et cela dans diverses directions.

Ici l'auteur se donne une intégrale déterminée (1), où les coefficients de la fraction rationnelle R, ainsi que le chemin d'intégration L, sont connus. Sans chercher à ramener à des combinaisons explicites d'éléments connus la fonction $F(z)$ que cette intégrale représente, il indique les relations qui existent entre certaines particularités des coefficients de R et celles de $F(z)$.

« Tout d'abord, le développement de l'intégrale en série ordonnée suivant les puissances de la variable z met en évidence la possibilité d'exprimer la fonction $F(z)$ comme combinaison simple de diverses puissances de z et de certaines fonctions $\theta(z)$ jouant, par rapport à $F(z)$, le rôle d'une espèce d'éléments simples.

» Les coefficients des séries

$$\theta(z) = a_0 + a_1 z = a_2 z^2 + \ldots$$

ainsi obtenus et correspondant à ces éléments simples apparaissent sous la forme

$$a_n = \int_L A(t)\,[r(t)]^n\, dt,$$

où les fonctions $A(t)$ et $r(t)$ dépendent algébriquement des coefficients de la fonction rationnelle R.

» La forme même de la dernière intégrale, déjà étudiée sous quelques rapports et dans certains cas plus particuliers, rend particulièrement faciles diverses recherches concernant, par exemple, la manière dont a_n varie avec n, ses limites supérieure ou inférieure, sa valeur approchée ou valeur asymptotique pour n très grand, la convergence des séries $\theta(z)$ et diverses autres particularités des fonctions $\theta(z)$ (zéros, singularités, valeurs asymptotiques, mode de croissance, etc.).

» Les résultats récents sur les séries de Taylor et sur les fonctions représentées par des intégrales définies, comme par exemple ceux de MM. Hadamard et Le Roy, y trouveront un vaste champ d'applications variées. »

Suchar (*Paul-J.*). — Sur les équations différentielles linéaires réciproques du second ordre. (103-116).

Étant donnée une équation du second ordre

$$\frac{d^2y}{dx^2} = y f(x),$$

on fait le changement de variable

$$x_1 = \int f(x)\, dx$$

qui donne par inversion

$$x = \psi(x_1),$$

puis le changement de fonction

$$y_1 = \frac{dy}{dx_1};$$

on obtient ainsi l'équation

$$\frac{d^2y_1}{dx_1^2} = \frac{y_1}{f[\psi(x_1)]}$$

que l'auteur appelle *réciproque* de l'équation de départ. Deux équations réciproques sont donc caractérisées par la propriété suivante : la dérivée d'une solution d'une des équations, considérée comme fonction de la variable indépendante de l'autre, est une solution de cette dernière.

Un exemple d'équations réciproques est le suivant :

$$(1) \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = [(2n-1)x]^{\frac{-4n}{2n-1}} y,$$

$$\frac{d^2y_1}{dx_1^2} = [(2n-1)x_1]^{\frac{-4n}{2n+1}} y_1.$$

M. Suchar intègre l'équation (1) sans invoquer les propriétés connues de l'équation équivalente

$$\frac{d^2z}{dt^2} + \frac{1}{t}\frac{dz}{dt} + \left(1 - \frac{k^2}{t^2}\right) z = 0,$$

qui est une équation de Bessel.

Il examine ensuite le cas où les deux équations réciproques sont *identiques* au changement près de x et y en x_1 et y_1. Comme exemple de ces équations qui sont leurs propres réciproques, il cite la suivante :

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -x^{m-1}(1-x^m)^{\frac{1-m}{m}} y.$$

Une remarque finale étend la notion de réciprocité à deux systèmes d'équations différentielles simultanées, linéaires et du second ordre.

De Séguier. — Sur certains groupes de Mathieu. (116-124).

Ce travail fait suite à un Mémoire publié en 1902 dans le *Journal de Mathé-*

matiques pures et appliquées. Les notations sont celles que l'auteur emploie dans ses *Éléments de la théorie des groupes abstraits* (1904). De plus $\mathfrak{L}(2,\pi)$ désigne le groupe des substitutions $\frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}$ où α, β, γ, δ parcourent un corps de Galois C d'ordre $\pi = p^m$ (p premier), $\alpha\delta - \beta\gamma$ étant différent de zéro; $\mathfrak{V}(2,\pi)$ désigne le diviseur de $\mathfrak{L}(2,\pi)$ formé de substitutions pour lesquelles $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$.

Étant donné un groupe de substitutions A, on peut, avec M. Jordan, se proposer de construire un groupe transitif G où le diviseur fixant un symbole soit A. L'auteur obtient les équations de tous les groupes G répondant à un groupe A, en particulier celles de $\mathfrak{L}(2,\pi)$ et de $\mathfrak{V}(2,\pi)$. Il montre que $\mathfrak{L}(2,p)$ *et* $\mathfrak{V}(2,p)$ *sont les seuls groupes transitifs de leur ordre et de leur degré* (*sauf que, si* $p = 17$, *il y a un* g_{168}^{8} *composé* Γ) *et que ni* $\mathrm{U}(2,\pi)$ *ni* $\mathfrak{L}(2,\pi)$ *ne peut être le diviseur fixant un symbole dans un* $g^{\pi+2}$ (*au contraire,* Γ *est le diviseur fixant un symbole dans un* g^{9} *trois fois transitif*).

On déduit de là une preuve nouvelle et simple de ce fait que $\mathfrak{V}(2,3^2)$ *est le seul* g_{360} *simple.*

M. de Séguier construit ensuite tous les $g_{\pi(\pi^2-1)}$ dont un groupe facteur est $\mathfrak{V}(2,\pi)$ et obtient ainsi les équations du groupe $\mathrm{U}(2,\pi)$ des substitutions linéaires homogènes à deux variables à coefficients dans C et de déterminant 1.

Si l'on prend pour A le $g_{\pi q}$ engendré par $a = |i^{8}z|$ ($8q = \pi - 1$, $\gamma > 2$), i étant une racine primitive de C, et par les π substitutions $(z+\beta)$ (β parcourant C), on trouve que *pour l'existence de* G *il faut et il suffit que* $\pi = p = 2^n - 1$ *et que* $q = 1$ *ou* n. En prenant encore pour A le groupe G ainsi obtenu, on trouve que *le nouveau groupe* G *est* $\mathfrak{L}(2,p)$ *ou le groupe des isomorphismes de* $\mathfrak{L}(2,p)$ *suivant que* $q = 1$ *ou* $q = n$.

Les résultats précédents fournissent enfin une démonstration nouvelle (indépendante de la théorie des caractères) du théorème suivant de M. Frobenius :

Un $g_{pq(1+p)}^{p}$ G *ayant exactement* $1+p$ g_p *est nécessairement un des groupes* $\mathfrak{L}(2,5)$, $\mathfrak{V}(2,5)$, $\mathfrak{V}(2,7)$, $\mathfrak{V}(2,11)$.

Baire (*René*). — Sur les séries à termes continus et tous de même signe. (125-128).

L'auteur dit qu'une fonction $f(x)$ est *semi-continue supérieurement* si, quel que soit x_1 et quel que soit $\varepsilon > 0$, pour toutes les valeurs d'un certain intervalle $(x_0 - \alpha, x_0 + \alpha)$ on a

$$f(x) < f(x_0) + \varepsilon.$$

Il démontre le théorème suivant :

La condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction soit représentable par une série dont les termes sont des fonctions continues et sont, à partir d'un certain rang, tous de même signe, est qu'elle soit semi-continue, supérieurement dans le cas des termes negatifs, inférieurement dans le cas des termes positifs.

Fontené (*G.*). — Les six équations distinctes du triangle en métrique aninvolutive. (128-135).

Humbert (*G.*). — Sur les tétraèdres inscrits et circonscrits à des quadriques. (135-145).

L'objet de ce Mémoire est d'étendre à la Géométrie de l'espace le théorème de Poncelet.

On reconnaît aisément qu'il y a toujours une quadruple infinité de tétraèdres inscrits dans une quadrique A et circonscrits à une seconde quadrique B choisie au hasard. Mais si, par un point quelconque de A, on mène arbitrairement trois plans tangents à B, la quatrième face, évidemment déterminée, ne touche pas nécessairement B. Pour qu'il en soit ainsi, c'est-à-dire pour que le tétraèdre *se ferme toujours*, il est nécessaire et suffisant que les tétraèdres inscrits dans A et circonscrits à B soient en *nombre cinq fois infini*.

Après ces indications, M. Humbert établit le théorème suivant :

Étant données deux surfaces du second degré, quadritangentes, il existe une quintuple infinité de tétraèdres inscrits dans l'une et circonscrits à l'autre.

Cette propriété n'appartient à deux quadriques que si elles sont quadritangentes.

L'auteur cherche ensuite une extension analogue du théorème de Poncelet pour les tétraèdres inscrits dans une quadrique et dont les faces touchent deux autres quadriques. Après avoir résolu le problème transformé par polaires réciproques, il formule l'énoncé que voici.

Soient A, A′ et B trois quadriques. Il n'y a en général qu'un nombre limité de tétraèdres inscrits à B par leurs sommets et dont les faces touchent à la fois A et A′; en aucun cas il ne peut exister un nombre triplement infini de tels tétraèdres.

Pour que les tétraèdres considérés soient en nombre doublement infini, il faut et il suffit que, parmi les quadriques du faisceau tangentiel déterminé par A et A′, il y en ait deux qui soient quadritangentes à B.

En ce cas, chaque point ϖ de B est le sommet de quatre tétraèdres de la famille; trois quelconques des quatre plans menés par ϖ tangentiellement à A et à A′ sont trois faces d'un même tétraèdre.

Soit T un quelconque des tétraèdres considérés; par chacun de ses sommets passe un nouveau plan touchant à la fois A et A′ : les quatre plans ainsi déterminés forment un tétraèdre T′ de la famille. Le tétraèdre T se déduit de T′ par la même construction.

Les huit faces et les huit sommets de T et de T′ peuvent se grouper de trois autres manières pour former deux tétraèdres analogues.

Enfin M. Humbert donne sans démonstration les résultats relatifs au cas où il existe une série simplement infinie de tétraèdres inscrits à la quadrique B et circonscrits à la fois aux quadriques A et A′.

Clairin (*J.*). — Remarque sur l'intégration de certaines équations aux dérivées partielles du second ordre. (149-152).

Pour intégrer par la méthode de M. Darboux une équation du second ordre à deux variables indépendantes, il faut chercher si les deux systèmes de caractéristiques (C) et (T), supposés distincts, possèdent des invariants.

M. Clairin rappelle les deux théorèmes obtenus à ce sujet par M. Goursat et les fait rentrer dans une proposition plus générale :

Si le système (C) se compose de caractéristiques du premier ordre, ce système possède au plus un invariant du second ordre.

De Montcheuil (M.). — Séparation analytique d'un système de rayons incidents et réfléchis (*suite*). (152-185).

Dans la première partie de ce Mémoire (*Bull. de la Soc. mathém. de France*, t. XXXI, 1903), l'auteur considérait le réseau des courbes génératrices d'une surface de translation quelconque et montrait que les quatre plans isotropes, tangents en un même point aux deux courbes du réseau qui s'y croisent, déterminent par leurs intersections quatre congruences de droites normales à quatre familles de surfaces. Ces congruences se répartissent en deux couples formant chacun un système de rayons incidents et un système de rayons réfléchis analytiquement séparables. Cette même propriété appartient encore aux nappes des enveloppes de sphères dont le centre décrit la surface dirimante, nappes qui sont constituées par les quatre familles de surfaces normales aux congruences.

Dans le travail actuel, M. de Montcheuil détermine sur une surface absolument quelconque une catégorie de réseaux jouissant de propriétés analogues à celles des courbes génératrices des surfaces de translation.

Il arrive par deux voies différentes à ce résultat; d'abord en modifiant convenablement les formules par lesquelles il représente les surfaces de translation à l'aide des coordonnées u, u_1 et ξ d'Ossian Bonnet. Les équations ainsi obtenues permettent de définir une catégorie de relations en nombre illimité qui, une fois démontrées pour une surface de translation, se trouvent par là même valables pour une surface quelconque.

De plus, cette méthode met en relief une correspondance intéressante qui existe entre une surface arbitrairement donnée et un ensemble doublement infini de surfaces de translation qu'on obtient en prenant pour courbes lieux des extrémités du segment dont le milieu décrit la surface de translation deux familles de courbes telles que toutes celles d'une même famille rencontrent chaque courbe de l'autre tangentiellement à une famille de plans isotropes parallèles.

Enfin l'on aperçoit ainsi diverses propriétés des développées moyennes, des surfaces de translation considérées et de leurs enveloppes et l'on détermine toutes les surfaces telles que la congruence de leurs normales se réfléchisse sur la développée moyenne ponctuelle normalement à une famille de surfaces admettant au même titre la surface dirimante.

La seconde méthode, plus directe, que prend M. de Montcheuil lui permet de retrouver en les complétant les résultats déjà acquis. Il obtient d'abord la proposition suivante :

Une surface quelconque (ξ) étant donnée dans le système des coordonnées (u, v, ξ) d'Ossian Bonnet, on peut déterminer, au moyen de fonctions rationnelles par rapport à u, v, ξ et aux dérivées de ξ, la congruence des normales réfléchies sur la développée moyenne de (ξ), ainsi que la surface (ξ_1) normale aux rayons réfléchis. On peut déterminer de même la congruence des rayons réfléchis sur la développée moyenne de (ξ_1) ainsi que la surface (ξ_2) normale à ces rayons, et ainsi de suite indéfiniment.

Cette suite de congruences, généralement illimitée, se ferme et ne se ferme

que quand l'une des surfaces dirimantes successivement considérées est une surface de translation.

Le Mémoire se termine par l'étude complète du cas où la fonction ξ_1 est le produit de deux fonctions ne dépendant l'une que de u, l'autre que de v.

Lucas (*Félix*). — Sur les dérivées modulaires des polynomes. (185-189, 189-195).

Dans la première des deux Notes qui portent ce titre commun, l'auteur étudie l'expression

$$\Delta_\alpha f(z) = pf(z) - (z - \alpha)f'(z),$$

où $f(z)$ est un polynome entier en z de degré p. C'est la *dérivée modulaire* (module α) du polynome $f(z)$.

Dans la seconde Note, il étudie les dérivations successives faites avec changement du module.

D'Ocagne (*Maurice*). — Sur la résolution nomographique générale des triangles sphériques. (196-203).

Lévy (*Lucien*). — Sur les déplacements d'une figure invariable dans lesquels les différents points de la figure décrivent des courbes sphériques. (203-211).

Après avoir rappelé les travaux de MM. Mannheim, Duporcq et Bricard sur ce sujet, l'auteur expose une méthode analytique qui lui permet de les retrouver et de les compléter. Voici les principaux de ses énoncés :

I. Si quatre points d'une droite décrivent des courbes sphériques dont les centres sont sur un même plan, tous les points de la droite jouissent de la même propriété.

II. Si cinq points d'une droite décrivent des lignes sphériques, tous les points de la droite décrivent des courbes sphériques.

III. Si treize points arbitraires d'un solide décrivent des lignes sphériques, il en sera de même de tous les points du solide.

IV. Si neuf points d'un plan décrivent des lignes sphériques, il en est de même de tous les points de ce plan.

Genty (*E.*). — Note de Géométrie vectorielle sur les systèmes orthogonaux. (211-228).

L'objet principal de cette Note, dit l'auteur, est de montrer avec quelle simplicité les procédés de la Géométrie vectorielle conduisent à l'équation différentielle du troisième ordre dont dépend la recherche des *familles de Lamé*, c'est-à-dire des familles de surfaces qui peuvent faire partie d'un système triple orthogonal.

Lebesgue (*Henri*). — Une propriété caractéristique des fonctions de classe 1. (229-242).

On sait qu'on appelle *fonction de classe* 1 toute fonction discontinue qui est la limite d'une suite convergente de fonctions de classe 0 (fonctions continues). Il n'y a pas de procédé général et régulier pour reconnaître si une fonction est ou non de classe 1. La proposition suivante, que démontre l'auteur, peut servir à résoudre la question dans des cas particuliers en la ramenant à une autre, parfois plus facile à traiter.

I. Pour qu'une fonction f soit de classe 0 ou 1, il faut et il suffit que, quel que soit $\varepsilon > 0$, le domaine où f est définie puisse être considéré comme la somme d'une infinité dénombrable d'ensembles fermés sur chacun desquels f est continue à moins de ε près; ou encore sur chacun desquels f est d'oscillation inférieure à ε.

Ce théorème entraîne les conséquences suivantes :

Une série uniformément convergente de fonctions de classe 0 ou 1 a pour somme une fonction de classe 0 ou 1.

Pour qu'une fonction soit de classe 1 dans un domaine, il faut et il suffit qu'elle soit de classe 0 ou 1 sur toutes les courbes du domaine et effectivement de classe 1 sur l'une de ces courbes.

A l'aide du théorème I et d'un résultat dû à M. Volterra, l'auteur établit une condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction soit de classe 0 ou 1: elle consiste en ce que cette fonction *soit ponctuellement discontinue sur tout ensemble parfait*. De là résulte comme conséquence la propriété caractéristique des fonctions de classe 1, due à M. Baire.

Hadamard. — Résolution d'un problème aux limites pour les équations linéaires du type hyperbolique. (242-268).

Étant donnée une équation de la forme

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} - a\frac{\partial z}{\partial x} + b\frac{\partial z}{\partial y} + cz = 0,$$

on veut en déterminer une solution par des conditions aux limites relatives à une certaine ligne L présentant un point anguleux A. Lorsque les deux arcs AB et AC de cette ligne sont situés *dans un seul et même angle* formé par les caractéristiques issues de A, M. Goursat a démontré que la fonction z est déterminée par la succession de ses valeurs sur AB et sur AC.

M. Hadamard donne de ce problème une solution par des intégrales définies, analogue à celle qu'il avait précédemment fait connaître (*Bull. de la Soc. Mathém. de France*, t. XXXI, 1903) pour le cas où les deux arcs AB et AC sont compris dans deux angles adjacents formés par les caractéristiques.

Bricard (*R.*). — Sur une certaine classe de cubiques gauches et sur des systèmes articulés qui s'y rattachent. (269-284).

Les cubiques gauches dont il s'agit sont les *Strophoïdales* que M. Bricard définit par les deux propriétés :

1° Elles rencontrent le cercle de l'infini en deux points i et i';
2° Leur projection orthogonale sur un plan (Π) passant par la droite ii' est une strophoïde.

Il existe une corde unique $\alpha\beta$ de la strophoïdale Γ perpendiculaire au plan (Π) (quand les extrémités α et β de cette courbe coïncident, Γ devient une strophoïde).

L'auteur dit que deux points m et m' de Γ sont *associés* quand ils se correspondent dans l'involution définie sur la courbe par la condition d'avoir α et β pour points doubles.

Après avoir étudié certaines propriétés des points associés, M. Bricard démontre que toute strophoïdale est l'intersection incomplète d'un cône de révolution et d'un cône du second ordre ayant une génératrice commune avec le premier cône et admettant une série de plans cycliques parallèles à son axe.

Il considère ensuite trois couples (m, m'), (n, n'), (p, p') de points *associés*. Si l'on joint ces six points deux à deux en s'abstenant de joindre les points d'un même couple, on obtient un octaèdre (O) à faces triangulaires. Cet octaèdre est circonscrit à deux sphères dont les centres sont sur la strophoïdale Γ. Il peut être déformé avec conservation de ses faces et aplati de deux manières. L'auteur prouve cette déformabilité par deux méthodes, dont la seconde a l'avantage de conduire à la connaissance de nouveaux systèmes articulés, dans lesquels se combinent seize hyperboloïdes articulés, et permet d'établir la proposition suivante :

On peut, sans gêner la déformation de l'octaèdre (O), lier un point fixe de Γ à douze points convenablement choisis sur ses arêtes, et cela d'une infinité de manières.

Fontené (*G.*). — Sur l'extension du théorème des polygones de Poncelet à l'espace, par des polyèdres de genre 1. (284-296).

L'extension du théorème des polygones de Poncelet à l'espace peut être tentée, dit l'auteur, avec des polygones gauches ou avec des polyèdres. M. Darboux a donné pour le premier point de vue le théorème des routes de lumière; je donne ici pour le second point de vue une prévision générale, dont je démontre l'exactitude dans un cas particulier, suffisant pour inspirer confiance.

Potron (*M.*). — Sur quelques groupes d'ordre p^6. (296-300).

Cette Note a pour but de rectifier et de compléter certains résultats touchant les groupes d'ordre p^6, obtenus par l'auteur dans sa thèse de doctorat.

Potron (*M.*). — Les G_{p^m} (p premier) dont tous les $G_{p^{m-2}}$ sont abéliens. (300-314).

Introduction. — Ayant rencontré dans ma thèse de doctorat quelques types de g_{p^m} (p premier) caractérisés par cette propriété, j'ai été amené à chercher

tous les g_{p^m} (p premier) qui la possèdent; je me suis toutefois restreint aux groupes métabéliens. De nouvelles recherches m'ont permis de m'affranchir de cette restriction et d'arriver à la détermination complète des p_{p^m} (p premier) caractérisés par la propriété énoncée. Je les énonce dans le présent travail, me bornant à rappeler les résultats partiels obtenus dans ma thèse, afin de les relier au résultat général.

Remoundos (*G.*). — Sur les fonctions entières de genre fini. (314-316). L. R.

REVUE D'ARTILLERIE.

Tome LVII; octobre 1900-mars 1901 (¹).

Aubry (*V.*). — Étude sur la convergence (31-46, 9 figures, 1 planche, 3 graphiques).

Représentation de la convergence par des cercles d'égale parallaxe ou par des courbes d'égale correction.

L. F. — L'invention de la locomotion automobile. (47-69, 3 figures).

Démonstration que le véritable inventeur de ce mode de locomotion est bien, comme on le croyait, l'ingénieur français Cugnot (né à Void, en Lorraine, le 25 septembre 1725, mort à Paris le 2 octobre 1804).

Gazot (*E.*). — Formule pratique simple de la probabilité d'une erreur. (70-73, 1 figure).

La probabilité d'une erreur $\pm\varepsilon$ a été calculée jusqu'ici par la formule

$$P = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_0^n e^{-h^2 x^2}\, dx,$$

n étant égal à $\frac{\varepsilon}{E_p}$ avec $hE_p = 0{,}476\,9363$, E_p désignant l'écart probable.

Par un procédé très simple, l'auteur établit la formule

$$P = \sqrt{1 - (0{,}75)^{n^2}}$$

dont les résultats se rapprochent remarquablement de ceux de la première.

(¹) Voir *Bulletin*, t. XXIV_2, 1900, p. 215.

La Rédaction. — Curiosités mathématiques. (74-77, 2 figures).

Détermination graphique de la longueur de la circonférence et de la surface d'un cercle (procédé de Kochanski, souvent rappelé dans les recueils mathématiques).

Détermination graphique de la longueur d'un arc de circonférence (procédé de M. A. Pellet et construction de M. E. Péraux).

Machart (P.). — Chevaux et voitures d'artillerie. (136-165, 176-198, 269-286, 519-547; 33 figures) (*à continuer*).

Étude particulièrement documentée du tirage des voitures. Description des expériences comparatives.

Lefèvre (J.-B.-V.). — Forme théorique de l'ogive de moindre résistance, d'après Newton. (221-234, 6 figures).

Lacroix, dans son *Traité de calcul différentiel et intégral* (1814, 2e édition, t. II, p. 791), cite une équation différentielle dont il fait remonter l'idée première à Newton.

C'est celle d'une courbe plane $x = f(y)$, telle que sa révolution autour d'un de ses axes de coordonnées engendre une surface n'éprouvant que le minimum de résistance de la part du fluide ambiant.

Cette courbe a pour équation

$$y = C\frac{(1+p^2)^2}{p^3},$$

p désignant $\frac{dy}{dx}$ et C une constante.

Decepts (L.). — A propos du projectile de moindre résistance (425-432, 6 figures).

Reprenant le sujet du précédent article, l'auteur montre que, en réalité, la question énoncée fournit un exemple des erreurs que l'on peut commettre en demandant au calcul plus qu'il ne peut donner.

Nécessité d'attendre que l'expérience ait fourni une base solide. Actuellement, cette base n'existe pas, car on ne sait à peu près rien des mouvements produits dans un milieu gazeux par un solide qui le traverse.

Après avoir justifié les formes de projectiles allongés successivement proposées par différents inventeurs, il semble aujourd'hui que le progrès devra être recherché plutôt dans une meilleure répartition de la masse que dans une forme mieux appropriée de l'ogive.

H. B.

Ici se termine la liste des articles mathématiques de la *Revue d'Artillerie* jusqu'au 31 décembre 1900.

L'analyse des articles mathématiques publiés depuis le 1er janvier 1901 dans cette Revue comme dans plusieurs autres Revues françaises et signalés dans la deuxième Partie du présent *Bulletin*, sera, le cas échéant, simplement remplacée par l'indication de leurs titres accompagnée du numéro d'ordre de la classification décimale, ainsi qu'il a été fait, par exemple, pour les *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*.

ANNALES DES MINES.

9e série, Tome X, deuxième semestre 1896 (1).

Nadal (*J.*). — Théorie de la stabilité des locomotives. (232-366, 27 figures, 3 planches).

Deuxième Partie de l'étude commencée au Tome IX, et réservée au mouvement de lacet et aux forces qui le déterminent.

Le centre de gravité d'une locomotive a pour trajectoire une sorte de sinusoïde allongée, et la machine oscille en même temps autour d'un axe vertical, de sorte qu'elle se porte, tantôt sur une file de rails, tantôt sur l'autre, en exerçant sur la voie des efforts latéraux d'une grande importance. L'étude de ces efforts est faite en tous détails, ce qui permet en définitive de déterminer complètement l'allure et, si l'on peut dire, le caractère, quelquefois d'apparence capricieuse, d'une locomotive.

Marie (*G.*). — Régulateurs, organes de réglage et volants des machines. (391-494, 497-569, 4 planches).

Étude complète et discussion comparative des différents types de régulateurs, parmi lesquels il suffira de citer ceux de Watt, Porter, Farcot, Foucault, Denis, Andrade, Proell, Tangye.

Première Partie. — Étude des appareils régulateurs de vitesse à force centrifuge.

Deuxième Partie. — Calcul du régulateur, des organes de réglage et du volant dans les machines où le régulateur agit directement sur la distribution au moyen d'un déclic.

---

(1) Voir *Bulletin*, t. XXI2, 1897, p. 54.

Troisième Partie. — Calcul du régulateur, des organes de réglage et du volant dans les machines où le régulateur agit directement sur la distribution autrement que par un déclic.

Quatrième Partie. — Calcul du régulateur, des organes de réglage et du volant dans les machines où le régulateur agit directement sur une valve ou soupape.

Cinquième Partie. — Régulateur agissant indirectement sur la distribution.

Sixième Partie. — Régulateurs de systèmes divers.

Septième Partie. — Formules générales et applications.

Appendice. — Régulateurs de toutes sortes.

Tome XI, premier semestre 1897.

Le Chatelier. — Recherches sur la dissolution. (131-218).

L'objet de ce Mémoire est de résumer les résultats théoriques relatifs à la dissolution, que l'auteur a antérieurement déduits des principes de la Thermodynamique, et de donner les résultats expérimentaux de recherches plus récentes qu'il a faites sur la solubilité mutuelle ou la fusibilité des sels fondus et de quelques alliages.

Tome XII, deuxième semestre 1897.

Vadal (J.). — Théorie mathématique de la machine à vapeur. Action des parois. (297-349, 5 figures).

On a admis jusqu'ici, comme Hirn le disait en 1876, qu'il est absolument impossible d'édifier *a priori* une théorie de la machine à vapeur d'eau d'un caractère scientifique et exact. Cette impossibilité n'est pas prouvée.

La théorie mathématique de la propagation de la chaleur entre une source, dont la température varie avec le temps, et un corps solide peut s'établir, comme l'auteur se propose de le démontrer, avec une rigoureuse exactitude et toute la généralité nécessaire.

Ce travail fait suite, en partie, à un Mémoire paru aux *Annales* de juin 1893 (Voir *Bulletin*, t. XXI_2, 1897, p. 58).

Chapitre I. — Théorie de la propagation de la chaleur dans un mur chauffé par une source de chaleur à température variable.

Chapitre II. — Échanges de chaleur entre la vapeur et les parois des cylindres.

Chapitre III. — Pouvoir absorbant des parois des cylindres.

Tome XIII, premier semestre 1898.

Rateau. — Expériences et théories sur le tube de Pitot et sur le moulinet de Woltmann (hydromètres et anémomètres). (331-385, 14 figures).

Quelques expériences de l'auteur mènent à des conclusions, en partie nouvelles, qui permettent de préciser les cas où l'on peut avoir confiance dans les mesures effectuées avec ces instruments; elles mettent bien en relief les causes qui rendent ces mesures incorrectes dans la plupart des cas.

La formule des hydromètres et des anémomètres qu'il conviendrait d'employer pour de faibles vitesses est

$$v = a + bn + \frac{c}{v}$$

du second degré en v.

La formule générale des moulinets, pour toutes les vitesses, doit plutôt s'écrire

$$bn = v - \frac{c}{v} - \frac{f(v)}{v},$$

$f(v)$ étant la fonction de la résistance du fluide, fonction sur laquelle on n'est pas encore suffisamment bien fixé.

Tome XIV, deuxième semestre 1898.

Nadal (J.). — Théorie mathématique de la machine à vapeur. Action des parois. (351-458, 5 figures).

Chapitre I. — Température fixe et pouvoir absorbant des parois.

Chapitre II. — Cycles des températures des parois.

Chapitre III. — Théorie des échanges de chaleur.

Chapitre IV. — Théorie des enveloppes de vapeur.

Tome XV, premier semestre 1899.

Desdouits. — Méthode graphique pour la reconnaissance et la vérification du tracé des voies de chemins de fer. (465-501, 11 figures, 2 planches).

Méthode fondée sur l'emploi du pendule d'inertie (*Annales des Mines*, 1885; *Annales des Ponts et Chaussées*, 1886) combiné avec un système de mesures chronométriques.

Tome XVI, deuxième semestre 1899.

Lallemand (*C.*). — Le nivellement général de la France. (227-306, 48 figures).

Précis historique de la question et exposé des méthodes nouvelles, de l'invention de l'auteur pour la plupart, destinées à être suivies dans l'exécution du programme de 1878.

En 1884, au début des opérations, la France ne possédait, comme nivellements de précision, que les 15000^{km} du réseau de Bourdalouë et 5000^{km} de nivellements divers.

A la fin de 1899, soit seize ans plus tard, la longueur totale des itinéraires nivelés a presque triplé; elle est d'environ 58000^{km}.

Le nouveau réseau fondamental est, en moyenne, trois fois plus exact que le nivellement de Bourdalouë.

Les abaques hexagonaux imaginés et construits par M. Lallemand ont considérablement accéléré et abrégé la besogne de vérification et les calculs de toute sorte.

Maison (*F.*). — Note sur la détermination des charges remorquées par les locomotives et sur celle des quantités de vapeur consommées aux différentes conditions de la marche. (499-544, 11 figures, 3 planches).

Le travail de la vapeur par coup de piston en fonction de l'admission s'évalue *a priori* à l'aide de formules, soit de Poncelet, soit de M. Ledoux, qui renferment une expression logarithmique. On ne peut donc résoudre algébriquement la question, mais le problème est susceptible d'une solution simple par les méthodes graphiques, et c'est là l'objet du présent Mémoire.

Tome XVII, premier semestre 1900.

Champy (*L.*). — La ventilation des tunnels et le système Saccardo. (167-215, 3 figures, 2 planches).

Établissement de plusieurs formules importantes pour l'étude expérimentale de différentes questions qui se présentent dans la pratique de la ventilation des tunnels.

Tome XVIII, deuxième semestre 1900.

Ce volume ne renferme pas de Mémoire ayant trait aux Mathématiques.

Note. — Ici s'arrête l'analyse des travaux mathématiques parus dans cette Collection jusqu'à la fin de l'année 1900. Si la bibliographie en doit être continuée, ce sera sous forme de liste ou de catalogue portant simplement indication des titres et de leur classement suivant la division décimale, comme il a été fait, par exemple, pour les *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences.* H. B.

ANNALES DES PONTS ET CHAUSSÉES (1).

7e série, tome XII, deuxième semestre 1896.

Williot (V.). — Essai technique sur la rectification de l'ellipse et des intégrales elliptiques ou hyperelliptiques. (22-69, 11 figures).

Première Partie. — Sur la rectification de l'ellipse et des arcs d'ellipse.
Indication d'une formule donnée par M. Boussinesq, pour la rectification de l'ellipse entière. Modification proposée, fondée sur la transformation de Landen.

Deuxième Partie. — Rectification des intégrales elliptiques et hyperelliptiques.
Applications pratiques :

1° A la surface latérale du cône oblique à base circulaire;

---

(1) Voir *Bulletin,* t. XXI_2, 1897, p. 10.

2° A la surface et au volume du solide commun à deux cylindres elliptiques;
3° A l'intégrale hyperelliptique de la surface découpée sur le cylindre pénétrant par le cylindre pénétré;
4° A l'intégrale hyperelliptique de la surface découpée sur le cylindre pénétré par le cylindre pénétrant.

Dupuy. — Résistance des barres soumises à des efforts agissant parallèlement à leur axe neutre et en dehors de cet axe. (223-270, 16 figures, 4 planches).

Établissement des formules théoriques. Comparaison des résultats d'expériences.

Rabut (C.). — Renseignements pratiques pour l'étude expérimentale des ponts métalliques. (374-480, 39 figures, 8 planches).

Exposé de divers perfectionnements apportés à la construction des appareils employés à la mesure des déformations des ponts métalliques.

Flamant. — Sur la flexion des plaques rectangulaires. (509-522).

Contribution à l'étude et à l'intégration de l'équation différentielle

$$\frac{d^4 w}{dx^4} + 2\frac{d^4 w}{dx^2\,dy^2} + \frac{d^4 w}{dy^4} = \frac{3}{2\,\Lambda_1\,\varepsilon^3} f(x, y),$$

$f(x, y)$, charge supposée connue appliquée au point (x, y) dans une direction normale à la plaque.

Si la charge est uniforme et égale à p par unité de surface, on a alors

$$f(x, y) = p.$$

L'intégration, facile lorsque la plaque est circulaire, devient impossible en termes finis lorsque la plaque est rectangulaire.

Bazin (H.). — Expériences nouvelles sur l'écoulement en déversoir (cinquième article). (654-731, 14 figures, 2 planches).

Nombreux résultats donnés sous forme de Tableaux synoptiques.

Mesnager. — Étude d'une disposition d'assemblage destiné à réduire à une valeur négligeable les efforts secondaires qui se produisent dans les treillis à attaches rigides. (750-783, 9 figures, 2 planches).

Reprise d'une étude de M. Dupuy aux *Annales* de novembre 1895.

7e série, tome XIII, premier trimestre 1897.

Dupuy. — Résistance des barres soumises à des efforts de compression. (1-89, 14 figures, 4 planches).

Un extrait des résultats d'expériences faites en 1893 a été publié dans les *Annales* (janvier 1895).

Au cours de 1894, on a cherché comment se comportaient les barrettes soumises, non plus à des efforts de tension, mais à des efforts de compression.

Les planches représentent, en demi-grandeur, les graphiques obtenus automatiquement avec l'élasticimètre Klein.

Pelletreau. — Mémoire sur les profils des barrages en maçonnerie envisagés dans leurs rapports avec les sous-pressions. (90-192, 18 figures, 1 planche).

Nouveaux développements d'un sujet traité déjà par le même ingénieur dans les *Annales* de 1893 et dès 1879.

Seules, les fissures horizontales sont vraiment dangereuses, et il n'est pas prouvé qu'une fissure horizontale, susceptible de se mettre en sous-pression, se soit jamais produite autrement que par la faute du profil. Mais le contraire n'est pas bien démontré non plus; on n'est pas sûr, d'autre part, qu'il n'y ait aucune extension dans un profil qu'on croit sans extensions. Dans ces conditions, si terribles sont les conséquences des accidents qu'il suffit d'un ingénieur ayant dit une fois qu'un profil réputé sans extensions pouvait avoir à en supporter par suite des sous-pressions, pour obliger dorénavant tous les constructeurs à envisager cette éventualité, lorsqu'ils auront à étudier des projets de ce genre.

Deuxième trimestre 1897.

Rogie (G.). — Note sur la recherche des efforts maxima développés en un point dans une poutre horizontale à une travée par le passage d'un train. (313-333, 12 figures).

Les méthodes employées jusqu'ici pour le calcul des ponts métalliques sont toujours approximatives. On suppose presque dans tous les cas que le passage d'un train équivaut à l'action d'une charge permanente dont on détermine l'importance dans chaque cas particulier, car la méthode exacte conduirait à des calculs très longs et très pénibles.

L'auteur expose une méthode qui permet d'arriver très simplement et très rapidement à un résultat rigoureusement exact.

Tourtay. — Notes sur le calcul de la poussée des voûtes. (334-341, 1 figure).

Lallemand (*C.*). — Note sur la précision comparée de divers modes de repérage de la verticale dans les instruments d'astronomie, de géodésie et de topographie. (351-359, 1 figure).

Application de la propriété de la somme des carrés des distances d'un point quelconque d'une circonférence aux trois côtés d'un triangle équilatéral inscrit d'être constante et égale au carré de la hauteur de ce triangle.

Troisième trimestre 1897.

Dupuy et *Cuénot*. — Barèmes destinés à faciliter le calcul des ponts métalliques à une ou plusieurs travées. (91-270, 74 figures, 3 planches et nombreux tableaux).

Deuxième Partie : Poutres continues. — *Chapitre II :* Poutres reposant sur plus de deux appuis.

Formules pour des nombres variant de trois à six appuis et de deux à cinq travées.

Nadal (*J.*). — Théorie de la stabilité des locomotives. (271-311, 6 figures).

Dans un Mémoire paru aux *Annales des Mines* (1896), l'auteur a étudié en détail les principaux problèmes que soulève la question de la stabilité des locomotives. Le présent travail en contient les parties essentielles avec des modifications et additions assez importantes. C'est ainsi que le paragraphe II renferme une exposition du problème des oscillations d'un corps solide porté par des ressorts plus générale et plus claire que celle qui a été donnée dans les *Annales des Mines*, et que les paragraphes IV, VIII, X, XIII sont entièrement nouveaux.

Quatrième trimestre 1897.

Lévy (*M.*). — Note sur les diverses manières d'appliquer la règle du trapèze au calcul de la stabilité des barrages en maçonnerie. (5-19, 2 figures).

La règle hypothétique, dite *du trapèze*, a été appliquée aux barrages, de diverses manières, par MM. Delocre, Bouvier et Guillemain. La pression normale ainsi trouvée est la plus forte avec le procédé de M. Guillemain, la plus faible avec celui de M. Delocre.

En réalité, il faut lui apporter une modification. Ce fut le but de la Note de l'auteur à l'Académie des Sciences, le 5 août 1895; il en profite pour en donner ici la démonstration. Il annonce d'ailleurs une étude plus approfondie.

Bazin (*H.*). — Étude d'une nouvelle formule pour calculer le débit des canaux découverts. (20-70, 1 planche).

Ribière. — Précision et rendement des appareils optiques de phares. (116-159, 23 figures, 3 planches).

Hisely. — Méthode pour l'analyse des lignes d'influence expérimentales (207-213, 5 figures).

Un problème expérimental qui se présente fréquemment est celui de la détermination de la ligne d'influence d'une déformation au moyen du diagramme de cette déformation, enregistrée au passage d'une machine. M. Rabut a signalé l'importance de ce problème dans les recherches relatives soit à la vérification de la stabilité d'ouvrages existants, soit à l'étude de machines en projet, et il a donné une méthode générale pour le résoudre.

L'auteur se propose de faire connaître une autre méthode de résolution du même problème, exacte dans le cas où le diagramme à traiter aurait la forme d'une parabole du second degré à axe vertical, approximative dans le cas général, mais suffisante dans la pratique, sous certaines réserves énoncées au cours de la démonstration.

7ᵉ série, huitième année, premier trimestre 1898.

Ocagne (*M. d'*). — Abaque de la nouvelle formule de M. Bazin relative aux canaux découverts. (304-314, 6 figures).

Il s'agit de la formule

$$U = \frac{87\sqrt{RI}}{1 + \frac{\gamma}{\sqrt{R}}},$$

où U désigne la vitesse moyenne en mètres, R le rayon moyen en mètres, I la pente, γ un coefficient numérique qui dépend de la nature de la paroi.

En l'écrivant

$$\frac{\gamma}{R} + \frac{1}{\sqrt{R}} = \frac{87\sqrt{I}}{U},$$

elle rentre dans le type d'équation

$$f_1(\alpha_1)f_3(\alpha_3) + \psi_3(\alpha_3) = f_2(\alpha_2)f(\alpha_1) + \psi_1(\alpha_1)$$

dont l'auteur obtient aisément la construction de l'abaque.

Deuxième trimestre 1898.

Bazin (*H.*). — Expériences nouvelles sur l'écoulement en déversoir (sixième article). (151-264, 82 figures, nombreux tableaux).

Barbet. — Note sur le calcul des barrages des réservoirs en maçonnerie. (265-299, 14 figures).

Application des méthodes développées dans une étude de M. Maurice Levy, intitulée : *Quelques considérations sur la construction des grands barrages* (*Comptes rendus*, 5 août 1895).

Troisième trimestre 1898.

Fournier (*V.*). — Note sur deux formules relatives à l'écoulement permanent et uniforme des liquides (1-10).

Ces formules empiriques se rapportent à l'écoulement : 1° par un tuyau cylindrique à section circulaire; 2° par un canal découvert.

L'auteur cite V. Regnault, Poiseuille, Couette, Flamant, Bazin, et d'autres expérimentateurs.

Bourdelles. — Ponts en maçonnerie articulés aux naissances et à la clef. (31-92, 18 figures).

Cette étude est terminée par une Note de M. J. Resal, intitulée : *Méthode générale pour le tracé de la courbe des pressions dans une voûte à triple articulation.*

Quatrième trimestre 1898.

Rabut. — Analyse des lignes d'influence expérimentales (163-166, 2 figures).

Nouvelles remarques au sujet d'une étude de l'auteur publiée en octobre 1896 et de la Note de M. Hisely insérée au Volume du quatrième semestre 1897.

7e série, neuvième année, premier trimestre 1899.

Barbet. — Note sur les conditions de résistance des barrages de réservoirs en maçonnerie. (22-56, 9 figures, 1 planche).

Nouveau commentaire à la Note de M. Maurice Levy : *Quelques considérations sur la construction des grands barrages* (*Comptes rendus*, 5 août 1895).

Hisely. — Constructions diverses pour déterminer la poussée des terres sur un mur de soutènement. (99-120, 12 figures).

Fournier (*V*.). — Note sur deux formules relatives à l'écoulement permanent et uniforme des liquides. (299).

Remarque importante sur la loi de Poiseuille.

Deuxième trimestre 1899.

Pour mémoire. Ce Volume ne renferme aucune application mathématique.

Troisième trimestre 1899.

Lebert (*E*.). — Étude des mouvements vibratoires dans les ponts à poutres droites à une travée et dans les ponts suspendus à tablier continu simplement appuyés aux culées. (215-293, 4 figures).

Question à peine abordée dans le cours classique de Bresse et pour le développement de laquelle il est important d'établir des principes nouveaux.

Galliot. — Résistance des sphères et cylindres en contact. (294-298).

Complément à une étude de l'auteur publiée aux *Annales* du deuxième semestre 1892.

Quatrième trimestre 1899.

Ce Volume ne renferme aucune application mathématique.

7ᵉ série, dixième année, premier trimestre 1900.

Aucune application mathématique.

Deuxième trimestre 1900.

Harel de la Noé. — Déformations et conditions de la rupture dans les corps solides. (180-233, 24 figures).

Troisième trimestre 1900.

Vauthier (L.-L.). — Hydraulique des cours d'eau. Barrages à encombrement et barrage en lit évasé, sans encombrement. (207-266. 10 figures).

Cadart (G.). — Note sur les calculs de résistance d'une carcasse de porte d'écluse. (267-296, 12 figures).

Gisclard. — Note sur un nouveau type de pont suspendu rigide. (297-355, 18 figures).

Suite à un premier article publié au Volume du quatrième trimestre 1899, mais simplement descriptif.

L'article actuel renferme l'exposé du calcul des éléments du pont.

Quatrième trimestre 1900.

Lebert (E.). — Étude de courbes pouvant servir au tracé de l'axe neutre des arcs de grandes portées. (74-110, 4 figures).

Legay. — Mémoire sur le tracé et le calcul des voûtes en maçonnerie (141-233, 7 figures).

Le Mémoire débute par un exposé général des diverses phases du développement des résultats obtenus depuis cinquante ans que l'on étudie la question de la forme rationnelle à donner aux voûtes en maçonnerie, en vue de réaliser la meilleure utilisation des matériaux de construction.

Dans cette esquisse historique, on rencontre successivement les noms de MM. Yvon Villarceau (1844), Carvalho (1853), Saint-Guilhem (1859), Denfert-Rochereau (1859), Tourtay (1886 et 1888), Séjourné (1886), Jacquier (1893), Soulcyre (1895), Rourdelles (1898).

Les principaux résultats de leurs investigations sont discutés ici comparativement.

Notes. — I. Pour terminer l'analyse bibliographique de la série des *Annales des Ponts et Chaussées* à la date de décembre 1900, il nous paraît utile de faire mention des articles publiés dans les trois derniers Volumes, sous la signature de MM. Resal et Alby (M. Alby, rédacteur), intitulés : *Notes sur la construction du pont Alexandre III* (premier trimestre 1898, 165-214; deuxième trimestre 1898, 311-328; troisième trimestre 1898, 245-286; quatrième trimestre 1898, 59-144; premier trimestre 1899, 159-241; premier trimestre 1900, 232-301).

II. Ainsi qu'il a été dit pour la *Revue d'Artillerie* (*Bulletin*, 1906), l'analyse des périodiques français, à partir du 1er janvier 1901, consistera simplement en un Catalogue des travaux, classés suivant la division décimale, comme il a été fait, par exemple, pour les *Comptes rendus des Séances de l'Académie des Sciences*. H. B.

JOURNAL FÜR DIE REINE UND ANGEWANDTE MATHEMATIK.

Tome 127. Berlin, 1904 (1).

Karpinski (*L.-C.*). — Sur la distribution des résidus quadratiques. (1-19).

---

(1) Voir *Bulletin*, t. XXVIII_2, p. 80.

Soit P un nombre entier, positif, impair, et qui ne soit divisible par aucun carré. On se propose d'étudier les sommes

$$S_r^n = \sum \left(\frac{s}{P}\right),$$

où le symbole $\left(\frac{s}{P}\right)$ est celui de Jacobi, et où la sommation s'étend à tous les entiers s compris entre $(r-1)\frac{P}{n}$ et $r\frac{P}{n}$. De telles sommes ont été considérées par Gauss, Dirichlet, Dedekind. Si P est premier, leurs valeurs indiquent comment sont distribués les résidus quadratiques de P.

Le calcul de ces sommes a été rattaché par Gauss à celui des nombres C_1, C_2, C_3, ..., des classes de formes quadratiques proprement primitives dont les déterminants sont égaux respectivement à $-P$, $-2P$, $-3P$, ...

Les formules pour $n = 8$ et $n = 12$ sont d'abord rappelées, d'après Dirichlet.

L'auteur donne ensuite une suite de résultats nouveaux. C'est d'abord, pour $n = 24$, un système complet de formules permettant de calculer les sommes S_r^{24} en fonction de C_1, C_2, C_3, C_6. Ces formules sont appliquées au cas où P est premier, en distinguant divers cas suivant que ce nombre premier est congru (mod 24) à 1, 5, 13, 17, 7, 11, 19 ou 23. Elles donnent naissance à diverses conséquences : par exemple C_3 est un multiple de 6 pour tous les nombres de la forme $24n+1$, $24n+5$ et $24n+17$.

Une étude toute semblable est faite pour $n = 10$, mais en supposant alors $P \equiv 3 \pmod{4}$.

Voici, à titre d'exemple, les formules générales, liant les nombres C_1, C_2, C_3, C_6, aux valeurs des sommes S_r^{24}, obtenues par M. Karpinski pour $P \equiv 1 \pmod{4}$.

$$\begin{aligned}
C_1 &= 2(S_1^{24} + S_2^{24} + S_3^{24} + S_4^{24} + S_5^{24} + S_6^{24}),\\
C_2 &= 2(S_1^{24} + S_2^{24} + S_3^{24} - S_{10}^{24} - S_{11}^{24} - S_{12}^{24}),\\
C_3 &= 2(S_1^{24} + S_2^{24} + S_3^{24} + S_4^{24} - S_9^{24} - S_{10}^{24} - S_{11}^{24} - S_{12}^{24}),\\
C_6 &= 2(2S_1^{24} + S_2^{24} + S_3^{24} + S_4^{24} + S_5^{24} - S_8^{24} - S_9^{24} - S_{10}^{24} - S_{11}^{24} - 2S_{12}^{24}).
\end{aligned}$$

Schur (J.). — Sur la représentation des groupes finis au moyen de substitutions linéaires fractionnaires. (20-50).

Soit $\mathcal{H}$ un groupe fini donné. Il s'agit de faire correspondre à ses divers éléments A, B, ..., des transformations projectives $\{A\}$, $\{B\}$, ... de telle manière que le produit $\{A\}\{B\}$ de deux quelconques de ces transformations corresponde précisément à l'élément du groupe qui est égal au produit AB des deux éléments homologues.

1. Chaque transformation $\{A\}$ sera représentée par la matrice (A) formée par le tableau des coefficients qui y figurent; mais cette matrice n'est définie qu'à un facteur constant près. Chacune des représentations cherchées sera donc donnée par un système de matrices (A), (B), ... satisfaisant à des égalités de la forme

$$(1) \qquad (A)(B) = r_{AB}(AB),$$

où les r_{AB} constituent un système de constantes associé à cette représentation.

Un tel système de constantes doit satisfaire aux conditions (nécessaires et suffisantes) :

$$(2) \qquad r_{A,B}\, r_{AB,C} = r_{A,BC}\, r_{B,C}.$$

Les représentations cherchées se groupent en *classes de représentations équivalentes :* deux représentations sont équivalentes si l'on passe des transformations projectives {A} de l'une aux transformations projectives {A'} de l'autre en les *transformant* par une même transformation auxiliaire. On en déduit sans peine la définition de l'équivalence pour les systèmes de matrices (A), ou les systèmes de constantes r_{AB}. Le nombre des classes de représentations est fini. Les diviseurs premiers de ce nombre divisent tous l'ordre du groupe $\mathcal{H}$ donné.

Si l'on multiplie les nombres correspondants r_{AB}, r'_{AB} de deux systèmes de constantes provenant de deux représentations appartenant à des classes K_α, K_β, on obtient un système de constantes associé à une nouvelle représentation dont on représentera la classe par $K_\alpha K_\beta$. On définit ainsi un groupe $\mathfrak{M}$, qui s'appellera le *multiplicateur* de $\mathcal{H}$. C'est un groupe abélien. Si ce groupe se réduit à 1, $\mathcal{H}$ est dit un *groupe fermé*.

2. Soient $\mathcal{G}$ un groupe isomorphe à $\mathcal{H}$ et $\mathcal{A}$ celui de ses sous-groupes invariants qui est tel que $\frac{\mathcal{G}}{\mathcal{A}}$ soit isomorphe holoédrique de $\mathcal{H}$. On supposera de plus que $\mathcal{A}$ est abélien.

Les *caractères* de ce groupe abélien fournissent alors des nombres satisfaisant aux conditions (2); et les représentations, données par Frobenius, du groupe $\mathcal{G}$ par des transformations linéaires fournissent des représentations de $\mathcal{H}$ répondant à la question,

L'auteur étudie combien de types différents de représentations sont donnés ainsi par un groupe $\mathcal{G}$.

3. On peut choisir le groupe $\mathcal{G}$ de manière qu'il fournisse tous les types de *représentations primitives* de $\mathcal{H}$, une représentation étant dite *primitive* s'il est impossible de trouver une représentation équivalente de la forme

$$(A') = \begin{pmatrix} (A_1) & 0 \\ 0 & (A_2) \end{pmatrix}, \qquad (B') = \begin{pmatrix} (B_1) & 0 \\ 0 & (B_2) \end{pmatrix}, \qquad \ldots$$

où (A_1), (B_1), ... sont des matrices du même degré.

Si le groupe $(\mathcal{G})$ est d'ordre minimum parmi tous ceux qui satisfont à cette condition, il s'appellera un *groupe représentatif* (*Darstellungsgruppe*). Les sous-groupes abéliens $\mathcal{A}$ de tous ces groupes réprésentatifs sont holoédriquement isomorphes au *multiplicateur* de $\mathcal{H}$.

4. La recherche des représentations primitives fournies par un système de constantes r_{AB} satisfaisant aux conditions (2) se fait par la méthode suivante, qui résulte des principes posés par Frobenius :

On introduit des variables indépendantes x_A, x_B, ...; et l'on écrit la matrice

$$(r_{PQ^{-1},Q}\, x_{PQ^{-1}}),$$

où l'indice P et l'indice Q prennent la série des valeurs correspondant aux divers éléments A, B, ... du groupe $\mathcal{H}$. On peut mettre cette matrice sous la forme symbolique

$$\Sigma(\mathrm{R})\, x_{\mathrm{R}},$$

les (R) étant certaines matrices à éléments numériques. Et il ne reste plus qu'à décomposer la représentation fournie par le système des matrices (R) en représentations primitives, de toutes les manières possibles.

Dans toutes ces représentations primitives, le degré des matrices est donc un diviseur de l'ordre du groupe donné.

5. Contient divers théorèmes, susceptibles de simplifier, dans des cas particuliers, la détermination du multiplicateur et des groupes représentatifs.

Hensel (*K.*). — Fondements nouveaux de l'Arithmétique. (51-84).

Les nombres entiers positifs sont supposés donnés. L'auteur introduit une représentation nouvelle des nombres négatifs, fractionnaires, irrationnels, et utilisera les principes nouveaux de l'Arithmétique, en résultant, pour fonder une théorie nouvelle des nombres algébriques. Il annonce que cette théorie fournit une condition nécessaire pour qu'un nombre donné soit algébrique, et non transcendant.

1, 2. Soit p un nombre premier quelconque. Un nombre entier positif quelconque A peut s'écrire, d'une seule manière, sous la forme

$$\mathrm{A} = a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + \ldots + a_\rho p^\rho,$$

$a_0, a_1, \ldots, a_\rho$ ayant chacun pour valeur l'un des nombres

$$(1) \qquad 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ (p-1).$$

Pour avoir un *corps* de nombres, où les quatre opérations fondamentales (addition, soustraction, multiplication, division) soient toujours possibles, on introduira plus généralement des symboles analogues, formés d'une infinité de termes, et ordonnés suivant les puissances croissantes de p :

$$(2) \qquad \mathrm{A} = a_\alpha p^\alpha + a_{\alpha+1} p^{\alpha+1} + \ldots \qquad (a_\alpha > 0)$$

où les valeurs des coefficients appartiennent toujours à la suite (1).

Si $\alpha \geqq 0$, le symbole est dit *entier;* si $\alpha < 0$, il est dit *fractionnaire.* Généralement α est l'*ordre* du symbole, qui s'appelle un *nombre du corps* $\mathrm{K}(p)$. Les nombres de l'Arithmétique ordinaire s'appelleront, par opposition, *nombres du corps* $\mathrm{K}(1)$.

Si on limite le développement (2) à un terme quelconque, en p^k par exemple, on a un nombre ordinaire

$$\mathrm{A}_k = \alpha_\alpha p^\alpha + a_{\alpha+1} p^{\alpha+1} + \ldots + a_k p^k,$$

qui s'appelle une *valeur approchée* de A.

Une égalité rationnelle entre des nombres A, B, ..., D de $\mathrm{K}(p)$, qui s'écrit

$$\mathrm{R}(\mathrm{A}, \mathrm{B}, \ldots, \mathrm{D}) = 0 \qquad (p),$$

signifie que la congruence correspondante

$$R(A_k, B_k, \ldots, D_k) = 0 \pmod{p^M}$$

a lieu, dès que k est suffisamment grand, si grand que soit M.

Le domaine naturel K(1) peut être considéré comme une partie du domaine K(p), les nombres de K(1) correspondant à ceux des nombres de K(p) pour lesquels la suite des coefficients a_α, $a_{\alpha+1}$, ... est périodique.

3. L'auteur étudie ensuite les fonctions entières de x

$$(3) \qquad f(x) = Ax^n + Bx^{n-1} + \ldots + L,$$

dont les coefficients sont des nombres de K(p). La notion de discriminant et celle de résultant s'introduisent au moyen des *fonctions approchées*

$$f_k(x) = A_k x^n + B_k x^{n-1} + \ldots + L_k$$

obtenues en remplaçant les coefficients de (3) par leurs valeurs approchées.

Les méthodes et les propositions de l'Algèbre élémentaire, en tant qu'elles ne supposent que des opérations rationnelles, s'étendent ici d'elles-mêmes. Par exemple : la formule de Taylor, la divisibilité par $(x-\xi)$, la divisibilité en général, la théorie de l'irréductibilité.

4. Démonstration des théorèmes suivants :

Une fonction F(x), *de la nature indiquée, est décomposable en facteurs irréductibles et d'une seule manière; et l'on peut, par un nombre limité d'opérations, calculer ces facteurs avec une approximation donnée.*

Si le discriminant de F(x) *est d'ordre* δ, *la fonction* F(x) *est décomposable lorsque sa* $\delta^{\text{ième}}$ *fonction approchée* $F_\delta(x)$ *se décompose,* module $p^{\delta+1}$, *et dans ce cas seulement.*

M. Hensel applique les résultats obtenus à la résolution de l'équation

$$x^2 - A = 0 \qquad (p),$$

et à la décomposition, dans le domaine du nombre premier p, d'une fonction

$$F(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n,$$

dont les coefficients sont des nombres entiers du domaine K(1),

Gundelfinger (*S.*). — Remarques et observations complémentaires sur le Mémoire de M. Heffter : *Sur la classification*, etc. (Tome 126 de ce *Journal*, pages 83-98). (85-91).

L'auteur rappelle ses diverses publications sur la classification des quadriques et de leurs sections planes, et compare ses résultats aux critères donnés par MM. Hensel et Heffter. Il donne une méthode élémentaire pour la classification des sections planes des quadriques, en coordonnées cartésiennes. Un dernier paragraphe contient une démonstration de la règle des signes de Descartes, pour les équations dont toutes les racines sont réelles,

Landau (*Edmund*). — Sur une application du théorème d'Eisenstein à la théorie de l'équation différentielle de Gauss. (92-102).

Le théorème d'Eisenstein, complété par Heine, fournit une condition nécessaire pour qu'une série entière, à coefficients rationnels, soit un *élément* d'une fonction algébrique. M. Landau s'en sert pour démontrer, par des raisonnements purement arithmétiques, la transcendance de la série $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ de Gauss dans l'un des deux cas fondamentaux indiqués par Schwartz (celui où la somme des angles du triangle réduit est inférieure à π). Dans la démonstration intervient le théorème de Dirichlet sur l'existence d'une infinité de nombres premiers de la forme $(tm+1)$.

Jung (*Heinrich*). — Sur la transformation des corps algébriques de rang *un*. (103-115).

« Dans les pages qui suivent, dit l'auteur, on se propose de traiter de la transformation des fonctions elliptiques à un point de vue algébrique. La suite des idées est la suivante : quand on *adjoint* une nouvelle grandeur algébrique à un corps algébrique de fonctions d'une variable, on obtient en général un nouveau corps de *rang* plus élevé. Il n'y a que dans le cas où le corps primitif est de rang *zéro* ou *un*, que le nouveau corps peut être de même rang que le premier. C'est ce qui est prouvé dans le premier paragraphe. On examine ensuite plus spécialement le cas où les deux corps sont de rang *un*, en appliquant la *théorie de Galois* à l'équation qui définit la grandeur que l'on adjoint. On montre, enfin, que la *transformation de Jacobi* est la plus générale à laquelle on arrive ainsi. »

Hensel (*K*). — Théorie des corps de matrices. (116-166).

1. Soit $A = (a_{ik})$ la *matrice* formée des n^2 éléments a_{ik}, pour $i, k = 1, 2, \ldots, n$. On écrit, par définition, $A = 0$, si tous les a_{ik} sont nuls; $A = 1$ si les a_{ik} sont égaux à *zéro* pour $i \neq k$, et à *un* pour $i = k$; on écrit encore $A = c$ (constante) si les a_{ik} sont égaux à *zéro* pour $i \neq k$, et à c pour $i = k$. On désigne par $|A|$ le déterminant des a_{ik}.

Si l'on introduit de même une autre *matrice* de même nature $B = (b_{ik})$, on pose encore, par définition (d'après Cayley, *Philosophical Transactions*, vol. 148).

$$A + B = (a_{ik} + b_{ik}) \qquad \text{et} \qquad AB = \left(\sum_{l=1}^{n} a_{il} b_{lk}\right).$$

La soustraction et la division se définissent comme opérations inverses de l'addition et de la multiplication. Le quotient $\frac{B}{A}$ n'existe que si $|A| \neq 0$.

La multiplication est associative, mais n'est pas, en général, commutative. Elle le devient quand on ne fait intervenir dans les calculs que des matrices appartenant au corps $K(1, A)$, formé des polynomes en A à coefficients constants quelconques, et des quotients de tels polynomes. Dans cette définition d'un *corps de matrices*, on peut se borner au cas où $|A| \neq 0$.

On a ainsi, pour chaque corps de matrices, une arithmétique toute semblable à l'arithmétique élémentaire ordinaire. Si l'on veut préciser la nature d'un tel corps, le fait essentiel est que A satisfait toujours à une équation algébrique entière, à coefficients constants, qui est entièrement déterminée, si on lui impose la condition d'être de degré minimum. Cette équation (qui s'appellera *l'équation fondamentale* de A)

$$f(r) = r^\nu + c_1 r^{\nu-1} + \ldots + c_\nu = 0$$

se déduit de la matrice $(r - A)$, formée en considérant r comme une constante indéterminée; car $f(r)$ est le *dernier diviseur élémentaire* de cette matrice.

L'étude du corps $K(1, A)$ se ramène alors à l'étude du corps des fonctions rationnelles d'une indéterminée r, considérées *modulo* $f(r)$. L'auteur la fait d'une manière très simple, et arrive aux conclusions suivantes :

Soit

$$f(r) = \prod_{i=1}^{h} (r - r_i)^{d_i}$$

la décomposition de $f(r)$ en ses facteurs linéaires. A chacun de ces facteurs linéaires on peut associer un polynome $g_i(r)$, de telle manière que, si l'on pose

$$A_i^0 = \frac{f(A)}{(A - r_i)^{d_i}} g_i(A), \qquad A_i = A_i^0 (A - r_i),$$

toute matrice $B = \varphi(A)$ du corps $K(1, A)$ peut s'écrire

$$B = \sum_{i=1}^{h} B_i,$$

avec

$$B_i = \varphi(r_i) A_i^0 + \varphi'(r_i) A_i + \ldots + \frac{\varphi^{(d_i-1)}(r_i)}{(d_i - 1)!} A_i^{d_i-1}.$$

Toutes ces matrices B_i, pour un même indice i, constituent donc un corps $K(A_i^0, A_i)$, formé suivant les mêmes lois que le corps $K(1, A)$, sauf que la matrice unité est remplacée par la matrice A_i^0. Ces matrices unités nouvelles satisfont du reste aux relations

$$A_i^0 A_k^0 = 0, \qquad (A_i^0)^2 = A_i^0.$$

Enfin, l'équation fondamentale qui correspond à chaque matrice A_i est simplement

$$r_i^{d_i} = 0.$$

L'étude du corps $K(1, A)$ est alors équivalente à l'étude des divers *corps primitifs* $K(A_i^0, A_i)$. Cela tient à ce que, si l'on considère, en même temps que B, une autre matrice $C = \sum_{i=1}^{h} C_i$, décomposée de la même manière, on a

$$B \pm C = \sum_i (B_i \pm C_i), \qquad BC = \sum_i (B_i C_i), \qquad \frac{B}{C} = \sum_i \frac{B_i}{C_i}.$$

Le système des ν matrices

$$A_i^0,\quad A_i,\quad A_i^2,\quad \ldots,\quad A_i^{d_i-1}\qquad (i=1, 2, \ldots, h),$$

au moyen desquelles s'expriment, comme il vient d'être expliqué, toutes les matrices du corps $K(1, A)$, s'appelle le *système fondamental normal* de ce corps.

2. Deux corps $K(1, A)$, $K(1, B)$ sont dits *équivalents*, si deux matrices correspondantes quelconques de ces deux corps, $\varphi(A)$ et $\varphi(B)$, satisfont toujours à une même identité

$$P\,\varphi(A)\,Q = \varphi(B).$$

La condition nécessaire et suffisante de cette équivalence est que A et B aient la même équation fondamentale, et que les éléments des deux systèmes fondamentaux normaux qui se correspondent aient, deux à deux, le même rang.

La démonstration de ce théorème résultera de la théorie de la réduction de A à une *forme réduite canonique*, par une suite d'opérations de la forme PAP^{-1} (transformations contragrédientes).

3. Pour faciliter l'exposition de cette théorie, l'auteur se sert de la représentation d'une matrice A au moyen de *matrices partielles*. Soient $e_1, e_2, \ldots, e_\rho$ des nombres entiers dont la somme soit égale à n. Isolons par un trait vertical les e_1 premières colonnes de A, puis les e_2 colonnes suivantes, et ainsi de suite; isolons de même par un trait horizontal les e_1 premières lignes, puis les e_2 suivantes, et ainsi de suite. Nous aurons ainsi décomposé A en ρ^2 matrices partielles, qu'on pourra représenter par A_{ik}; chacune d'elles pourra être considérée comme formée de n^2 éléments, en supposant qu'on la considère comme déduite de A, en y remplaçant par des zéros tous les éléments qui ne figurent pas dans le Tableau rectangulaire correspondant aux indices i et k. Et l'on pourra écrire à volonté

$$A = \sum_{i,k} A_{ik},$$

ou bien

$$A = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & \ldots & A_{1\rho} \\ A_{21} & A_{22} & \ldots & A_{2\rho} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{\rho 1} & A_{\rho 2} & \ldots & A_{\rho\rho} \end{vmatrix}.$$

En particulier, on désignera par E_{ik} les matrices provenant de la matrice unité. à n^2 éléments, comme A_{ik} provient de A.

M. Hensel expose divers théorèmes sur le calcul des matrices considérées ainsi comme constituées par des matrices partielles.

4. Par une transformation cogrédiente, toute matrice A peut se mettre sous la forme précédente, de manière que tous les A_{ik} en dessous de la diagonale principale soient nuls, et que ceux de la diagonale principale soient nuls à l'exception du dernier $A_{\rho\rho}$; et $|A_{\rho\rho}|$ n'est nul que si $A_{\rho\rho}$ est nul lui-même.

5. Si $A^2 = A$, on peut faire en sorte que tous les A_{ik} soient nuls, à l'exception

de $A_{\rho\rho}$ qui sera une matrice $E_{\rho\rho}$; si $A^r = 0$, la réduction précédente sera telle que $A_{\rho\rho}$ soit précisément nul.

6. En appliquant ces résultats aux éléments du *système fondamental normal* du corps $K(1, A)$, défini au n° 1, on reconnaît d'abord que, si μ_i désigne le *rang* de A_i^0, et si l'on fait jouer à ces nombres μ_i le rôle des e_i, on peut réduire simultanément les A_i^0 aux matrices unités incomplètes E_{ii}, et qu'alors les divers éléments

$$A_i^0,\quad A_i,\quad A_i^2,\quad \ldots,\quad A_i^{d_i-1}$$

se présentent sous la forme de matrices partielles A_{ii}, qui, par suite, n'ont, pour deux valeurs différentes de i, ni lignes, ni colonnes communes.

7. On peut dès lors poursuivre la réduction en considérant isolément chacun de ces groupes d'éléments, c'est-à-dire qu'on peut supposer qu'on a affaire à un système A pour lequel l'équation fondamendale est $r^d = 0$. On reconnaît alors que A peut se ramener à la *forme réduite* définitive, où ne figurent plus comme éléments que des 1 et des 0

$$A = E_{12} + E_{23} + \ldots + E_{\rho-1,\rho}.$$

De plus, $\rho = d$ et les nombres $e_1, e_2, \ldots, e_\rho$ sont définis par les égalités suivantes :

$$e_1 = n - [A],\qquad e_2 = [A] - [A^2],\qquad e_3 = [A^2] - [A^3],\qquad \ldots,\qquad e_\rho = [A^{\rho-1}],$$

dans lesquelles la notation $[A^i]$ désigne le *rang* de la matrice A^i. Cette forme réduite est, par suite, unique.

Dans le cas général, il y aura h séries de nombres analogues

$$e_1^{(i)} = [A_i^0] - [A_i],\qquad e_2^{(i)} = [A_i] - [A_i^2],\qquad \ldots,\qquad e_{d_i}^{(i)} = [A_i^{d_i-1}]$$
$$(i = 1, 2, \ldots, h),$$

qui déterminent entièrement la forme réduite; et l'on a la formule

$$D_n = | r - A | = \prod (r - r_i)^{e_1^{(i)} + e_2^{(i)} + \ldots + e_{d_i}^{(i)}},$$

qui s'appellera la *décomposition caractéristique* du déterminant $| r - A |$.

8. L'auteur donne le moyen de former très simplement, en partant de cette décomposition, les *diviseurs élémentaires* et les *diviseurs du déterminant* (*Determinantenteiler*) de la matrice $(r - A)$.

9. Recherche des systèmes B échangeables avec le système A, c'est-à-dire tels que $AB = BA$. Il faut d'abord que B se décompose en systèmes partiels B_{ii} de la même manière que A se décompose en ses systèmes partiels A_{ii} (*voir* n° 6).

10. On est ainsi ramené de nouveau au cas particulier où A a pour équation fondamentale $r^d = 0$, et l'on arrive à une règle précise pour former tous les systèmes B répondant à la question. Le nombre des solutions, linéai-

rement indépendantes, est $\sum_i \sum_k [e_i^{(k)}]^2$ (Frobenius). L'auteur étudie enfin l'équation $| r - B | = 0$.

II. Applications à la théorie des formes bilinéaires et des formes quadratiques. On retrouve, en particulier, les résultats classiques sur l'équation en s. Ils tiennent à ce que, si A est une matrice symétrique, son système fondamental normal se réduit à la forme

$$A_1^0, \quad A_2^0, \quad \ldots, \quad A_h^0,$$

toutes les matrices A_i étant alors nécessairement nulles.

Landau (*Edmund*). — Sur une représentation du nombre des classes d'idéaux d'un corps algébrique au moyen d'une série infinie. (167-174).

Soient $\varkappa$ un corps algébrique, h le nombre des classes d'idéaux de ce corps, $F(n)$ le nombre de ces idéaux dont la norme est égale à l'entier positif n. Le nombre h est donné, d'après Dedekind, par la formule

$$gh = \lim_{s=1} (s-1)\zeta_\varkappa(s) \qquad \text{où} \qquad \zeta_\varkappa(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{F(n)}{n^s};$$

dans laquelle g désigne une constante que l'on peut considérer comme connue pour chaque corps $\varkappa$ donné.

C'est cette valeur du produit gh dont M. Landau se propose de donner une expression sous forme de série. Introduisant, à cet effet, la fonction

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s},$$

et la fonction $\mu(k)$ de Möbius, définie par la formule

$$\frac{1}{\zeta(s)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu(k)}{k^s},$$

on écrit

$$gh = \lim_{s=1} \frac{\zeta_\varkappa(s)}{\zeta(s)} = \lim_{s=1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{n_s},$$

en posant

$$c_n = \sum_{k|n} \mu(k)\, F\left(\frac{n}{k}\right)$$

(notation par laquelle il faut entendre que la sommation suivant l'indice k doit s'étendre à tous les diviseurs k de n). On arrive ainsi à la formule annoncée

$$gh = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{n},$$

car le second membre de cette formule est une série convergente. C'est la démonstration de cette convergence qui forme toute la difficulté de la question; l'auteur l'établit en prouvant d'abord que le produit

$$\frac{\log^2 x}{x}\left|\sum_{n=1}^{x} c_n\right|$$

demeure, pour toutes les valeurs de x, inférieur à un nombre fixe.

Guldberg (A.). — Sur les équations aux différences finies, qui possèdent des solutions fondamentales. (175-178).

Si un système d'équations aux différences finies

(1) $$\Delta y_i = F_i(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

possède la propriété (appartenant aux systèmes linéaires) que son intégrale générale s'exprime, au moyen de p solutions particulières quelconques

$$y_i = y_{ki} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n;\ k = 1, 2, \ldots, p),$$

par des formules, toujours les mêmes,

(2) $$y_i = f_i(y_{11}, \ldots, y_{1n}; \ \ldots; \ y_{p1}, \ldots, y_{pn}; \ a_1, \ldots, a_n)$$

(où $a_1, \ldots, a_n$ sont des constantes arbitraires), on peut supposer les constantes d'intégration $a_1, \ldots, a_n$ tellement choisies que ces formules soient les équations d'un groupe de transformations p fois transitif, entre les variables $(a_1, \ldots, a_n)$ et les variables transformées $(y_1, \ldots, y_n)$.

Le nombre p est au plus égal à $n + 2$.

Pour $n = 1$, on obtient ainsi trois types d'équations aux différences, correspondant à $p = 1, 2, 3$. On peut les écrire

$$\begin{aligned} &y_{x+1} - Py_x = 0, \\ &y_{x+1} + Py_x + Q = 0, \\ &y_x y_{x+1} + Py_{x+1} + Qy_x + R = 0. \end{aligned}$$

Cette dernière équation possède des propriétés toutes semblables à celles de l'équation différentielle de Riccati.

Bohl (P.). — Sur le mouvement d'un système mécanique dans le voisinage d'une position d'équilibre (179-276).

Considérons un système S dont la position est définie par n paramètres ω_1, $\omega_2, \ldots, \omega_n$, et dont le mouvement est régi par les équations de Lagrange; nous supposons de plus qu'il y a une fonction des forces U, qui a des dérivées continues du premier et du deuxième ordre; et que les dérivées premières de U s'annulent pour la position $\omega_1 = \omega_2 = \ldots = \omega_n = 0$, qui est par conséquent la position d'équilibre considérée. On peut alors, par une transformation linéaire

des coordonnées, faire en sorte que la force vive T soit de la forme

$$2T = \omega_1'^2 + \omega_2'^2 + \ldots + \omega_n'^2 + \sum_{r,s} a_{rs}\omega_r'\omega_s',$$

(les a_{rs} étant des fonctions des ω_i qui s'annulent pour $\omega_i = 0$, et dont on supposera qu'elles admettent des dérivées continues du premier et du deuxième ordre), et cela de manière que U soit de la forme

$$2U = \gamma_1\omega_1^2 + \gamma_2\omega_2^2 + \ldots + \gamma_n\omega_n^2 + \varphi,$$

où les γ_i sont des constantes, et où φ s'annule ainsi que ses dérivées du premier et du deuxième ordre pour $\omega_i = 0$.

On dit alors d'une coordonnée ω_i qu'elle est *stable, instable* ou *singulière*, suivant que la constante correspondante γ_i est négative, positive ou nulle.

L'auteur se propose la solution du problème suivant :

En supposant qu'aucune coordonnée n'est singulière, étudier l'existence et la multiplicité des mouvements dans lesquels S *reste dans le voisinage de la position d'équilibre pendant un intervalle de temps qui se prolonge, au moins dans un sens, jusqu'à l'infini.*

L'auteur remarque que, s'il y avait des coordonnées singulières, la connaissance des termes du second ordre de U ne suffirait pas pour pouvoir répondre à la question posée.

Le Mémoire est divisé en trois Chapitres.

Chapitre I. — Il est consacré à la démonstration du théorème préliminaire suivant :

Si dans le domaine défini par les inégalités

$$-a_i \leq x_i \leq a_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

$f_1, f_2, \ldots, f_n$ *sont des fonctions continues des* x_i, *qui ne s'y annulent pas simultanément :* 1° *il est impossible que l'on ait, sur tout le pourtour du domaine, les identités*

$$f_i = x_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n);$$

2° *il existe un point de ce pourtour pour lequel on a les égalités* $f_i = Nx_i$, *où* N *est un certain nombre négatif.*

La deuxième partie de ce théorème se déduit de la première, qui y est, du reste, implicitement contenue. La première partie se démontre par la considération de l'intégrale de surface de Kronecker, relative aux fonctions

$$f_1, \quad f_2, \quad \ldots, \quad f_n,$$

et étendue au pourtour du domaine considéré.

Chapitre II. — On appellera $x_1, x_2, \ldots, x_M$ celles des coordonnées ω_i qui sont stables; $y_1, y_2, \ldots, y_N$ celles qui sont instables; les constantes γ_i relatives

aux premières seront désignées par $-p_i^2$; celles qui sont relatives aux secondes par q_i^2; les dérivées des x_i seront désignées par ξ_i, et celles des y_i par η_i. En résolvant les équations de Lagrange, on obtient alors le système

$$\frac{d\xi_i}{dt} = -p_i^2 x_i + X_i, \qquad \frac{d\eta_k}{dt} = q_k^2 y_k + Y_k \qquad (i = 1, 2, \ldots, M;\ k = 1, 2, \ldots, N);$$

où les X et les Y s'annulent, ainsi que leurs dérivées premières par rapport aux x, y, ξ, η, pour $x_i = y_k = \xi_i = \eta_k = 0$.

On a, de plus, l'intégrale première des forces vives, qui s'écrit

$$\sum_i \xi_i^2 + \sum_k \eta_k^2 + \sum_i p_i^2 x_i^2 - \sum_k q_k^2 y_k^2 + R = C,$$

où R s'annule, ainsi que les dérivées premières et secondes par rapport aux x, y, ξ, η, pour $x_i = y_k = \xi_i = \eta_k = 0$; et où C est la constante des forces vives.

Les propriétés précédentes suffiront à établir les diverses propositions contenues dans le Chapitre. On en tire, à cet effet, un certain nombre d'inégalités, dont voici les plus importantes. Posons

$$u_k = \eta_k + q_k y_k, \qquad v_k = \eta_k - q_k y_k.$$

Désignons par x'_i, y'_k, ξ'_i, η'_k, u'_k, v'_k les différences des valeurs correspondantes des x_i, y_k, ξ_i, η_k, u_h, v_k dans deux mouvements différents. Introduisons enfin des nombres positifs arbitraires $l_1, l_2, \ldots, l_M$; $m_1, m_2, \ldots, m_N$. Alors :

1° *Pourvu que les x, y, ξ, η correspondant aux deux mouvements restent, en valeurs absolues, suffisamment petits dans l'intervalle de temps considéré, on aura, dans tout cet intervalle,*

$$r' = \sum_i l_i^2 (\xi_i'^2 + p_i^2 x_i'^2) + \sum_k m_k^2 v_k'^2 - \sum_k u_k'^2 < 0,$$

sous la seule condition qu'au début de l'intervalle on ait $r' \leqq 0$ *et* $\sum_k u_k'^2 \neq 0$.

2° *On aura de même*

$$s' = \sum_i l_i^2 (\xi_i'^2 + p_i^2 x_i'^2) + \sum_k m_k^2 u_k'^2 - \sum_k v_k'^2 < 0,$$

sous la condition qu'à la fin de l'intervalle on ait $s' \leqq 0$ *et* $\sum_k v_k'^2 \neq 0$.

3° *Si l'intervalle de temps considéré s'étend depuis $t = t_0$ jusqu'à $t = +\infty$, et si l'expression*

$$\omega = e^{2ht}\left[l^2 \sum_i (\xi_i'^2 + p_i^2 x_i'^2) + m^2 \sum_k u_k'^2 - \sum_k v_k'^2 \right]$$

(*où l, m, h sont des constantes positives*) *ne devient pas infinie en même*

temps que t, on a, dans tout l'intervalle, $\omega < 0$, *à moins que les deux mouvements soient identiques.*

Les théorèmes que nous allons énoncer sont alors établis, pour la plupart, en raisonnant par l'absurde; c'est-à-dire en montrant que, si on ne les admet pas, on se trouve en contradiction avec l'une des inégalités précédentes, ou avec le théorème préliminaire du Chapitre I. Voici ces théorèmes :

Il existe un nombre positif d tel que, si l'on considère les domaines (A), (α), (B) *définis respectivement par les inégalités*

$$(A) \qquad |\xi_i| \leq d, \qquad |p_i x_i| \leq d,$$

$$(\alpha) \qquad |\xi_i| \leq \frac{d}{3\sqrt{M}}, \qquad |p_i x_i| \leq \frac{d}{3\sqrt{M}},$$

$$(B) \qquad |u_k| \leq \frac{d}{2\sqrt{N}}, \qquad |v_k| \leq \frac{d}{2\sqrt{N}}:$$

I. *Il y a une infinité de mouvements qui demeurent constamment,* A PARTIR D'UN CERTAIN INSTANT INITIAL, *dans* (A, B) [ce qui veut dire que les valeurs des x, ξ, u, v satisfont aux inégalités (A), (B)].

Pour déterminer les conditions initiales d'un tel mouvement, il convient de les choisir dans (α, B); *on peut alors prendre arbitrairement les valeurs des x, ξ, v; et les valeurs des u sont par là déterminées d'une manière uniforme et continue. De sorte qu'il n'y a qu'un mouvement répondant à la question et satisfaisant à ces conditions initiales pour les x, ξ, v.*

II. *Il y a une infinité de mouvements qui demeurent,* POUR TOUTES LES VALEURS DE t, *dans* (A, B).

Pour déterminer les conditions initiales d'un tel mouvement, il convient de les choisir dans (α, B); *on peut alors prendre arbitrairement les valeurs des x, ξ; les valeurs initiales des u, v sont par là déterminées d'une manière uniforme et continue. De sorte qu'il n'y a qu'un mouvement répondant à la question et satisfaisant à ces conditions initiales pour les x, ξ.*

Un autre groupe d'énoncés se rapporte aux *solutions asymptotiques.* Il faut entendre par là deux solutions (ou mouvements) telles que les produits par e^{ht} des différences x'_i, y'_k, ξ'_i, η'_k tendent tous vers zéro, pour t infini. Dans cette définition, h désigne une constante positive quelconque. On peut déterminer des domaines (K), (J), (K'), (J'), définis par des inégalités analogues à (A) (B), et pour lesquels on a les théorèmes suivants :

I. *A tout mouvement qui reste dans* (K) *pour $t > t_0$, correspondent une infinité de mouvements asymptotiques, qui restent dans* (J) *pour $t > t_0$. Les valeurs initiales des v déterminent entièrement chacun de ces mouvements asymptotiques, et sont arbitraires, pourvu qu'elles soient suffisamment voisines des valeurs correspondantes des v dans le mouvement donné.*

II. *A tout mouvement qui reste dans* (K') *pour $t > t_0$, correspond un mouvement asymptotique et un seul, qui reste dans* (J') *quel que soit t.*

M. Bohl étudie ensuite les valeurs de la constante des forces vives pour les

deux classes de mouvements considérés par lui. Il faut ici se limiter à un domaine (T) tel que les dérivées premières des X et des Y et les dérivées secondes de R y demeurent inférieures en valeur absolue à certaines limites fixes. Alors :

I. *Si un mouvement demeure dans* (T) *dès que t est assez grand, la constante des forces vives* C, *qui lui correspond, est positive ou nulle.*

II. *Le seul mouvement qui demeure dans* (T), *quel que soit t, et pour lequel* C *soit nulle, est le mouvement* $x_i = y_k = 0$, *dans lequel le système reste immobile dans la position d'équilibre.*

III. *Si un mouvement demeure dans* (T) *pour* $t > t_1$, *et si, pour ce mouvement,* C *est nulle, ce mouvement tend, pour* $t = +\infty$, *vers la position d'équilibre* $x_i = y_k = \xi_i = \eta_{ik} = 0$; *et le produit par* $e^{\alpha t}$ *de chacune des quantités* x, y, ξ, η *tend vers zéro, sous la seule condition que* α *soit un nombre positif inférieur à toutes les constantes* q_k.

Ces mouvements qui figurent dans ce dernier énoncé, et qui sont ainsi asymptotiques à la position d'équilibre, possèdent les propriétés suivantes :

I. *Sous certaines conditions d'inégalités, il existe un mouvement et un seul, asymptotique à la position d'équilibre* (au sens de l'énoncé précédent) *et dans lequel les* v_k *prennent pour* $t = t_0$ *des valeurs initiales arbitrairement choisies.*

II. *Si les constantes* q_k *ne sont pas toutes égales, il existe une valeur* λ *de l'indice k, pour laquelle on a, lorsque t devient infini :*

$$\lim \frac{x_i}{y_\lambda} = \lim \frac{\xi_i}{y_\lambda} = \lim \frac{\eta_{ik}}{y_\lambda} = \lim \frac{y_k}{y_\lambda} = 0 \qquad (k \neq \lambda;\ i = 1, 2, \ldots, M);$$

et, de plus,

$$\lim_{t=\infty} \left| \frac{\eta_{i\lambda}}{y_\lambda} \right| = q_\lambda.$$

Chapitre III. — Dans ce Chapitre, l'auteur reprend les mêmes questions que dans le Chapitre II, mais en imposant seulement aux mouvements considérés la condition que *les coordonnées seules* $x_i y_k$, et non plus nécessairement les vitesses $\xi_i \eta_{ik}$, *devront demeurer dans le voisinage de la valeur zéro,* soit pour $t > t_0$, soit pour toutes les valeurs de t.

Il établit d'abord que cette condition entraîne comme conséquence le fait que la somme $\sum_i \xi_i^2 + \sum_k \eta_{ik}^2$ demeure nécessairement inférieure à une certaine limite, que l'on peut rendre aussi petite que l'on veut. Il faut, pour établir ce résultat, se servir de la forme particulière des fonctions X_i, Y_k; et non plus seulement des propriétés générales de ces fonctions qui avaient suffi dans le Chapitre précédent.

Ce théorème préliminaire conduit aux conséquences suivantes, tout à fait analogues aux résultats du Chapitre précédent :

Il existe une PREMIÈRE CLASSE *de mouvements, pour lesquels les* x, y *restent, pour* $t > t_0$, *dans le voisinage de la valeur zéro; et une* SECONDE CLASSE *de*

mouvements pour lesquels les coordonnées x, y restent dans le voisinage de la valeur zéro, pour toutes les valeurs de t. Et, dans tous ces mouvements, les ξ, η restent aussi dans le voisinage de la valeur zéro.

Tout mouvement de la première classe est défini par les valeurs initiales des x, y, ξ; et ces valeurs initiales sont arbitraires (sous certaines conditions d'inégalités). *Tout mouvement de la deuxième classe est défini par les valeurs initiales des x, ξ seulement; et ces valeurs initiales sont arbitraires* (sous certaines conditions d'inégalités).

Tout mouvement de la première classe possède une infinité de mouvements asymptotiques de la première classe, et un seul de la deuxième classe (sous certaines conditions d'inégalités, imposées à ces mouvements).

En ce qui concerne la constante des forces vives, on a les mêmes résultats que dans le Chapitre précédent.

Enfin, *pour les mouvements asymptotiques à la position d'équilibre,* on reconnaît qu'*ils sont définis par les valeurs des y seulement,* pourvu qu'elles soient prises suffisamment petites. Et *un mouvement est asymptotique à la position d'équilibre dès qu'il est de la première classe et que les x tendent vers zéro pour t infini.*

La fin du Chapitre est consacrée aux *mouvements périodiques. En supposant qu'il n'y a qu'une coordonnée stable x,* l'auteur établit que *tous les mouvements de la deuxième classe sont périodiques, dès que le voisinage de la position d'équilibre est suffisamment restreint. Chacun de ces mouvements périodiques a une période minima, et l'on peut restreindre le voisinage de l'origine de manière que toutes ces périodes minima diffèrent de la quantité $\frac{2\pi}{p}$ d'aussi peu que l'on voudra.*

Fields (*J.-C.*). — Formes pour les intégrales abéliennes des trois espèces dans le cas d'une courbe dont les points multiples sont à tangentes distinctes. (277-308).

Soit

$$F(z, u) = \sum_{rs} e_{r,s} z^r u^s = 0$$

la courbe considérée, où l'on considère z comme la variable indépendante. Les valeurs de z correspondant aux points multiples et aux points de ramification sont supposées toutes distinctes; les points à l'infini sont supposés simples, distincts, et il n'y en a aucun sur l'axe des u. Enfin les points multiples sont à tangentes distinctes.

L'auteur se sert du mode de représentation des fonctions rationnelles de z, u qu'il a employé dans un précédent travail (même Journal, t. CXXIV, p. 179-201). Une telle fonction est représentée par la formule

$$\psi(z, u) = \sum_{\lambda=1}^{\delta+Q} \gamma_\lambda \frac{F(a_\lambda, u)}{(z - a_\lambda)(u - b_\lambda)} + \tau(z, u),$$

où $\tau(z, u)$ est un polynome, où (a_1, b_1), ..., (a_δ, b_δ) sont les points multiples de la courbe, et $(a_{\delta+1}, b_{\delta+1})$, ..., $(a_{\delta+Q}, b_{\delta+Q})$ sont les infinis de la fonction

2me Partie

situés à distance finie, et dans laquelle le symbole γ_λ désigne un opérateur de la forme

$$(1) \qquad \gamma_\lambda = \sum_{r,s} c_{r,s,\lambda} \left(\frac{\partial}{\partial a_\lambda}\right)^r \left(\frac{\partial}{\partial b_\lambda}\right)^s,$$

les $c_{r,s,\lambda}$ étant des constantes, qui seront liées par un certain nombre de relations linéaires et homogènes, variant avec la nature de la fonction $\psi(z, u)$.

Pour que $\psi(z, u)\,dz$ soit une différentielle de première espèce, il faut et il suffit que $(a_{\delta+1}, b_{\delta+1}), \ldots, (a_{\delta+Q}, b_{\delta+Q})$ soient les $\bar\delta$ points de ramification, que le polynome $\tau(z, u)$ soit identiquement nul, et que les opérateurs soient liés par les équations de condition

$$(2) \qquad \sum_{\lambda=1}^{\delta+\bar\delta} \gamma_\lambda a_\lambda^i b_\lambda^k = 0 \qquad [\text{pour } i+k = 0, 1, 2, \ldots, (n-1)].$$

Ces opérateurs sont de plus définis de la manière suivante. Pour un point multiple d'ordre σ_λ, les indices r, s de la formule (1) sont assujettis à la condition $r+s \leqq \sigma_\lambda - 2$. Pour un point de ramification à ν_λ branches, il faut supposer $r = 0$, $s = 1, 2, \ldots, \nu_\lambda - 2$.

En discutant le nombre de relations distinctes fournies par les équations (2) entre les coefficients indéterminés qui figurent dans les opérateurs, on démontre que le nombre des intégrales distinctes de première espèce est bien égal à

$$p = \frac{1}{2}(n-1)(n-2) - \sum_{\lambda=1}^{\delta} \frac{1}{2}\sigma_\lambda(\sigma_\lambda - 1).$$

Pour que $\psi(z, u)\,dz$ soit la différentielle d'une intégrale élémentaire de troisième espèce, devenant infinie comme $\log(z-a)$ et $-\log(z-\bar a)$ aux points (a, b), $(\bar a, \bar b)$ respectivement, il faudra prendre pour les Q infinis de $\psi(z, u)$ ces deux points et les $\bar\delta$ points de ramification, le polynome $\tau(z, u)$ étant de nouveau identiquement nul. Les opérateurs correspondant aux deux infinis logarithmiques se réduiront aux constantes

$$\gamma = \frac{1}{F'_b(a, b)}, \qquad \bar\gamma = -\frac{1}{F'_b(\bar a, \bar b)},$$

et les équations de conditions seront :

$$\gamma a^i b^k + \bar\gamma \bar a^i \bar b^k + \sum_{\lambda=1}^{\delta+\bar\delta} \gamma_\lambda a_\lambda^i b_\lambda^k = 0 \qquad [i+k = 0, 1, 2, \ldots, (n-1)].$$

L'intégrale élémentaire de deuxième espèce se déduit de celle de troisième espèce par différentiation. Dans sa différentielle $\psi(z, u)\,dz$ il faudra introduire, pour les Q infinis, l'infini (a, b) de l'intégrale et les $\bar\delta$ points de ramification.

L'opérateur γ correspondant à (a, b) sera

$$\gamma = \frac{1}{F'_b(a, b)} \frac{d}{da} + \frac{d\left(\frac{1}{F'_b(a, b)}\right)}{da},$$

et les équations de condition seront :

$$\gamma a^i b^k + \sum_{\lambda=1}^{\delta+\bar{\delta}} \gamma_\lambda a^i b^k = 0 \qquad (i + k = 1, 2, \ldots, n-1).$$

Le polynome $\tau(z, u)$ sera toujours identiquement nul.

L'auteur montre comment on peut transformer ces derniers résultats de manière à mettre en évidence les p constantes arbitraires qui subsistent dans les formules.

Il indique enfin comment il faut les modifier lorsque les infinis des intégrales de deuxième et de troisième espèce ne sont plus des points ordinaires de la courbe, mais coïncident avec des points multiples ou des points de ramification.

E. Vessiot.

COMPTES RENDUS hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences par MM. les Secrétaires perpétuels.

Tome CXL; 1905 (1).

Boussinesq (*J.*). — Pouvoir refroidissant d'un courant fluide sur un ellipsoïde à axes inégaux, immergé dans ce courant. (15-20).

C 2040 2050

Fréchet (*M.*). — Sur les fonctions limites et les opérations fonctionnelles. (27-29).

A 0430 3200

Lattès (*S.*). — Sur les substitutions à trois variables et les courbes invariantes par une transformation de contact. (29-32).

A 5230 5240

---

(1) Voir *Bulletin*, t. XXIX_2, p. 98.

Miller (*G.-A.*). — Sur les sous-groupes invariants d'indice p^2. (32-33).

A 1210

Sparre (*de*). — Au sujet de la déviation des corps dans la chute libre. (33-35).

B 1610

Boussinesq (*J.*). — Conductibilité extérieure ou superficielle représentative, pour un corps donné, du pouvoir refroidissant d'un courant fluide. (65-70).

C 2020 2040 2050

Féry (*C.*). — Sur l'isochronisme du pendule des horloges astronomiques. (106-107).

B 0150

Poincaré (*H.*). — Sur la généralisation d'un théorème élémentaire de Géométrie. (113-117).

A 6410

Picard (*E.*). — Sur quelques théorèmes relatifs aux surfaces algébriques de connexion linéaire supérieure à l'unité. (117-122).

A 8060 8040

Enriques (*F.*). — Sur les surfaces algébriques irrégulières. (133-135).

A 8060 8040

Remoundos (*G.*). — Sur quelques points de la théorie des nombres. (135-137).

A 2020

Bernstein (*S.*). — Sur les équations du type parabolique. (137-139).

A 4840 5660

Considère. — Calcul des ponts en arc et des ponts suspendus. (202-206).

B 3280

Carrus (S.). — Sur les familles de surfaces à trajectoires orthogonales planes. (208-211).

A 8860

Darboux (G.). — Note sur la Communication précédente. (211-216).

A 8860

Buhl (A.). — Sur l'approximation des fonctions par des polynomes dans ses rapports avec la théorie des équations aux dérivées partielles; application au problème de l'état initial en Physique mathématique. (216-218).

A 5630

Traynard (E.). — Sur une surface hyperelliptique. (218-219).

A 7650

Castelnuovo. — Sur les intégrales de différentielles totales appartenant à une surface irrégulière. (220-222).

A 8060 8040

Tzitzéica. — Sur les équations différentielles du second ordre renfermant un paramètre. (223-224).

A 4850

Riesz (F.). — Sur un théorème de M. Borel. (224-226).

A 0430

Fouché (M.). — Sur la déviation des graves vers le sud et sur la courbure des lignes de force. (226-229).

B 1610

Féry (Ch.). — Pendule électrique à échappement libre. (262-264).

B 0150

Considère. — Faculté que le béton armé possède de supporter de grands allongements. (291-293).

B 3620 3630

Borel (E.). — Sur une propriété des ensembles fermés. (298-300).

A 0430

Maillet (E.). — Sur les zéros des fonctions entières d'ordre infini non transfini. (300-302).

A 3610

Bertin (E.). — Sur la gyration des navires. (337-343).

B 2850

Maillet (E.). — Sur les solutions des systèmes d'équations différentielles monodromes. (357-359).

A 4850 3610

Fatou (P.). — Sur l'intégrale de Poisson et les lignes singulières des fonctions analytiques. (359-360).

A 3610 3240

Severi (F.). — Sur la totalité des courbes tracées sur une surface algébrique et sur les intégrales de Picard attachées à la surface. (361-363).

A 8040 8060

Sparre (de). — Sur la déviation des corps dans la chute libre. (363-365).

B 1610

Hérisson. — Sur un nouvel embrayage. (365-367).

B 3640

Boussinesq. — Sur l'existence d'un ellipsoïde d'absorption dans tout cristal translucide, même sans plan de symétrie ni axe principal. (401-405).

B 3210 C 3820

Hadamard. — Sur les équations linéaires aux dérivées partielles. (425-427).

A 4840

Fouché (*M.*). — Sur la déviation des graves. (427-428).

B 1610

Dienes (*P.*). — La série de Taylor sur le cercle de convergence. (489-491).

A 3240 3610

Tzitzéica (*G.*). — Sur les équations différentielles du second ordre renfermant un paramètre. (492-493).

A 4880

Cotton (*E.*). — Sur l'intégration approchée des équations différentielles. (494-496).

A 4870

Petot (*A.*). — Sur le mode de fonctionnement du différentiel des automobiles. (497-499).

B 1640

Carrus (*G.*). — Familles de Lamé à trajectoires orthogonales planes. Familles de surfaces à lignes de courbure planes. (562-564).

A 8450 8860

Enriques (*F.*). — Sur les surfaces algébriques de genre zéro. (564-566).

A 8040 8060

Fréchet (*M.*). — Sur les fonctions d'une infinité de variables. (567-568).

A 0430 3200

Fatou (*P.*). — Sur quelques théorèmes de Riemann. (569-570).

A 3240 3610 5610

Brillouin (*M.*). — Indétermination de la trajectoire limite des planeurs rigides. (570-573).

B 2840

Darboux (*G.*). — Sur les trajectoires orthogonales d'une famille de surfaces. (618-622).

A 8450 8860

Boussinesq (*J.*). — Formule rationnelle du coefficient de l'absorption de la lumière par un corps translucide quelconque. (622-624).

B 3210 C 3820

Lecornu (*L.*). — Sur le frottement de glissement. (635-637).

B 3640

Marié (*G.*). — Oscillations des véhicules de chemin de fer sur leurs ressorts de suspension. (637-639).

B 1640 3240

Darboux (*G.*). — Des surfaces applicables sur le paraboloïde de révolution. (697-702).

A 8840 8850

Painlevé (*P.*). — Sur les lois du frottement de glissement. (702-708).

B 3640

Liouville (*R.*). — Sur les pressions développées, à chaque instant, en vase clos par des poudres colloïdales de diverses formes. (708-710).

B 1650 D 7200

Jouguet (*E.*). — Sur l'onde explosive. (711-712).

B 2800 D 7200

Maillet (*E.*). — Sur la vidange des systèmes de réservoir. (712-714).

B 2810

Breydel (*A.*). — Sur les dangers de l'électricité atmosphérique pour l'aérostation et les moyens d'y remédier. (714).

B 2860

Fréchet (*M.*). — La notion d'écart dans le calcul fonctionnel. (772-774).

A 0430 6000

Pigeaud. — Sur le calcul des arcs encastrés. (774-777).

B 3280

Henry (*Ch.*). — Sur la mesure de l'énergie disponible par un dynamomètre totaliseur enregistreur. (809-811).

B 0170

Boussinesq (*J.*). — Construction, dans un milieu optique homogène, des rayons lumineux qui y pénètrent par une face plane. (825-830).

C 3820

Lecornu (*L.*). — Sur la loi de Coulomb. (847-849).

B 3640

Picard (*E.*). — Sur la dépendance entre les intégrales de différentielles totales de première et de seconde espèce d'une surface algébrique. (915-917).

A 8040 8060

Severi (*F.*). — Le théorème d'Abel sur les surfaces algébriques. (926-928).

A 8040 8060

Bôcher (*M.*). — Sur les équations différentielles linéaires du second ordre à solution périodique. (928-931).

A 4850

Traynard (*E.*). — Sur une surface hyperelliptique. (931-932).

A 8060 4070

Cosserat (*Eugène* et *François*). — Sur la dynamique du point et du corps invariable dans le système énergétique. (932-935).

B 2000

Fabry (*E.*). — Sur le genre des fonctions entières. (1010-1013).

A 3610

Zervos (*P.*). — Sur le problème de Monge. (1013-1016).

A 4830

Belzecki. — Sur l'équilibre d'élasticité des voûtes en arc de cercle. (1016-1019).

B 3270

Torres (*L.*). — Sur la stabilité longitudinale des ballons dirigeables. (1019-1021).

B 2860

Bertin. — Sur le principe des navires à flottaison cellulaire. (1077-1081).

B 2850

Mason (*M.*). — Sur l'équation différentielle $y'' + \lambda A(x) y = 0$. (1086-1088).

A 4880

Liouville (*R.*). — Sur la relation qui existe entre la vitesse de combustion des poudres et la pression. (1089-1091).

B 1650 D 7200

Pigeaud. — Arcs associés à des longerons par des montants verticaux articulés. (1091-1093).

B 3280

Bazin (*A.*). — Théorie et imitation du vol à voile. (1096-1097).

B 2840

Guiche (*de*) et *Gilardoni* (*H.*). — Sur un nouvel embrayage. (1132-1134).

B 3640

Marié (*G.*). — Oscillations des véhicules de chemin de fer à l'entrée des courbes et à la sortie. (1222-1224).

B 1640 3240

Demoulin (*A.*). — Sur les surfaces de Voss de la Géométrie non euclidienne. (1226-1227).

A 8830 6410

Maillet (*E.*). — Sur l'équation indéterminée $x^a + y^a = b z^a$. (1229-1230).

A 2850

Remoundos (*G.*). — Sur quelques points de la théorie des nombres et la théorie des fonctions. (1231-1233).

A 3610 2920

Stephanos (*C.*). — Sur les forces donnant lieu à des trajectoires coniques. (1318-1320).

B 1610

Solvay (*E.*). — Sur le problème dit *du travail statique :* essai de dissociation des énergies mises en jeu. (1362-1364).

B 0160 0170

Lebesgue (*H.*). — Sur une condition de convergence des séries de Fourier. (1378-1381).

A 5610

Vessiot (*E.*). — Sur les courbes minima. (1381-1384).

A 8450 5240

Montessus de Ballore (*R. de*). — Sur les fractions continues algébriques de Laguerre. (1438-1440).

A 3220 3610

Bernstein (*S.*). — Sur les équations aux dérivées partielles du type elliptique. (1440-1442).

A 4840

Krause (*M.*). — Sur l'interpolation des fonctions continues par les polynomes. (1442-1444).

A 3210 3220

Poincaré (*H.*). — Sur la dynamique de l'électron. (1504-1508).

C 6630

Demoulin (*A.*). — Principes de géométrie anallagmatique et de géométrie réglée intrinsèques. (1526-1529).

A 8420

Léger. — Nouvelles expériences d'enlèvement de l'hélicoptère « *M. Léger* » au Musée océanographique de Monaco. (1529-1531).

B 2840

Bellet (*H.*). — Nouveau mode d'application du tube de Pitot-Darcy à la mesure de la vitesse des conduites d'eau sous pression. (1531-1532).

B 2800

Bottasso. — Sur une solution du problème de Monge relatif à l'équation $f(dx_1, dx_2, \ldots, dx_n) = 0$ à coefficients variables. (1579-1582).

A 4830

Raffy (*L.*). — Sur la recherche des surfaces isothermiques. (1672-1674).

A 8860

Tome CXLI.

Picard (*E.*). — Sur une inégalité relative à la connexité linéaire et sur le calcul du genre numérique d'une surface algébrique. (5-8).

A 8040 8050

Boussinesq (*J.*). — Propagation des ondes le long d'une colonne

liquide compressible se composant de filets à vitesses inégales et remplissant un tuyau élastique horizontal sans tension longitudinale. (8-12).

B 2800 3210 3220

Boussinesq (*J.*). — Calcul, pour les diverses contextures et épaisseurs de paroi possibles, de la résistance élastique qu'un tuyau sans tension longitudinale oppose au gonflement de la colonne liquide le remplissant. (81-86).

B 2800 3210 3220

Husson (*Ed.*). — Recherche des intégrales algébriques dans le mouvement d'un corps solide pesant autour d'un point fixe. (100-102).

B 1620

Guichard (*C.*). — Sur les propriétés infinitésimales de l'espace non-euclidien. (170-175).

A 8450 8830 8870

Cotton (*Em.*). — Sur l'évaluation des erreurs dans l'intégration approchée des équations différentielles. (177-179).

A 4820

Boussinesq (*J.*). — Sur un cas simple où se calculent aisément l'action mutuelle des anneaux juxtaposés constituant un tuyau et l'influence de cette action mutuelle sur la propagation des ondes liquides dans le tuyau. (234-236).

B 2800 3210 3220

Padé (*H.*). — Sur la convergence de la Table des réduites d'une fraction rationnelle. (241-243).

A 3220 3610

Demoulin (*A.*). — Sur la théorie des surfaces et des enveloppes de sphères en Géométrie anallagmatique. (302-304).

A 8410 8450

Boutroux (*P.*). — Sur les propriétés d'une fonction holomorphe

dans un cercle où elle ne prend pas les valeurs zéro et un. (305-307).

A 3610

Buhl (A.). — Sur de nouvelles séries de polynomes. (307-309).

A 3630

Sparre (de). — Sur le frottement de glissement. (310-312).

B 1620 3640

Auric. — Sur les fractions continues algébriques. (344-346).

A 3630

Jouguet. — Sur la similitude dans le mouvement des fluides. (346-348).

B 2400

Painlevé (P.). — Sur les lois du frottement de glissement. (402-405).

B 1620 3640

Darboux (G.). — Sur une équation différentielle du quatrième ordre. (415-417).

A 4820

Maillet (Ed.). — Sur les nombres transcendants. (419-420).

A 2920 3220

Demoulin (A.). — Sur les enveloppes de sphères dont les deux nappes se correspondent avec conservation des angles. (459-462).

A 8450

Darboux (G.). — Sur une équation différentielle du quatrième ordre. (483-484).

A 4820

Demoulin (A.). — Sur deux systèmes cycliques particuliers. (496-499).

A 8450

Auric. — Sur la généralisation des fractions continues algébriques. (499-500).

A 3630

Zervos. — Sur le problème de Monge. (501-503).

A 4830

Duhem (*P.*). — Sur les origines du principe des vitesses virtuelles. (525-527).

B 0010

Painlevé (*P.*). — Sur les lois du frottement de glissement. (546-552).

B 1620 3640

Fuchs (*R.*). — Sur quelques équations différentielles linéaires du second ordre. (555-558).

A 4850

Bernstein. — Sur les surfaces minima. (558-559).

A 8820

Miller (*G.-A.*). — Groupes contenant plusieurs opérations de l'ordre deuxième. (591-592).

A 1210

Remoundos (*G.*). — Sur les fonctions ayant un nombre fini de branches. (618-620).

A 3620

Auric. — Sur le calcul d'une arche en maçonnerie. (621-622).

B 3280

Ringelmann. — Mesure du travail mécanique fourni par les bœufs de race limousine. (628-632).

B 0170

Poincaré (*H.*). — Rapport sur un Mémoire de M. Bachelier intitulé : *Les probabilités continues*. (647-648).

A 1630

Riesz (*F.*). — Sur les ensembles discontinus. (650-653).

A 0430

Goldziher (*Ch.*). — Un *criterium* pour l'application de la loi de Gompertz-Makeham. (677-680).

A 1630

Boutroux (*P.*). — Sur les relations récurrentes convergentes. (705-708).

A 3220 6020

Padé (*H.*). — Sur les réduites d'une certaine catégorie de fonctions. (708-710).

A 3220 6020

Gyözö Zemplén. — Sur l'impossibilité des ondes négatives. (710-712).

B 2450 C 2440

Hadamard (*J.*). — Remarque au sujet de la Note de M. Gyözö Zemplén. (713).

B 2450 C 2440

Stuyvaert. — Sur les congruences de cubiques gauches. (750-752).

A 8080

Zoretti. — Sur le développement d'une fonction analytique uniforme en produit infini. (753-754).

A 3610

Krebs (*A.*). — Sur un frein dynamométrique destiné à la mesure de la puissance des moteurs, qui permet l'utilisation, sous forme électrique, de la majeure partie du travail développé. (757-759).

B 0170

Duhem (*P.*). — Sur l'impossibilité des ondes de choc négatives dans les gaz. (811).

B 2450 2490

Fréchet (*M.*). — Formule d'interpolation des fonctions périodiques continues. (818-819).

A 1640 5610

Padé (*H.*). — Sur le développement en fractions continues de la fonction F(h, 1, h', u) et la généralisation de la théorie des fonctions sphériques. (819-821).

A 3220 4420

Husson (*E.*). — Sur un théorème de M. Poincaré relativement au mouvement d'un solide pesant. (821-823).

B 1620

Fréchet (*M.*). — Les ensembles de courbes continues. (873-875).

A 0430 8870

Lebesgue (*H.*). — Sur la divergence et la convergence non uniforme des séries de Fourier. (875-878).

A 5610

Taffoureau (*E.*). — Sur le coefficient d'utilisation des hélicoptères. (878-880).

B 2860

Padé (*H.*). — Sur la convergence des fractions continues régulières de la fonction F(h, 1, h', u) et de ses dégénérescences. (997-999).

A 3220 4420

Stekloff (*W.*). — Sur le problème du mouvement d'un ellipsoïde fluide homogène dont toutes les parties s'attirent suivant la loi de Newton. (999-1001).

B 2470

2me Partie –

Boulanger (*A.*). — Théorie de l'onde solitaire qui se propage le long d'un tube élastique horizontal. (1001-1004).

B 2800

Demoulin (*A.*). — Sur les surfaces isothermiques et sur une classe d'enveloppes de sphères. (1210-1213).

A 8860

Carathéodory (*C.*). — Sur quelques généralisations du théorème de M. Picard. (1213-1215).

A 3610

Stekloff (*W.*). — Sur le mouvement non stationnaire d'un ellipsoïde fluide de révolution qui ne change pas de figure pendant le mouvement. (1215-1217).

B 2470

Clairin (*J.*). — Sur une transformation de certaines équations linéaires aux dérivées partielles du second ordre. (1217-1219).

A 5230 4840

J. T.

BULLETIN DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE.

Tome XXXIII; 1905 [1].

Maillet (*Edm.*). — Sur les mouvements d'une nappe souterraine, particulièrement dans les terrains perméables, spongieux et fissurés. (2-12).

L'auteur établit les équations indéfinies du mouvement de la nappe. Il détermine les formes du fond pour lesquelles il y a un régime où l'épaisseur de la nappe ne dépend que du temps t, et montre qu'il y a alors une région où le

---

(1) Voir *Bulletin*, t. XXX_2, p. 5.

débit de chaque source a pour expression

$$C_1 e^{-\alpha_1 t} + C_2 e^{\alpha_2 t};$$

α_1, α_2, C_1, C_2 sont quatre constantes, les deux premières positives.
Enfin M. Maillet étudie le cas où le fond est horizontal.

Bioche (*Ch.*). — Remarques sur un cas de symétrie dans l'espace. (13-14).

Si une figure de l'espace admet pour axes de symétrie deux droites rectangulaires OX et OY, elle admet un troisième axe OZ, perpendiculaire aux deux premiers; mais elle n'admet pas nécessairement pour centre de symétrie le sommet O du trièdre. Tel est le cas du paraboloïde équilatère $xy = az$, des courbes gauches représentées par les équations

$$x = \cos\theta\, F_1(\tang^2\theta), \qquad y = \sin\theta\, F_2(\tang^2\theta), \qquad z = \tang\theta\, F_3(\tang^2\theta),$$

où les F sont des fonctions arbitraires; elles admettent pour axes de symétrie les axes coordonnés, et, en général, n'admettent pas l'origine comme centre.
Il en est encore ainsi des deux lignes de striction de l'hyperboloïde réglé et de certaines des courbes algébriques à torsion constante obtenues par M. Fabry.
Mais une courbe ayant pour axes de symétrie Ox, Oy, Oz, sans que l'origine soit centre, peut admettre des plans de symétrie autres que les faces du trièdre des coordonnées; ainsi, la courbe

$$x = a\cos\theta, \qquad y = a\sin\theta, \qquad z = c\sin 2\theta$$

admet pour plans de symétrie les plans $x \pm y = 0$.

Clairin (*J.*). — Sur l'intégration des équations aux dérivées partielles à deux variables indépendantes. (14-16).

Étant donnée une équation aux dérivées partielles à deux variables indépendantes

$$p_{n,0} + f(x, y, z, p_{1,0}, p_{0,1}, \ldots, p_{0,n-1}, p_{n-1,1}, \ldots, p_{0,n}) = 0,$$

à une racine simple λ de l'équation

$$\lambda^n - \frac{\partial f}{\partial p_{n-1,1}}\lambda^{n-1} + \frac{\partial f}{\partial p_{n-2,2}}\lambda^{n-2} + \ldots + (-1)^n \frac{\partial f}{\partial p_{0,n}} = 0$$

correspond un système de caractéristiques (C). Le système (C) possède au plus un invariant d'ordre $n+h$, h désignant un entier positif différent de zéro. Si le système (C) se compose de caractéristiques d'ordre $n-1$, la proposition subsiste pour les invariants d'ordre n ($h = 0$).

De Montcheuil. — Détermination des surfaces de révolution admettant une surface de révolution donnée pour surface moyenne. (17-18).

Ces surfaces S_1 s'obtiennent par quadratures. Elles dépendent de deux constantes arbitraires, dont l'une caractérise celles qui sont normales à une même congruence.

Étant données deux congruences de normales à des surfaces S_1, toutes les autres sont déterminées par un moyen purement géométrique.

Bioche (*Ch.*). — Sur les courbes gauches de quatrième ordre et de quatrième classe. (18-25).

L'auteur montre que ces courbes sont des transformées homographiques, soit de la biquadratique

$$\frac{x}{\lambda^4} = \frac{y}{\lambda^2} = \frac{z}{\lambda} = \frac{t}{1},$$

soit de la quartique à sécantes triples

$$\frac{x}{\lambda^4} = \frac{y}{\lambda^3} = \frac{z}{\lambda} = \frac{t}{1}.$$

Viennent ensuite diverses propriétés de ces deux courbes types (points de rebroussement, points d'inflexion linéaire) et de la surface lieu des courbes qui joignent le point de contact d'un plan osculateur et le point d'intersection de ce plan avec la biquadratique : cette surface est du cinquième ordre, admet une ligne double formée de la biquadratique et d'une conique; ses asymptotiques sont du huitième ordre et unicursales.

Il est montré enfin que la biquadratique de quatrième classe est la seule courbe algébrique transformable homographiquement en elle-même, par laquelle on puisse faire passer une quadrique non développable, sans que les tangentes de la courbe appartiennent à un complexe linéaire.

De Montessus (*R.*). — La résolution numérique des équations. (26-33).

L'équation à résoudre n'ayant que des racines simples, on doit distinguer deux cas, suivant que les modules des deux racines les plus proches du point $z = 0$ sont différents ou égaux.

Dans le premier cas, un procédé qui remonte à J. Bernoulli permet d'approcher autant qu'on veut de la racine considérée, sa valeur étant la limite du rapport de deux termes consécutifs d'une série récurrente.

Dans le second cas, on sait, grâce à des travaux récents, construire une équation du second degré qui a pour racines les deux racines de plus petit module.

M. de Montessus a réussi à retrouver ces mêmes résultats dans les Ouvrages difficilement intelligibles de Hœné Wronski, qui y est parvenu, il y a quatre-vingt-dix ans, par l'emploi de ses fonctions *aleph* simples et composées. Wronski avait même traité le cas où les p racines les plus proches ($p > 2$) du point $z = 0$ ont même module, cas qui peut se ramener au second cas indiqué plus haut. Dans les exemples qu'il a traités, la convergence des rapports qui déterminent les racines est très rapide. On peut donc considérer les fonctions

aleph comme parfaitement appropriées à la résolution numérique des équations algébriques.

Bernstein (*S.*). — Sur l'interpolation. (33-36).

Expressions diverses de l'ordonnée d'une ligne brisée dont les n sommets ont respectivement pour coordonnées

$$x_r = \frac{r}{n}, \qquad y_r = F\left(\frac{r}{n}\right),$$

$F(x)$ étant une fonction uniforme et continue lorsque x varie de 0 à 1.

Andoyer (*H.*). — Sur la sommation des séries. (36-41).

Exposition de la méthode indiquée, en 1730, par J. Stirling pour obtenir rapidement et avec une grande approximation, d'ailleurs facile à déterminer, la somme des séries pour lesquelles le rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ est développable suivant les puissances décroissantes de n, sous la forme

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \alpha_0 + \frac{\alpha_1}{n} + \frac{\alpha_2}{n^2} + \ldots + \frac{\alpha_q}{n^q} + \frac{A_{q+1}}{n^{q+1}},$$

où les α sont des constantes et A_{q+1} une fonction de n qui a une limite quand n devient infini.

La méthode est appliquée avec un succès remarquable à la série

$$\log 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots,$$

dont la convergence est si lente, à la série

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots,$$

enfin à la série

$$\frac{\pi^2}{6} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \ldots.$$

Cotton (*Émile*). — Généralisation de la théorie du tétraèdre mobile. (42-64).

Introduction. — La première Partie de ce travail concerne les mouvements à plusieurs paramètres de l'espace ordinaire. Je montre comment on passe des formules habituelles, définissant les éléments géométriques attachés aux trajectoires, aux formules analogues relatives au trièdre mobile : on substitue aux dérivées des coordonnées ordinaires certaines fonctions des paramètres du mouvement; ces fonctions se déterminent de proche en proche par une méthode simple.

Dans la suite, j'attribue au mot *mouvement* un sens plus étendu encore.

J'appelle, par exemple, *mouvement d'ensemble* à p paramètres $u_1, \ldots, u_p$ d'un espace $E(x_1, \ldots, x_n)$ par rapport à un espace fixe $E'(x'_1, \ldots, x'_n)$ une correspondance entre les $2n+p$ variables x, x' et u, obtenue en remplaçant dans les équations

$$x_i = f_i(x'_1, \ldots, x'_n;\, a_1, \ldots, a_r) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

d'un groupe fini continu et transitif G, les paramètres $a_1, \ldots, a_r$ par des fonctions des variables $u_1, \ldots, u_p$.

Au lieu de supposer le mouvement d'ensemble explicitement donné, on peut le considérer comme déterminé par l'un de ces systèmes d'équations aux différentielles totales dont j'ai fait antérieurement l'étude. On parvient alors (deuxième Partie) à un principe de passage analogue à celui du début, tant par sa forme que par ses conséquences.

Dans la troisième Partie, je montre que la notion d'élément réduit relatif à une multiplicité de l'espace E' et au groupe G permet d'attacher à toute multiplicité à p dimensions un mouvement d'ensemble à p paramètres, dont l'étude peut être substituée à celle de la multiplicité.

Cette notion de mouvement auxiliaire permet de présenter sous une forme intuitive un résultat donné par M. Vessiot dans l'un de ses beaux Mémoires sur l'application de la théorie des groupes aux systèmes différentiels; il s'agit de la décomposition d'un système différentiel admettant un groupe en un système résolvant et un système automorphe.

Il n'est question ici que de groupes finis; mais ce cas particulier est important en Géométrie. J'espère que le présent travail facilitera l'utilisation des groupes (autres que celui des mouvements) qui se présentent naturellement dans des questions classiques; tel est, par exemple, le groupe de la représentation conforme.

J'indique rapidement, en terminant, de quelle façon on pourrait en tirer parti dans la recherche des systèmes triples-orthogonaux.

De Sparre. — Note au sujet des mouvements à la surface de la Terre. (65-72).

Dans l'étude des mouvements à la surface de la Terre, on a coutume de négliger les termes de l'ordre du carré de la vitesse angulaire ω de la rotation de la Terre. L'auteur établit ici les équations du mouvement à la surface de la Terre, en négligeant seulement les termes d'ordre supérieur à ω^3, et en supposant la Terre sphérique et homogène.

Il y a lieu de distinguer deux cas, suivant que le mouvement s'accomplit à l'extérieur de la Terre ou à son intérieur (chute du haut d'une tour ou chute dans un puits).

Les formules obtenues mettent en évidence deux déviations de sens contraires dans les deux cas. Si l'on désigne toujours par h la hauteur de chute, la déviation correspondante x est représentée, pour la chute du haut d'une tour, par la formule

$$x = -\frac{R\omega^4 h^2}{2g^2}\sin^3\lambda\cos\lambda;$$

elle est dirigée *vers le nord*. Pour la chute dans un puits, la déviation est

dirigée *vers le sud* et a comme expression

$$x = \frac{\omega^2 h^2}{2g} \sin\lambda \cos\lambda.$$

Dans ces formules, R est le rayon terrestre, g la gravité au lieu de l'expérience, λ la latitude vraie en ce lieu.

Hadamard. — Sur quelques questions de calcul des variations. (73-80).

L'auteur revient sur une Communication antérieure (*Bull. Soc. math. de France*, t. XXX, 1902) dans laquelle il avait donné une condition nécessaire (correspondant à celle de Legendre ou à celle de Weierstrass) pour le minimum d'une intégrale n-uple dépendant de m fonctions inconnues. Il avait cru pouvoir considérer comme équivalente à cette condition, dans le cas $m = n = 2$, celle qui résulte de la méthode de Clebsch. Il rectifie aujourd'hui cette assertion inexacte et montre que la question est loin d'être élucidée.

Il indique ensuite quelques compléments qu'il a apportés à la solution de quelques autres problèmes du calcul des variations.

Weill (Mathieu). — Sur une classe d'équations irréductibles du cinquième degré, résolubles par radicaux. (82-87).

L'auteur arrive, par la considération de pentagones inscrits dans une conique et circonscrits à une autre, au théorème suivant : *l'équation*

$$t^5 - (2a + b)t^4 + ct^3 - a(2c - ab - b^2 - 3a^2)t^2 + a^2(c - ab - 2a^2)t + a^4(a - b) = 0$$

est soluble par radicaux, quelles que soient les trois constantes a, b, c.

Si l'on part des deux coniques ayant respectivement pour équations

$$x^2 + y^2 - z^2 = 0, \qquad Ax^2 + By^2 - z^2 = 0,$$

les pentagones étant inscrits dans la première et circonscrits à la seconde, on reconnaît que *l'équation*

$$t^5 - act^4 + \sqrt{a^4 - 2a^2 + 5a}\,(t^3 - ct^2) + at - c = 0,$$

où a et c sont deux paramètres indépendants, est soluble au moyen de radicaux portant sur des fonctions rationnelles de a et de c.

Bioche (Ch.). — Sur les permutations polyédriques. (88-89).

On considère n lettres et des polyèdres égaux ayant n sommets. On affecte à chaque sommet d'un polyèdre une des n lettres. Combien peut-on obtenir de dispositions de ces lettres, deux dispositions étant les mêmes, si l'on peut faire coïncider les polyèdres correspondants de façon que les sommets qui coïncident soient affectés de la même lettre?

Ce nombre est égal au produit des n premiers entiers, divisé par le nombre des modes de coïncidence possibles de deux des polyèdres égaux.

Clairin (*J.*). — Sur certaines transformations des équations linéaires aux dérivées partielles du second ordre. (90-97).

Étude des transformations (B_2) de Bäcklund qui permettent de remplacer une équation aux dérivées partielles du second ordre par une équation linéaire, en faisant correspondre à chaque intégrale de l'équation donnée une infinité d'intégrales de l'équation linéaire, les variables indépendantes étant conservées. L'objet de cette étude est de trouver dans quels cas une fonction

$$z' = f\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}\right)$$

satisfait à une équation aux dérivées partielles du second ordre quand on remplace z par une intégrale d'une équation de la forme

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} = a(x, y)\frac{\partial z}{\partial x} + b(x, y)\, z.$$

L'auteur montre que les seules transformations qui satisfassent aux conditions énoncées sont les transformations indiquées par Moutard et par M. Lucien Lévy.

Il y a une exception à faire pour l'équation

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} = 0,$$

qui peut être transformée en l'une ou l'autre des deux équations

$$\frac{\partial^2 z'}{\partial x\, \partial y} = 0, \qquad \frac{\partial^2 z'}{\partial x\, \partial y} + e^{z'}\frac{\partial z'}{\partial y} = 0.$$

Denjoy (*Arnaud.*) — Sur quelques propriétés des fonctions de variables réelles. (98-114).

Introduction. — Soit f une fonction définie en chaque point d'un ensemble parfait quelconque P. On sait ce que l'on entend par maximum et minimum de la fonction f en un point de cet ensemble et relativement à cet ensemble. Désignons par A et I ces deux fonctions qui sont définies en chaque point de P. La fonction A est semi-continue supérieurement, la fonction I semi-continue inférieurement.

La fonction A, qui est à elle-même son propre maximum, possède un minimum. Je le désigne par A'. La fonction semi-continue inférieurement A' possède un maximum. Je le désigne par A''. Je désigne de même le minimum de A'' par A''' et ainsi de suite. Je désigne d'une façon entièrement analogue les fonctions I', I'', I''', ..., qui se déduisent de I. I' est le maximum de la fonction semi-continue inférieurement I. I'' est le minimum de la fonction semi-continue supérieurement I'. I''' est le maximum de I'', etc.

Je démontre, dès le début de cette Note, que les fonctions de rang impair A',

A‴, ..., coïncident entre elles, et aussi I′, I‴, ..., et qu'il en est de même des fonctions de rang pair A″, A^IV, ..., d'une part, et I″, I^IV, ..., d'autre part. Ce fait étant acquis :

1° Je donne les propriétés-définitions, caractéristiques des quatre fonctions A′, A″, I′, I″ et qui les relient directement à f;

2° Je cherche si, par leurs propriétés, ces fonctions peuvent servir à caractériser une fonction f à laquelle elles appartiennent. Je trouve effectivement une relation, savoir $A' = I''$, $A'' = I'$, vérifiée sur tout ensemble parfait qui caractérise les fonctions limites des fonctions continues, ou de classe 1, suivant la terminologie de M. Baire;

3° J'ai cherché si, parmi ces fonctions, certaines conservent leurs propriétés à la limite; autrement dit, f_n étant une fonction tendant vers une fonction f, j'ai cherché si les fonctions a'_n, a''_n, i'_n, i''_n, relatives à f_n, tendent vers les fonctions A′, A″, I′, I″ relatives à la fonction f limite de f_n. Il n'en est rien, comme il est bien aisé de s'en convaincre par des exemples immédiats. Mais j'ai pu trouver des inégalités reliant les quantités A′, A″, I′, I″ et les limites a', a'', i', i'' des fonctions a'_n, a''_n, i'_n, i''_n dans les cas où ces limites existent. J'ai, à ce propos, énoncé un théorème général sur la façon dont s'opère la convergence d'une fonction tendant vers une fonction limite.

Fontené (*G.*). — Sur l'extension à l'espace du théorème de Poncelet par des polyèdres de genre un. (115-123).

L'auteur appelle *polyèdre réticulé* un polyèdre dont les sommets se distribuent en q séries de p sommets et en p séries de q sommets, les faces se distribuant de même.

Il examine en particulier le polyèdre $p = 4$, $q = 4$, qui devient le polyèdre à 8 sommets et à 8 faces ($F = S = 8$) de M. Bricard, quand on suppose que ses sommets opposés coïncident deux à deux.

Le problème de construire un tel polyèdre circonscrit à une quadrique Σ et inscrit à une quadrique Σ', au lieu d'être un problème *déterminé* en apparence, est un problème *triplement indéterminé* en apparence. Mais il y a plus. Les quadriques Σ et Σ' doivent satisfaire à une condition et le problème est quadruplement indéterminé.

La condition de fermeture relative au polyèdre réticulé $p = 4$, $q = 4$ est que les racines λ_1, λ_2, λ_3, λ_4 de l'équation en λ relative aux deux quadriques d'après l'équation

$$\lambda\Sigma + \Sigma' = 0$$

vérifient la relation

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = \lambda_4;$$

pour le polyèdre ($F = S = 8$) elles doivent vérifier la relation

$$\lambda_1 + \lambda_2 = \lambda_3 + \lambda_4.$$

Si deux quadriques Σ et Σ' admettent des polyèdres ($F = S = 8$) qui soient circonscrits à Σ et inscrits à Σ', la même chose a encore lieu quand on remplace la quadrique Σ' par une quadrique de faisceau *ponctuel* que déterminent Σ et Σ' ou la quadrique Σ par une quadrique de faisceau *tangentiel* que déterminent Σ et Σ'.

Borel (*Émile*). — Remarques sur certaines questions de probabilité. (123-128).

Maillet (*Ed.*). — Sur les solutions de certains systèmes d'équations différentielles; applications à un système hydraulique de n réservoirs. (129-145).

Introduction et résumé. — J'ai étudié ailleurs (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences,* 13 mars 1905) les variations des débits des systèmes de réservoirs cylindriques munis d'orifices (ajutages ou vannes) ou de déversoirs (ces derniers non noyés) de communication.

Je reviens ici sur cette question en discutant des cas plus généraux, particulièrement pour n réservoirs munis exclusivement de déversoirs non noyés. Je trouve encore dans ce dernier cas une famille de solutions simples asymptotiques à toutes les solutions, même quand on regarde comme légèrement variables avec la charge, conformément à l'expérience (Poncelet, Lesbros, Bazin, etc.), certains coefficients qui entrent dans les formules du débit des déversoirs.

J'indique en même temps des systèmes d'équations différentielles non linéaires corrélatifs ou plus généraux dont on peut trouver au moins une solution particulière simple dépendant d'une constante arbitraire et qui est parfois encore asymptotique à toute une catégorie de solutions.

De Sparre. — Note au sujet de la déviation des graves dans la chute libre. (146-149).

Dans une Note présentée à l'Académie des Sciences le 23 janvier 1905, M. Fouché a fait remarquer que, si l'on suppose que la surface de la terre est une surface de niveau pour la pesanteur, *la déviation dans la chute des graves est la même pour la chute dans un puits que pour la chute du haut d'une tour,* contrairement à ce qui a lieu dans le cas de la terre supposée sphérique. La démonstration de M. Fouché prêtant à quelques critiques, M. de Sparre en expose une autre, d'où il résulte que la concavité des lignes de force est tournée du côté *où la force croît,* c'est-à-dire *vers le nord.* Il reste néanmoins une déviation résiduelle vers le sud, qui a pour expression

$$x = \frac{\omega^2 g t^4}{23} \sin\lambda \cos\lambda,$$

les notations étant les mêmes que dans les Notes antérieures de l'auteur (*voir* ci-dessus).

Fouché (*M.*). — Sur la déviation des graves et les champs de force. (150-156).

Après quelques observations sur la position même du problème, qui peut être entendu de plusieurs manières différentes, l'auteur procède par voie géométrique à la détermination du plan osculateur et du rayon de courbure des lignes de force.

Il prouve que le plan osculateur d'une ligne de force est, en chacun de ses points, normal à la ligne de force constante menée par un point sur la surface de niveau correspondante.

De plus, la courbure de la ligne de force est la dérivée du logarithme de la force, prise dans la direction de la surface de niveau où l'accroissement de la force est maximum.

Le premier de ces théorèmes fournit immédiatement une intégrale première, obtenue par M. Darboux, pour le problème des familles de surfaces qui admettent des trajectoires orthogonales planes, dont les plans sont astreints à passer par un point fixe ou à être parallèles à une droite fixe.

André (Désiré). — Sur les sommes des nombres, pris de quatre en quatre, des combinaisons régulières d'ordre quelconque. (159-170).

Les *combinaisons régulières d'ordre* a de m objets distincts pris n à n, considérées et étudiées par M. D. André dès 1876, sont celles des combinaisons de ces m objets n à n où chaque objet peut être répété jusqu'à a fois, mais non pas davantage. Leur nombre, que l'auteur représente par $(m, n)_a$, avec la convention $(m, 0)_a = 1$, est égal au coefficient de x^n dans le développement de

$$(1 + x + x^2 + \ldots - x^a)^m.$$

Les sommes qui font l'objet du présent Mémoire sont les résultats

$$S_m^0, S_m^1, S_m^2, S_m^3$$

qu'on obtient en additionnant de quatre en quatre les coefficients du développement précédent; dans ces symboles, l'indice supérieur est la valeur de n dans le terme par lequel on commence l'addition. Ces sommes sont des entiers qui dépendent à la fois de a et de m.

L'auteur compare celles qui correspondent, pour un a donné, à la même valeur de m. Voici ses résultats.

Lorsque a est de la forme $4\alpha + 1$, les quatre sommes sont égales deux à deux si m est impair; si m est pair, deux sont égales et deux différentes.

Lorsque a est de la forme $4\alpha + 2$, trois des quatre sommes sont toujours égales entre elles; la quatrième est égale à leur valeur commune, augmentée de 1 si m est pair, diminuée de 1 si m est impair.

Lorsque a est de la forme $4\alpha + 3$, on a, quel que soit m,

$$S_m^0 = S_m^1 = S_m^2 = S_m^3.$$

Lorsque α est de la forme $4\alpha + 4$, les trois dernières sommes sont toujours égales entre elles; la première est égale à leur valeur commune, augmentée de l'unité.

Pour toutes les valeurs de m supérieures à 3, et quel que soit l'ordre a, la somme S_{m+1}^i est congrue à la somme S_m^i selon le module 10.

Il suit de ce dernier théorème que *les valeurs numériques de* S_{m+1}^i *et de* S_m^i (*écrites en base* 10) *ont même dernier chiffre.* Cette proposition a été décou-

verte par M. Estanave pour les combinaisons ordinaires ($a = 1$) et c'est en vue de l'étendre aux combinaisons régulières que M. D. André a composé le présent Mémoire.

De Montcheuil. — Résolutions de l'équation

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2.$$

(170-171).

Soient S une surface quelconque; ρ le segment qui relie ses centres de courbure; x, y, z les coordonnées de sa surface moyenne; on a, tout le long des lignes de cette dernière surface qui correspondent aux lignes ombilicales de S,

$$d\rho^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2.$$

Il suffira donc de se donner une surface S quelconque et de déterminer ses lignes ombilicales pour obtenir, sans signes de quadrature, les expressions des coordonnées et de l'arc d'une courbe quelconque de l'espace.

On obtiendra les courbes réelles en choisissant pour S une surface réelle à lignes ombilicales réelles.

Autonne (Léon). — Sur les droites fondamentales dans les collinéations de l'espace à $n - 1$ dimensions. (172-190).

Si l'on considère n variables x_i comme les coordonnées homogènes d'un point x et n variables u_i comme celles d'un point u dans un espace à $n - 1$ dimensions, on sait que les *points fondamentaux* et les *plans fondamentaux* sont ceux qui se correspondent à eux-mêmes par une collinéation de déterminant différent de zéro.

Le Mémoire de M. Autonne a pour objet de rejoindre, en les étendant, les deux notions de *points* et de *plans fondamentaux*.

L'auteur convient de dire qu'une droite d_m de *degré* m et de *classe* $n - m$ est l'intersection de $n - m$ plans ($m < n$). C'est aussi le lieu des points x dont les coordonnées s'expriment en fonction linéaire et homogène de celles de m points donnés. Un point est une d_1; un plan est une d_{n-1}.

Une droite d_m sera *fondamentale* pour la collinéation p si d_m est invariante par p, c'est-à-dire *si d_m est à la fois le lieu du point x et du point-image de x par la collinéation p.*

M. Autonne résout complètement le problème relatif à la construction des droites fondamentales. La règle qu'il donne rappelle, avec moins de simplicité, celle qu'il avait établie précédemment pour les points et les plans fondamentaux.

Remoundos (Georges). — Sur le cas d'exception de M. Picard et les fonctions multiformes. (191-201).

Après avoir généralisé une proposition de M. Borel sur les fonctions entières, l'auteur donne le théorème suivant :

Si nous désignons par $u = \omega(z)$ la fonction multiforme que définit l'équa-

tion $f(z, u) = 0$, d'ordre $e^{r^\rho}(\log r)^{\rho_1}\ldots(\log r)^{\rho_\mu}$, les zéros de l'équation

$$\omega(z) = \alpha,$$

où α est un nombre quelconque, satisfont aux inégalités établies par MM. Boutroux et Lindelöf pour les fonctions entières du même ordre. Il ne peut y avoir exception pour plus de $2\nu - 1$ valeurs finies de α. Il en est de même des équations

$$\omega(z) = G(z);$$

$G(z)$ étant une fonction entière d'ordre inférieur à l'ordre indiqué plus haut.

Goursat (E.). — Sur le problème de Monge. (201-210).

On considère k équations ($k \leqq n - 1$),

$$f_i(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}; dx_1, dx_2, \ldots, dx_{n+1}) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, k),$$

homogènes par rapport aux différentielles $dx_1, \ldots, dx_{n+1}$. On se propose d'exprimer $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$ *explicitement* au moyen d'une variable auxiliaire t, de $n - k$ fonctions arbitraires de t et de leurs dérivées jusqu'à un ordre déterminé. Ce problème a été résolu par Monge, dans le cas particulier où l'on a

$$n = 2, \qquad k = 1.$$

M. Goursat étudie le cas où, n étant quelconque, k est égal à $n - 1$.

Si, dans le système proposé, on remplace dx_i par $X_i - x_i$ on obtient les équations d'un cône (T) de l'espace $(X_1, X_2, \ldots, X_{n+1})$ à $n + 1$ dimensions, dont le sommet est au point $(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1})$. Introduisant alors le plan

$$X_{n+1} - x_{n+1} = p_1(X_1 - x_1) + \ldots + p_n(X_n - x_n),$$

on forme les $n - 1$ équations tangentielles du cône (T),

$$F_i(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}; p_1, p_2, \ldots, p_n) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n - 1).$$

Si l'on considère maintenant $x_1, x_2, \ldots, x_n$ comme des variables indépendantes, x_{n+1} comme une fonction de ces variables, $p_1, p_2, \ldots, p_n$ comme les dérivées partielles de x_{n+1}, on a là un système que M. Goursat appelle le *système associé* du système proposé $f_i = 0$. Il montre que la méthode d'intégration de Monge s'étend au cas où le système associé est *en involution*.

Ce cas est moins particulier qu'il ne paraît. Car, étant données $n - h$ équations de Monge ($h > 1$), la méthode précédente sera applicable si l'on peut leur adjoindre $h - 1$ équations nouvelles de même forme, et telles que le système associé du système ainsi complété soit en involution. C'est ce qui arrive, par exemple, quand les fonctions f_i ne renferment pas les variables $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$. Comme application, M. Goursat résout l'équation classique

$$dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 = dx_4^2.$$

Suchar (P.-J.). — Sur une transformation réciproque en Mécanique. (210-224).

Les mouvements de deux points qui ont lieu, l'un par rapport au temps t, l'autre par rapport au temps t_1, sont dits *réciproques* par l'auteur, si, aux points correspondants de leurs trajectoires, les coordonnées de chacun d'eux sont les mêmes fonctions des composantes de la vitesse de l'autre.

Un mouvement donné n'est pas en général transformable en un autre réciproque. En se limitant aux mouvements plans, M. Suchar montre que le mouvement d'un point sera le réciproque d'un autre si les composantes de son accélération ont des expressions de la forme

$$x'' = (ax + by)u, \qquad y'' = (a'x + b'y)u,$$

où a, b, a', b' sont des constantes et u une fonction quelconque des coordonnées x, y et des vitesses composantes x', y'. Il insiste surtout sur le cas des forces centrales

$$x'' = ux, \qquad y'' = uy.$$

Si u ne contient pas explicitement le temps, il y a un mouvement *réciproque* de celui-là; il est défini par les équations

$$x_1 = kx', \qquad y_1 = ky', \qquad \frac{dt_1}{dt} = k^2 u \qquad (k = \text{const.}).$$

Le point M_1, dont x_1 et y_1 sont les coordonnées, est soumis lui aussi à une force centrale; sa trajectoire, rapportée aux mêmes axes que le premier mouvement, est une homothétique de l'hodographe du premier mouvement; le centre d'homothétie est le centre des forces et le rapport d'homothétie est égal à k.

Les formules obtenues montrent que, si l'on sait déterminer la trajectoire et la loi du mouvement quand la force est

$$F = r f(r, \theta, v),$$

r, θ étant les coordonnées polaires, v la vitesse, on saura résoudre les mêmes questions pour la force

$$F = \frac{r}{f(v, \alpha, r)},$$

α étant l'angle de la vitesse avec l'axe polaire. Les trois lois de force centrale qui font toujours décrire au mobile une conique (Halphen et Darboux) fournissent un exemple de cette théorie.

Signalons encore ce résultat. On pourra déterminer par *quadratures* le mouvement d'un point soumis à une force centrale rentrant dans l'un des quatre types

$$f(r), \quad \frac{f(\theta)}{r^2}, \quad \frac{1}{r^2} f\left(a\cos\theta + b\sin\theta + \frac{c}{r}\right), \quad r f(ax^2 + 2bxy + cy^2)$$

ou dans l'un des quatre types correspondants

$$r f(v), \quad rv^3 f(\alpha), \quad rv^3 f\left(a\cos\alpha + b\sin\alpha + \frac{c}{r}\right), \quad r f(ax'^2 + 2bx'y' + cy'^2),$$

où a, b, c sont des constantes; r, θ, v et α ont les mêmes significations que plus haut.

Lucas (*Félix*). — Sur la généralisation du rapport anharmonique. (225-229).

L'auteur appelle *rapport anharmonique de quatre points,* non situés en ligne droite, le rapport anharmonique de leurs affixes : pour que ce rapport soit réel, il faut et il suffit que les quatre points forment un quadrilatère inscriptible.

Pour définir le rapport anharmonique de quatre droites non concourantes, on prendra leurs pôles relativement à une circonférence : le rapport anharmonique de ces pôles est indépendant du rayon de la circonférence, mais il dépend de la position du centre par rapport aux quatre droites.

En supposant les quatre droites tangentes à une même circonférence, pour que leur rapport anharmonique soit égal à -1, il faut et il suffit que les points d'intersection de chacun des couples T_1T_2 et T_3T_4 formés avec ces tangentes soient des points conjugués par rapport à la circonférence.

Landau (*E.*). — Sur quelques inégalités dans la théorie de la fonction $\zeta(s)$ de Riemann. (229-241).

L'auteur désigne par $O[g(t)]$ une fonction de t telle que son quotient par $g(t)$ reste compris pour $t=\infty$ entre deux limites finies.

Il commence par donner une nouvelle démonstration d'un théorème dû à M. Mellin : Si σ reste fixe et si t va à l'infini positif, on a

$$|\zeta(\sigma+ti)| = O(t^{1-\sigma}) \qquad \text{pour} \qquad 0<\sigma<1,$$
$$|\zeta(\sigma+ti)| = O(\log t) \qquad \text{pour} \qquad \sigma=1.$$

Il précise ensuite ce résultat en démontrant les relations suivantes :

$$|\zeta(s)| = O\left(t^{\frac{1}{2}-\frac{\sigma}{4}}\sqrt{\log t}\right) \qquad \text{pour} \qquad \sigma \leqq \frac{1}{2},$$
$$|\zeta(s)| = O\left(t^{\frac{3}{4}(1-\sigma)}\sqrt{\log t}\right) \qquad \text{pour} \qquad \frac{1}{2} \leqq \sigma < 1,$$

qu'il déduit d'un théorème récemment obtenu par M. Voronoï.

Dans la dernière partie de son travail, l'auteur considère la fonction appelée $Q(x)$, savoir le nombre des nombres $\leqq x$ qui ne contiennent chacun de leurs facteurs premiers qu'à la première puissance. On sait que le quotient

$$\frac{Q(x)-\dfrac{6}{\pi^2}x}{\sqrt{x}}$$

reste compris pour tout $x \geqq 1$ entre deux limites finies. M. Landau prouve que ce rapport tend vers zéro pour $x=\infty$.

De Séguier (*J.*). — Sur certains groupes d'ordre $p^m q^n$. (242-250).

Dans la recherche des groupes d'ordre $p^m q^n$ (p, q premiers) pour les premières valeurs de m et de n, un cas s'impose tout de suite à l'attention : c'est celui où le groupe considéré G contient normalement un g_{p^m} abélien principal A (terminologie adoptée par M. de Séguier dans ses *Éléments de la théorie des groupes abstraits*), aucun $e_{(q^n)}$ n'étant permutable à tout élément de A. C'est ce cas que l'auteur étudie d'abord lorsque les $g_{q^n}\{b\}$, $\{b'\}$, ... de G sont cycliques, m restant quelconque. La détermination de tous les types répondant à ces conditions dépend de la forme de la fonction caractéristique Δ de b (G s'exprimant immédiatement en groupes de substitutions linéaires). Elle est complètement effectuée pour certaines formes de Δ.

Un autre cas voisin du précédent est celui où A a la figure (1) (11...1). Alors G/D (D étant le central de A) rentre dans le cas précédent. Si le déterminant qui joue pour G/D le rôle de Δ est irréductible mod$p$, G n'a qu'un type, qui n'existe d'ailleurs que si m a la forme $2\nu+1$ et s'il y a un polynome irréductible de la forme $\theta^{2\nu} - a\theta^{\nu} - 1$ appartenant à l'exposant q^n.

L'auteur est amené à introduire les groupes abéliens et hypoabéliens de M. Jordan à l'aide du groupe des isomorphismes cogrédients de G.

Landau (*E.*). — Sur quelques théorèmes de M. Pétrovitch relatifs aux zéros des fonctions analytiques. (251-261).

Les théorèmes en question sont les suivants :

A. *Si l'on désigne par* λ *le plus petit module des zéros de la série*

$$(1)\qquad a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots \qquad (a_0 \neq 0)$$

et si l'on forme la fonction

$$u(z) = \left|\frac{1}{z^2}\right| \sum_0^{\infty} |a^n z^n|^2,$$

on aura

$$\lambda \geqq \frac{|a_0|}{\sqrt{u(z)}},$$

quelle que soit la valeur de la variable complexe z à l'intérieur du cercle de convergence de la série (1).

B. *Une fonction* $f(z)$, *holomorphe dans une circonférence* C *décrite autour de l'origine comme centre, ne s'annulant pas à l'origine, ne saurait avoir de zéro de module inférieur à l'expression* $\frac{|f(0)|}{M}$ *où* M *désigne la plus petite valeur que prend le module du rapport de la fonction majorante de* $f(z)$ *à la variable z pour les valeurs de z comprises à l'intérieur de la circonférence* C.

M. Landau commence par faire observer que le théorème B est presque évi-

dent. Ensuite il le précise en établissant l'inégalité

$$\lambda \geq \frac{|a_0| r}{M(r)},$$

où $M(r)$ désigne le maximum de $|f(z)|$ pour $|z| = r$.

Mais cette dernière inégalité est elle-même une conséquence presque immédiate d'un théorème de M. Jensen, qui s'énonce comme suit dans le cas des fonctions $f(z)$ régulières pour $|z| \leq r$ et différentes de zéro pour $z = 0$:

Si $z_1, z_2, \ldots, z_k$ sont les zéros de la fonction dont le module ne surpasse pas r, on a

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|f(z)|\, d\varphi = \log\left|\frac{f(0)\, r^k}{z_1 z_2 \ldots z_k}\right|,$$

z parcourant la circonférence $re^{i\varphi}$.

Il y a plus. Non seulement l'inégalité relative à λ résulte du théorème de M. Jensen, mais le théorème A lui-même est contenu dans celui de M. Jensen.

En terminant l'auteur indique une démonstration directe et très élémentaire du théorème A.

Baire, Borel, Hadamard, Lebesgue. — Cinq lettres sur la théorie des ensembles. (261-273).

Lebesgue (H.). — Sur le problème des aires. (273-274).

Rectification à une Note antérieure, publiée sur le même sujet en 1902, dans le *Bulletin de la Société mathématique* (t. XXXI, p. 197).

L. R.



ANNALI DI MATEMATICA PURA ED APPLICATA,
diretti del prof. F. Brioschi. Serie II^a (1).

Tome XV, 1887-1888.

Martinetti (V.). — [Q4a]. Sur les configurations planes μ_3. (1-26).

---

(1) Voir *Bulletin*, t. XII_2, p. 157.

Méthode pour déduire toutes les configurations μ_3 lorsqu'on connaît toutes les $(\mu - 1)_3$. Application à la recherche des 11_3.

Sabinine (*G.*). — [R6*b*]. Sur les considérations d'Ostrogradsky et de Jacobi relatives au principe de la moindre action. (27-51).

En supposant que la fonction Π ne contienne pas explicitement le temps, l'intégrale

$$(1) \qquad \int_{t_0}^{t_1} (\Pi + \mathrm{T})\, dt$$

a un minimum, pourvu que l'on regarde comme données les positions initiale et finale du système et que les variations de t relatives aux limites t_0, t_1 soient égales.

C'est ce théorème qu'Ostrogradsky propose de substituer au principe de la moindre action établi par Lagrange, avec quelque inexactitude, dans sa *Mécanique analytique*. Jacobi propose de substituer à ce principe un théorème qu'il donne dans ses *Vorlesungen über Dynamik*, p. 45.

L'auteur démontre le théorème d'Ostrogradsky, et des conditions de minimum absolu de l'intégrale (1) il déduit les équations du mouvement. Puis il résout le problème suivant :

Parmi toutes les x, y, z, fonctions de t qui satisfont à l'équation de condition

$$\Pi - \mathrm{T} = h,$$

la constante h conservant la même valeur, trouver celles qui rendent l'intégrale

$$\int_{t_0}^{t_1} (\Pi + \mathrm{T})\, dt$$

minimum pour toutes les valeurs de t comprises entre t_0 et t_1, répondant aux deux positions données du système.

Enfin il expose le théorème de Jacobi, en montrant que dans la conclusion de Jacobi il y a une inexactitude parfaitement analogue à celle que Bertrand a signalée dans la *Mécanique analytique* de Lagrange.

En français.

Pirondini (*G.*). — [O3*j*]. Sur la similitude des courbes. (53-66).

Torelli (*G.*). — [C2*d*]. Quelques formules relatives aux intégrales elliptiques. (67-71).

Étant

$$x' = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi\, F(\varphi, k')\, \frac{d\varphi}{\Delta^2(\varphi, k')},$$

$$x'_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi\, E(\varphi, k')\, \frac{d\varphi}{\Delta^2(\varphi, k')},$$

$$\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi\, F(\varphi, k)\, \frac{d\varphi}{\Delta(\varphi, k)},$$

$$\theta_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi\, E(\varphi, k)\, \frac{d\varphi}{\Delta(\varphi, k)},$$

$$\varepsilon = \int_0^{\frac{\pi}{2}} F(\varphi, k)\, d\varphi, \qquad \varepsilon_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} E(\varphi, k)\, d\varphi,$$

on a

$$\int K\, dk = (1 - \theta_1)^k K + \theta k E + \text{const.},$$

$$\int K \frac{dk}{k} = \left[-k'(x' - x'_1) + \varepsilon_1 - (1 - k') + \frac{1}{2} l \frac{1 - k'}{1 + k'} \right] K - (k'x' - \varepsilon) E + \frac{\pi}{4} l \frac{1 - k'}{1 + k} + \text{const.},$$

et deux autres formules analogues pour $\int K'\, dk$, $\int K' \frac{dk}{k}$. La réduction des intégrales $\int k^m K\, dk$, $\int k^m K'\, dk$ à celles de ces quatre formules avait été faite par l'auteur dans le *Giornale di Battaglini*, Vol. XI, 1873, p. 17.

Vanecek (*J.-S.* et *M.-N.*). — [N₄2]. Contact des faisceaux de surfaces (*suite et fin*). (73-114).

Théorèmes d'énumération relatifs au contact des surfaces appartenant à un système simplement ou doublement infini et d'*indice* quelconque. En français.

Del Pezzo (*P.*). — [Q2]. Sur les surfaces et les variétés des espaces à plusieurs dimensions, dont les sections sont des courbes normales de genre *p*. (115-126).

Une surface, non réglée, telle qu'elle est mentionnée dans le titre, est appelée par l'auteur une surface *normale de* $p^{\text{ième}}$ *espèce*. Des propriétés qu'il trouve il déduit que les F_2^m (surfaces de l'ordre m) d'un espace S_{m-p+1}, pour m dépassant une certaine limite $2p + a + 1$, sont toujours réglées. Enfin, il applique les résultats obtenus pour les surfaces, aux variétés quelconques.

Ricci (*G.*). — [C4*d*ref. O6*p*]. Sur les systèmes d'intégrales indépendants d'une équation linéaire homogène aux dérivées partielles du premier ordre. (127-159).

On cherche la condition nécessaire et suffisante pour qu'une équation

$$(1) \qquad \sum y_r \frac{\partial \psi}{\partial x_r} = 0$$

ait $n-2$ intégrales indépendantes $\rho_2, \ldots, \rho_{n-1}$, ayant avec une autre intégrale ρ_1 de la même équation les relations

$$\sum_{rs} c_{rs} \frac{\partial \rho_1}{\partial x_r} \frac{\partial \rho_h}{\partial x_s} = 0 \qquad (h = 2, \ldots, n-1),$$

où

$$c_{rs} = \frac{d \log a}{d a_{rs}} \qquad \text{et} \qquad \sum a_{rs}\, dx_r\, dx_s = \varphi^2,$$

c'est-à-dire pour que les intégrales $\rho_2, \ldots, \rho_{n-1}$ soient orthogonales à ρ_1 dans l'espace dont φ est l'élément linéaire. Cette condition est que, $\Xi_{0h}, \Xi_{1h}, \ldots, \Xi_{nh}$ étant $n+1$ quantités satisfaisant au système

$$(2) \qquad \begin{cases} \displaystyle\sum_{r=1}^{n} Y_r \Xi_{rh} = 0, \\ \displaystyle Y_s \Xi_{0h} + \sum_{r=1}^{n} (Y_{rs} + \omega_h c_{rs}) \Xi_{rh} = 0, \end{cases}$$

où

$$2 Y_{rs} = \sum_t \left(c_{st} \frac{\partial Y_r}{\partial x_t} + c_{rt} \frac{\partial Y_s}{\partial x_t} - c_{rs} Y_t \right),$$

et ω_h est une des $n-1$ racines, toujours réelles, de l'équation

$$(3) \qquad \begin{vmatrix} 0 & Y_1 & Y_2 & \ldots & Y_n \\ Y_1 & Y_{11} + \omega c_{11} & Y_{12} + \omega c_{12} & \ldots & Y_{1n} + \omega c_{1n} \\ Y_2 & Y_{21} + \omega c_{21} & Y_{22} + \omega c_{22} & \ldots & Y_{2n} + \omega c_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ Y_n & Y_{n1} + \omega c_{n1} & Y_{n2} + \omega c_{n2} & \ldots & Y_{nn} + \omega c_{nn} \end{vmatrix} = 0,$$

les équations aux différentielles totales

$$\sum_r \Xi_{rh}\, dx_r = 0 \qquad \begin{pmatrix} h = 1, 2, \ldots, n-1 \\ r = 1, 2, \ldots, n \end{pmatrix}$$

soient toutes intégrables au moyen d'une seule équation primitive $\rho_h = \text{const.}$, c'est-à-dire que les Ξ_{rh} pour h quelconque, et $r = 1, 2, \ldots, n$, soient proportionnelles aux dérivées d'une même fonction ρ_h.

Les racines de l'équation (3) ne dépendent que de l'équation différentielle donnée et de la forme φ^2, et nullement du choix des coordonnées; l'auteur

l'appelle l'*équation algébrique caractéristique de l'équation donnée.* Les conditions données plus haut sont relatives au cas où toutes les racines de (3) sont différentes. Ces conditions peuvent s'exprimer analytiquement par la vérification identique des équations

$$(4)\qquad \sum_{rs}\left(Y_s\frac{\partial H_{rh}}{\partial x_s}-H_{sh}\frac{\partial Y_r}{\partial x_s}\right)\Xi_{rk}=0,$$

$$(5)\qquad \sum_{rs}\left(H_{sh}\frac{\partial H_{rk}}{\partial x_s}-H_{sk}\frac{\partial H_{rh}}{\partial x_s}\right)\Xi_{ri}=0,$$

étant h et k des valeurs différentes prises entre $1, 2, \ldots, n-1$, et

$$H_{sh}=\sum_t c_{st}\Xi_{th}.$$

L'auteur donne aussi d'autres formes pour les équations (4), (5), d'où il résulte que les premiers membres sont des expressions *invariables*, et que le nombre des (4) est $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$, et celui des (5) est $\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{2}$.

Lorsque l'équation caractéristique a des racines multiples, les conditions pour l'existence de $n-1$ intégrales orthogonales sont que, ayant déterminé pour toute racine m_h-uple ω_h, m_h systèmes indépendants de solutions Ξ_{rh_i} des équations (2), et ayant posé

$$H_{rh_i}=\sum_s c_{rs}\Xi_{sh_i},$$

les systèmes qui résultent de l'équation (1) et de l'un quelconque des systèmes

$$\sum_r H_{rh_i}\psi^{(r)}=0 \qquad (i=1, 2, \ldots, m_h)$$

soient complets; et soient aussi complets les systèmes qui résultent de la (1) et de deux quelconques de ces systèmes. Lorsque ces conditions, dont l'auteur donne aussi une expression analytique, sont satisfaites, les intégrales orthogonales ne sont pas complètement déterminées; elles se divisent en groupes, correspondant aux groupes de racines égales, et dans chaque groupe le choix des intégrales peut se faire d'un nombre infini de manières.

Si l'on pose

$$Y_i=\sum_h c_{ih}X_h,$$

et l'on suppose que les X_r soient proportionnelles aux dérivées $\rho^{(h)}$ d'une même fonction ρ, le problème revient à celui de déterminer les conditions pour que, dans la variété dont φ est l'élément linéaire, le système $\rho=$ const. appartienne à un système n-uple orthogonal, et de trouver les paramètres des autres $n-1$ systèmes. L'auteur traite ce problème en général, et puis en fait l'application au cas de $n=3$.

Bianchi (*L.*). — [N_2 1 ref. O 6 *g*]. Sur les systèmes doublement infinis de rayons. (161-172).

Étude des congruences au point de vue de la Géométrie infinitésimale. Tout rayon r est rencontré par deux de ceux qui lui sont infiniment rapprochés; les deux points de rencontre sont appelés *foyers;* les deux plans déterminés par r et les deux rayons mentionnés, respectivement, sont des *plans focaux*. Les pieds des normales communes à r et à chacun des rayons infiniment rapprochés, forment sur r un segment dont les extrémités sont appelées *points limites,* et dont le milieu est le même que celui des foyers. Le lieu des foyers est formé par deux surfaces (*focales*), et sur chacune de ces surfaces les courbes enveloppées par les rayons de la congruence s'appellent *lignes caustiques*. L'inclinaison de la normale principale d'une caustique sur le plan tangent à la surface focale est égale à l'angle des deux plans focaux qui passent par la tangente à la caustique; et de cela l'auteur déduit la construction des congruences à foyers réels, pour lesquelles l'angle des plans focaux est constant. Puis il démontre que dans une congruence où soient constantes la distance des foyers et celle des points limites, les surfaces focales sont des surfaces pseudo-sphériques dont le rayon est égal à la distance des points limites. Il prouve de la manière suivante qu'il y a effectivement de ces congruences, qu'il appelle *pseudo-sphériques*. Il prend une surface pseudo-sphérique S de rayon R, rapportée à ses lignes de courbure u, v, dont l'élément linéaire est

$$ds^2 = \cos^2\theta\, du^2 + \sin^2\theta\, dv^2,$$

θ satisfaisant à l'équation

$$(1)\qquad \frac{\partial^2\theta}{\partial u^2} - \frac{\partial^2\theta}{\partial v^2} = \frac{\sin\theta\cos\theta}{R^2},$$

et il détermine chaque rayon de la congruence par le point (u, v) de S d'où il sort et par l'angle φ que ce rayon fait avec la direction positive des lignes $v = \text{const.}$, les équations pour φ sont

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial\varphi}{\partial u} + \frac{\partial\theta}{\partial v} &= \frac{\sin\varphi\cos\theta + \sin\sigma\cos\varphi\sin\theta}{R\cos\sigma},\\ \frac{\partial\varphi}{\partial v} + \frac{\partial\varphi}{\partial u} &= -\frac{\cos\varphi\sin\theta - \sin\sigma\sin\varphi\cos\theta}{R\cos\sigma},\end{aligned}\right.$$

σ étant le complément de l'angle (constant) des deux plans focaux; les (2) en conséquence de (1) admettent une intégrale commune φ renfermant une constante arbitraire, qui est aussi une solution de (1), c'est-à-dire que l'on a

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial v^2} = \frac{\sin\varphi\sin\varphi}{R^2}.$$

Les (2) coïncident avec les formules que l'auteur a données dans son Mémoire : *Sopra i sittemi tripli ortogonali di Weingarten* (*voir* ces *Annali*, t. XIII, p. 177) et qui lui ont servi à définir une transformation de Bäcklund à constante σ pour les surfaces pseudosphériques. Par cela : les deux surfaces focales d'une congruence pseudosphérique sont déduites l'une de l'autre par une transformation de Bäcklund.

Enfin l'auteur recherche les congruences pseudosphériques renfermées dans un complexe, dans le cas que le complexe soit formé par des rayons rencontrant une courbe donnée, et que cette courbe soit un lieu de foyers de la congruence.

c'est-à-dire la dégénération d'une surface focale. Une telle congruence ne peut être formée que par les tangentes aux sections méridiennes d'une hélicoïde de Dini où à celles d'une pseudosphère.

La recherche générale est faite ici pour le complexe linéaire, et l'auteur trouve que ce complexe renferme ∞^1 congruences pseudosphériques.

Krause (*M.*). — [G3*a*]. Sur quelques relations différentielles relatives aux fonctions théta à deux variables. (173-185).

Équations auxquelles satisfont les multiplicateurs M_0, M_1, M_2, M_3 considérés comme fonctions des modules primitifs χ^2, λ^2, μ^2, ou des modules transformés c^2, l^2, m^2. Ces équations sont de deux catégories. Celles de l'une sont du premier ordre et peuvent se déduire immédiatement du système

$$u'_1 = M_0 u_1 + M_1 u_2,$$
$$u'_2 = M_2 u_1 + M_3 u_2.$$

u_1, u_2 étant les arguments primitifs et u'_1, u'_2 les arguments transformés. La déduction de celles de l'autre catégorie présente plus de difficultés.

En allemand.

Krause (*M.*). — [G1*c*]. Sur les intégrales hyperelliptiques de la deuxième et la troisième espèce. (187-208).

Comme les fonctions hyperelliptiques ordinaires peuvent se déduire des fonctions théta, on peut fonder la théorie des intégrales hyperelliques de la deuxième et de la troisième espèce sur celle de certaines fonctions que l'on déduit immédiatement des fonctions théta, à savoir

$$\frac{\partial \log \mathfrak{S}_a(v_1, v_2)}{\partial v_1}, \quad \frac{\partial \log \mathfrak{S}_a(v_1, v_2)}{\partial v_2},$$

$$v_1 \frac{\partial \log \mathfrak{S}_a(w_1, w_2)}{\partial w_1} + v_2 \frac{\partial \log \mathfrak{S}_a(w_1, w_2)}{\partial w_2} + \frac{1}{2} \log \frac{\mathfrak{S}_a(v_1 - w_1, v_2 - w_2)}{\mathfrak{S}_a(v_1 + w_1, v_2 + w_2)}.$$

En allemand.

Sadun (*E.*). — [I12*b*]. Sur la résolution en nombres positifs, entiers ou nuls, des équations

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_n = r,$$
$$\lambda_1 + 2\lambda_2 + n\lambda_n = n.$$

(209-221).

La résolution de ce système se présente dans la formule qui donne la $n^{\text{ième}}$ dérivée d'une fonction de fonction, car, étant $y = y(n)$ avec $u = u(n)$, on a

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \sum^{n} y^{(r)}(n) P_r.$$

étant

$$P_r = \sum C u'^{\lambda_1} u''^{\lambda_2} \ldots u^{n\,\lambda_n},$$

où les λ_i satisfont au système considéré par l'auteur. Ce système trouve aussi son application dans la théorie des fonctions symétriques des racines d'une équation algébrique.

L'auteur trouve l'expression du nombre $s(n, r)$ des solutions. Voici les valeurs des premiers de ces nombres, $\left[\frac{m}{p}\right]$ étant le plus grand nombre entier contenu en $\frac{m}{p}$,

$$s(n, 1) = 1,$$

$$s(n, 2) = \left[\frac{n}{2}\right],$$

$$s(n, 3) = \left[\frac{n}{3}\right] + \sum_{t=1}^{t=\left[\frac{n}{3}\right]} \left[\frac{n-3t}{2}\right],$$

$$s(n, 4) = \left[\frac{n}{4}\right] + \sum_{t'=1}^{t'=\left[\frac{n}{4}\right]} \left[\frac{n-4t'}{2}\right] + \sum_{t'=1}^{t'=\left[\frac{n}{4}\right]} \left[\frac{n-4t'}{3}\right] + \sum_{t'=1}^{t'=\left[\frac{n}{4}\right]} \sum_{t'=1}^{t=\left[\frac{n-4t'}{3}\right]} \left[\frac{n-4t'-3t}{2}\right].$$

Casorati (*F.*). — [D5*a*, *b*]. Sur les *coupures* de M. Hermite, les *Querschnitte* et les surfaces de Riemann, et les notions d'intégration autant réelle que complexe. (223-234). (*A suivre.*)

Exposition des notions relatives à la surface de Riemann, dans le but d'en favoriser la diffusion et de répondre aux doutes que Briot et Bouquet avaient manifestés sur l'utilité de la surface de Riemann dans la préface à la deuxième édition de leur *Traité des fonctions elliptiques*.

Voir la suite dans le Tome XVI, page 1.

Brioschi (*F.*). — [B8*c*]. Études sur les formes ternaires. (235-252).

Recherche de certaines formes invariantives et de leurs relations, pour une forme ternaire de l'ordre n. En particulier, l'auteur considère les formes

$$k = \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} & h_1 \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} & h_2 \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} & h_3 \\ h_1 & h_2 & h_3 & 0 \end{vmatrix}, \qquad x = \begin{vmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} & f_1 \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} & f_2 \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} & f_3 \\ f_1 & f_2 & f_3 & 0 \end{vmatrix},$$

$$t = \begin{vmatrix} f_1 & f_2 & f_3 \\ h_1 & h_2 & h_3 \\ k_1 & k_2 & k_3 \end{vmatrix}, \qquad P = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ \frac{\partial k}{\partial h_1} & \frac{\partial k}{\partial h_2} & \frac{\partial k}{\partial h_3} \\ \frac{\partial \varkappa}{\partial f_1} & \frac{\partial \varkappa}{\partial f_2} & \frac{\partial \varkappa}{\partial f_3} \end{vmatrix}.$$

f étant la forme fondamentale, h sa hessienne, et les indices étant des signes de dérivation par rapport aux variables x_1, x_2, x_3.

Christoffel (*E.-B.*). — [I1]. Propositions sur les propriétés arithmétiques des nombres irrationnels. (253-276).

Étant j un nombre quelconque, et n un nombre entier, on a

$$nj = G(n) + (nj),$$

en indiquant par $G(n)$ le plus grand entier contenu en nj et par (nj) le reste. Lorsque j est irrationnel, nj n'est jamais (quel que soit n) égal à zéro. En posant

$$G(n+1) - G(n) = g_n,$$

on a aussi

$$j + (nj) - [(n+1)j] = g_n,$$

et les g_n ne peuvent être égaux qu'à 0 ou à 1. La succession de ces nombres g_n est ce que l'auteur appelle la *caractéristique* du nombre j, et elle peut remplacer le nombre j même, et servir pour le calcul approché de ce nombre, car on a

$$\frac{G(n)}{n} < j < \frac{1 + G(n)}{n}$$

et $G(n) = g_1 + g_2 + \ldots + G_{n-1}$. L'auteur expose des propriétés remarquables de la caractéristique, et montre les relations qu'elle a avec le développement d'un nombre irrationnel en fraction continue.

Jung (*G.*). — [M$_1$1*f*]. Recherches sur les systèmes linéaires de courbes algébriques de genre quelconque. (277-312).

Détermination des systèmes linéaires généraux d'ordre minimum, de genre donné p et de degré donné k. Les systèmes se divisent en familles, suivant qu'ils peuvent ou non se déduire les uns des autres par des transformations Crémona. Entre ceux d'une même famille il y en a un d'ordre minimum, et ce système n'a pas de courbes fondamentales, exception faite pour le cas où il y a deux seuls points fondamentaux, dont la somme des multiplicités est égale à l'ordre du système. L'auteur donne une propriété invariante pour les systèmes d'une même famille, qui consiste en ce que la différence entre le nombre des points fondamentaux (arbitraires) et le nombre des points fondamentaux (*excès*) est constante. Il classifie les systèmes d'ordre minimum en *monomes* (un point fondamental multiple), *binomes* (deux points fondamentaux multiples) et *trinomes* (trois points fondamentaux multiples). Après il étudie les systèmes spéciaux (où les points fondamentaux ne sont pas indépendants). Enfin il assigne les systèmes d'ordre minimum des genres $p = 0, 1, 2, 3, 4$.

Un Mémoire du même auteur, faisant suite à celui-ci, se trouve dans le Tome XVI, à la page 291.

Cesàro (*E.*). — [O2ref.Q2]. Sur l'analyse barycentrique des courbes. (313-323).

L'auteur se propose de montrer comment l'emploi des formules de la Géométrie intrinsèque permet au calcul barycentrique « de pénétrer au cœur même des questions avec une étonnante facilité », et il traite par cette méthode des questions relatives aux courbes dans un espace quelconque.

Tome XVI, 1888-1889.

Casorati (*F.*). — [D5*a*, *b*]. Sur les coupures de M. Hermite, les *Querschnitte* et les surfaces de Riemann, et les notions d'intégration autant réelle que complexe (*suite*). (1-20). (*A suivre.*)

Suite du Mémoire inséré au Tome XVI, page 223.

Exposition de l'emploi de la surface riemannienne pour la représentation d'une fonction définie par une intégrale

$$\Phi(z) = \int_{t_0}^{t_1} \frac{F(t, z)}{G(t, z)}\, dt,$$

F et G étant rationnelles et entières.

Maggi (*A.*). — [T3*b*]. Sur la propagation libre et perturbée des ondes lumineuses dans un milieu isotrope. (21-48).

Les déplacements du milieu élastique sont donnés par

$$u = \frac{\partial V_2}{\partial z} - \frac{\partial V_3}{\partial y}, \qquad v = \frac{\partial V_3}{\partial x} - \frac{\partial V_1}{\partial z}, \qquad w = \frac{\partial V_1}{\partial y} - \frac{\partial V_2}{\partial x},$$

V_1, V_2, V_3 étant trois solutions de l'équation

$$(1) \qquad \frac{d^2 V}{dt^2} = a^2 \Delta_2 V.$$

Dans l'hypothèse qu'il y ait dans le milieu une source lumineuse et des corps quelconques, par exemple des corps obscurs, le problème se réduit à trouver des intégrales de (1) prenant des valeurs déterminées sur les surfaces qui limitent le champ occupé par le milieu. Le problème déjà étudié par Kirchhoff [*Zur Theorie der Lichtstrahlen* (*Sitzungsbericht d. Berl. Akad.*, 1882)] est ici repris par l'auteur.

La fonction V s'exprime par une intégrale étendue à la surface σ du champ

$$\int \Omega \, d\sigma,$$

étant

$$\Omega = \frac{\partial \dfrac{\varphi\left(t - \dfrac{r}{a}\right)}{r}}{\partial n} - \frac{f\left(t - \dfrac{r}{a}\right)}{r},$$

$$r = \sqrt{(x_0 - x)^2 + (y_0 - y)^2 + (z_0 - z)^2}.$$

$\varphi(t)$ [abréviation pour $\varphi(x, y, z, t)$] une fonction qui, dans la région limitée par σ, satisfait à l'équation (1), et

$$f(t) = \frac{d\varphi(t)}{dn}, \qquad \frac{\partial}{\partial n} = \frac{d}{dr}\frac{dr}{dn};$$

lorsque le point (x_0, y_0, z_0) n'appartient pas à la région limitée par σ, on a

$$\int \Omega\, d\sigma = 0,$$

et, lorsqu'il y appartient, on a

$$\int \Omega\, d\sigma = 4\pi\,\varphi(t, x_0, y_0, z_0).$$

Dans le paragraphe II, l'auteur fait l'étude de cette intégrale, ayant particulièrement en vue l'application au cas des ondes sphériques dans un milieu occupé par des corps noirs, et en supposant que la surface σ soit limitée par un contour. Il transforme l'intégrale en une intégrale linéaire étendue au contour de la surface, en employant des coordonnées qu'il appelle *sphéroïdiques,* et qui sont analogues aux coordonnées elliptiques dans le plan. Cette transformation est fondée sur un théorème de Stokes qui donne la transformation

$$\begin{aligned}\int\Bigg[\left(\frac{d\pi_3}{dq_2} - \frac{d\pi_2}{dq_3}\right)\frac{Q_1}{Q_2 Q_3}\frac{dq_1}{dn} &+ \left(\frac{d\pi_1}{dq_3} - \frac{d\pi_3}{dq_1}\right)\frac{Q_2}{Q_3 Q_1}\frac{dq_2}{dn}\\ &+ \left(\frac{d\pi_2}{dq_1} - \frac{d\pi_1}{dq_2}\right)\frac{Q_3}{Q_1 Q_2}\frac{dq_3}{dn}\Bigg]d\sigma\\ = \pm\int(\pi_1\, dq_1 + \pi_2\, dq_2 + \pi_3\, dq_3),&\end{aligned}$$

q_1, q_2, q_3 étant des coordonnées orthogonales quelconques, pour lesquelles

$$ds^2 = Q_1^2\, dq_1^4 + Q_2^2\, dq_2^2 + Q_3^2\, dq_3^2;$$

et dans le paragraphe III l'auteur démontre le théorème de Stokes pour des coordonnées quelconques. Dans le paragraphe IV et dernier, il traite le problème de la propagation des ondes sphériques lumineuses dans un milieu contenant un corps noir, et de la formation de l'ombre.

Betazzi (*R.*). — [J5]. Sur une correspondance entre un groupe de points et un continuum, tous les deux linéaires. (49-60).

On dit qu'un intervalle *comprend* un groupe lorsqu'il est le plus petit des intervalles renfermant le groupe. Deux points du groupe forment une *succession,* lorsqu'ils se suivent sans qu'il y ait entre eux aucun autre point du groupe. En un point du groupe il y a une *lacune,* lorsque ce point n'appartient pas au groupe, et il en est un point limite à droite et à gauche. Entre les points x_1 et x_2 ($x_1 < x_2$) il y a un *saut absolu* lorsque ces points n'appartiennent pas au

groupe, x_1 en est un point limite à gauche, x_2 à droite, et il n'y a pas de points du groupe entre eux.

Cela posé, M. Bettazzi démontre que :

La condition nécessaire et suffisante pour qu'un continuum linéaire X puisse se représenter univoquement sur un groupe P de manière que deux points de X et leurs correspondants de P aient la même position relative, est que P n'ait pas de successions, ni de lacunes, ni de sauts absolus, et qu'il contienne les extrêmes de l'intervalle qui le comprend.

Pirondini (*G.*). — [O5$m\alpha$ref. O5i]. Théorème relatif aux lignes de courbure des surfaces, et applications. (61-84).

Étant

$$ds^2 = \mathrm{E}\,du^2 + \mathrm{G}\,dv^2$$

l'élément linéaire d'une sphère de rayon unité, les équations

$$x_1 = x + \mathrm{H}\cos a - \frac{1}{\sqrt{\mathrm{E}}}\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial u}\cos a' - \frac{1}{\sqrt{\mathrm{G}}}\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial v}\cos a'',$$

$$y_1 = y + \mathrm{H}\cos b - \frac{1}{\sqrt{\mathrm{E}}}\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial u}\cos b' - \frac{1}{\sqrt{\mathrm{G}}}\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial v}\cos b'',$$

$$z_1 = z + \mathrm{H}\cos c - \frac{1}{\sqrt{\mathrm{E}}}\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial u}\cos c' - \frac{1}{\sqrt{\mathrm{G}}}\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial v}\cos c'',$$

H satisfaisant à l'équation

$$\frac{\partial^2 \mathrm{H}}{\partial u\,\partial v} = \frac{\partial \mathrm{H}}{\partial u}\frac{\partial}{\partial v}\log\sqrt{\mathrm{E}} + \frac{\partial \mathrm{H}}{\partial v}\frac{\partial}{\partial u}\log\sqrt{\mathrm{G}},$$

et $\cos a$, $\cos b$, $\cos c$ étant les cosinus de la normale, $\cos a'$, $\cos b'$, $\cos c'$ et $\cos a''$, $\cos b''$, $\cos c''$ ceux des tangentes aux lignes $v =$ const. et $u =$ const., donnent les coordonnées d'un point quelconque d'une surface dont les lignes $u =$ const., $v =$ const. sont les lignes de courbure, et ont pour images sphériques les lignes coordonnées de la sphère.

Ce théorème permet de trouver des surfaces dont les lignes de courbure ont des propriétés particulières.

Pascal (*E.*). — [B5a]. Sur certains covariants des systèmes de deux quartiques et de deux quintiques. (85-99).

Soient

$$f = a_n x_1^n + \ldots,$$
$$\varphi = \alpha_n x_1^n + \ldots$$

deux formes binaires de même ordre, et

$$\mathrm{F} = \frac{f\varphi^n - \varphi f^n}{(xy)^n} = r_x^{n-1} s_y^{n-1} = r_{1x}^{n-1} s_{1x}^{n-1} = \ldots$$

la fonction symétrique de Cayley; alors le résultant de f et φ, comme Gordan

l'a montré, peut se mettre sous la forme

$$R = \prod_{ik} (r_i - r_k)(s_i - s_k) \qquad (i, k = 0, 1, \ldots, n-1),$$

et peut aussi s'exprimer par des composés (Ueberschiebungen) des deux formes f, φ.

Lorsque f et φ ont deux racines communes on doit avoir

$$\delta R = 0;$$

de même, si elles ont trois racines communes, il est

$$\delta^2 R = 0, \qquad \ldots.$$

Ces conditions se transforment dans l'évanouissement identique de certains covariants

$$\Theta = \prod_{ik} (r_i r_k)(s_i s_k) r_{i_x} s_{i_x} \qquad (i, k = 0, 1, \ldots, n-2),$$

$$\Phi = \prod_{ik} (r_i r_k)(s_i s_k) r_{i_x} r_{i_y} s_{i_x} s_{i_y} \qquad (i, k = 0, 1, \ldots, n-3),$$

qui peuvent s'exprimer par des composés, et conséquemment au moyen des invariants fondamentaux.

Somigliana (*C.*). — [T2ref.Q1]. Sur la dilatation cubique d'un corps élastique isotrope dans un espace de courbure constante. (101-113).

La dilatation cubique s'exprime par des intégrales étendues à l'espace considéré et par d'autres étendues à la surface.

Soient q_1, q_2, q_3 des coordonnées orthogonales quelconques, pour lesquelles

$$ds^2 = Q_1^2 dq_1^2 + Q_2^2 dq_2^2 + Q_3^2 dq_3^2;$$

ρ, η, ζ des coordonnées polaires;

h_1, h_2, h_3 les composantes du déplacement au point $(q_1 q_2 q_3)$ de l'espace S, suivant les lignes coordonnées, et h_n le déplacement suivant la normale;

F_1, F_2, F_3 les composantes de la force appliquée à ce point;

L_1, L_2, L_3 celles de la force appliquée à un point de la surface σ;

α la courbure de l'espace;

Θ la dilatation cubique;

a et b des constantes, et

$$\varphi = \sqrt{\alpha} \frac{\cos \rho \sqrt{\alpha(1+c)}}{\sin \rho \sqrt{\alpha}}$$

avec $c = \frac{4b}{a}$, on a

$$-4\pi a\Theta = \int_S \Sigma_i \frac{F_i}{Q_i}\frac{\partial\varphi}{\partial q_i}\,dS + \int_\sigma \Sigma_i \frac{L_i}{Q_i}\frac{\partial\varphi}{\partial q_i}\,d\sigma + 4\alpha b\left(1+\frac{2b}{a}\right)\int_\sigma \varphi h_n\,d\sigma$$
$$+2b\int_\sigma \Sigma_i h_i \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{Q_i}\frac{\partial\varphi}{\partial q_i}\right)d\sigma + b\int_\sigma \Sigma_{is}\frac{h_i}{Q_i Q_s^2}\frac{\partial\varphi}{\partial q_s}\left\{\frac{\partial Q_i^2}{\partial q_s}\frac{\partial q_i}{\partial n} - \frac{\partial Q_s^2}{\partial q_i}\frac{\partial q_s}{\partial n}\right\}d\sigma.$$

Vivanti (*G.*). — [H2*c* ε ref. H5*b*]. Sur les fonctions définies par une équation différentielle algébrique du premier ordre. (114-136, 1 planche).

L'équation

$$(1) \qquad f_0(w, z)\left(\frac{dw}{dz}\right)^m + f_1(w, z)\left(\frac{dw}{dz}\right)^{m-1} + \ldots + f_m(w, z) = 0,$$

les f_i étant des fonctions rationnelles entières, donne par résolution

$$(2) \qquad \frac{dw}{dz} = \varphi_1(w, z), \qquad \ldots, \qquad \frac{dw}{dz} = \varphi_m(w, z),$$

où les φ_i sont des fonctions algébriques. L'auteur étudie la manière dont les intégrales des (2)

$$w = F_1(z), \qquad \ldots, \qquad w = F_m(z)$$

dépendent des coefficients de la (1). Il distingue trois cas :

I. Les f_i renferment la seule z;
II. La seule w;
III. Les deux variables.

Dans le premier les fonctions w sont des intégrales abéliennes, et l'auteur indique, par autant de théorèmes, les degrés des intégrales rationnelles entières, ainsi que le nombre des intégrales fractionnaires, et une limite supérieure pour le degré de leurs dénominateurs, et les degrés des intégrales fractionnaires de degré négatif; tout cela en rapport avec les degrés des coefficients de (1) relativement à z.

Dans le second cas les w sont des fonctions inverses d'intégrales abéliennes.

Dans le troisième, l'intégrale (1) ne peut être ni une intégrale abélienne, ni une fonction inverse d'une telle intégrale, et l'auteur donne la condition afin qu'elle soit une fonction algébrique d'une intégrale abélienne.

Suit l'examen d'un cas particulier, où l'intégration de (1) conduit à une fonction à un nombre infini de valeurs, qu'il étudie par une méthode analogue à celle employée par Casorati pour les fonctions obtenues par l'inversion des fonctions abéliennes (*Acta Mathematica*, Bd. VIII).

Pirondini (*G.*). — [O6*a*]. Étude sur les surfaces hélicoïdales (137-177).

Sur deux hélicoïdes applicables, les sections normales à l'axe sont des courbes correspondantes en applicabilité alors et alors seulement qu'ils sont développables. Un hélicoïde réglé peut toujours se déformer en un autre, et d'un nombre infini de manières.

Équations du profil méridien d'un hélicoïde engendré par une courbe donnée. Lignes qui, par un mouvement hélicoïdal donné, engendrent un même hélicoïde, dont elles forment les deux systèmes de lignes de courbure. Même recherche pour le cas où les deux lignes doivent rester des géodésiques, dans le mouvement. Détermination des hélicoïdes dont les trajectoires orthogonales des profils méridiens sont des courbes sphériques ayant le centre sur l'axe. Ceux-ci sont des hélicoïdes de Dini. Sur ces hélicoïdes les lignes de courbure sphériques sont des loxodromies, et l'on a

$$p = -a \tang i,$$

p étant le paramètre du mouvement hélicoïdal, a le rayon de la sphère et i l'angle sous lequel la loxodromie coupe les parallèles. Suivent des propriétés relatives à la courbure des hélicoïdes, et à la courbure géodésique d'une ligne tracée par une telle surface

Cesàro (*E.*). — [I1*c*]. Sur une proposition de la théorie asymptotique des nombres (178-180).

Réponse à une objection que M. Jensen avait faite relativement à la proposition

$$\lim \frac{\varphi(1)+\varphi(2)+\ldots+\varphi(n)}{n^2} = \frac{3}{\pi^2}.$$

A cette occasion il énonce deux théorèmes généraux, dont voici le premier :

Le nombre des diviseurs de n, doués d'une certaine propriété, est asymptotique au logarithme de n, multiplié par la probabilité qu'un nombre entier, choisi au hasard, jouisse de la même propriété.

En français.

Brioschi (*F.*) — [B7*c* ref. A3*h*]. Sur une transformation des équations du cinquième degré (181-189).

Soit $f(x_1, x_2)$ une forme binaire du cinquième degré, et p, q, r ses trois covariants du troisième ordre et des degrés 3, 5, 9 respectivement. Ayant posé

$$l = \frac{1}{2}(ff)_4,$$

il est

$$p = -\frac{1}{3}(fl)_2, \qquad q = (lp),$$

et, en posant

$$m = \frac{1}{2}(pp)_2,$$

on a

$$r = (mp).$$

La forme f a trois invariants

$$A = \frac{1}{2}(ll)_2, \qquad B = (lm)_2, \qquad C = \frac{1}{2}(mm)_2,$$

des degrés 4, 8, 12, plus l'invariant du dix-huitième ordre, e le déterminant

$$\Delta = 16(A^2 - 144B).$$

L'équation

$$f(x) = a_0x^5 + 5a_1x^4 + 10a_2x^3 + \ldots + a_5 = 0$$

a été transformée par Hermite au moyen du covariant p, en posant

$$y = \frac{p(x)}{f'(x)};$$

l'auteur emploie une transformation au moyen du covariant q, qui conduit à l'équation

$$y^5 - 10By^3 + 40Cy^2 + 5\left(\frac{4}{3}AC + 5B^2\right)y + 4\left(\frac{1}{3}AB^2 + \frac{4}{9}A^2C - 54BC\right) = 0.$$

Lorsque $B = 0$, l'équation peut se transformer en

$$Z^5 + 10Z^3 + 45Z + t = 0,$$

étant

$$t = -24\sqrt{2}\sqrt{I - 1}.$$

Berzolari (*L.*). — [P4*f*]. Recherches sur les transformations planes, univoques, involutives et leur application à la détermination des involutions de la cinquième classe (191-275).

Suivant *Caporali* [*Sulle trasformazioni univoche, piane, involutoire* (*Rend. d. R. Acad. di Napoli*, 1879)] on appelle *classe* d'une involution plane le nombre de couples de points correspondants qui se trouvent sur une droite arbitraire. M. Bertini [*Sopra alcune involuzioni piane* (*Rend. d. Ist. Lomb.*, 1883)] a déterminé toutes les involutions des classes 0, 1, 2, et M. Martinetti [*Le involutioni di* 3ª *e* 4ª *classe* (*Ann. di Matematica*, 2ᵉ série, t. XII) et *Sopra alcune trasformazioni involutove del piano* (*Ann. di Matematica*, 2ᵉ série, t. XIII)] celles des classes 3 et 4. L'auteur commence par exposer des propriétés générales relatives aux involutions de classe quelconque, et en particulier pour le cas où il y a un point fondamental, pour lequel $\varepsilon_i = 0$, c'est-à-dire tel qu'il n'y ait pas de couples correspondants sur aucune droite passant par ce point. La base de la méthode, qui est celle qu'ont prévue aussi MM. Bertini et Martinetti, est le réseau des courbes Ω dont chacune contient les couples qui sont en ligne droite avec un point donné. Ces courbes sont de l'ordre $2\nu + 1$, ν étant la classe de l'involution. Le maximum de la multiplicité qu'un point fondamental peut avoir pour une courbe Ω est $2\nu - 1$, et lorsqu'il y a un point

fondamental $(2\nu - 1)$-uple pour les Ω, l'involution est de Jonquières. Lorsqu'il y a un point fondamental avec $\varepsilon_i = 0$, et que ce point soit $(2\nu - k)$-uple pour les Ω, ces courbes ont un nombre égal de points fondamentaux simples et de points fondamentaux k-uples, et le nombre maximum des uns, et, par conséquent, des autres, est $2k + 1$. On a une espèce remarquable d'involutions en supposant qu'il y ait un point $(2\nu - k)$-uple pour les Ω, avec $\varepsilon_i = 0$, et que les autres points fondamentaux ne soient que simples ou k-uples pour les Ω. La classe est alors

$$\nu = \frac{k(k+1)}{2};$$

et l'auteur donne aussi la constitution des Ω pour ces involutions. Une autre espèce remarquable d'involutions est celle d'ordre ν, avec ν points fondamentaux, pour lesquelles $\varepsilon_i = 0$, et dont ν est la multiplicité pour les Ω. La plus générale de ces involutions est de l'ordre $4\nu + 3$, et elle a quatre points $(2\nu + 1)$-uples et $2\nu + 1$ doubles. On en déduit des autres d'ordre inférieur en posant en ligne droite des points fondamentaux. Ces involutions d'ordre inférieur, au nombre de onze, sont aussi assignées par l'auteur. La première partie du Mémoire se termine par le théorème suivant :

Si dans une involution de la classe $\nu > 3$ il y a un point fondamental r-uple, par lequel la courbe correspondante passe avec $r - 2$ branches, il doit être $r \leqq 5$.

Dans la seconde partie sont étudiées en particulier les involutions de la cinquième classe à points fondamentaux distincts. Elles se distribuent en 10 espèces, suivant la nature du réseau Ω.

Malet (*C.-J.*). — [C 2 *k*]. Sur certaines intégrales définies (277-290).

Étant

$$\Delta(\theta) = \sqrt{1 - k \sin^2\theta},$$

et m compris entre 2 et -1, on a

$$\sqrt{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^m\theta \sin^{1-m}\theta \, d\theta}{\Delta(\theta)} = \Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{2-m}{2}\right)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos\theta \, d\theta}{[\Delta(\theta)]^{2-m}},$$

et

$$2\sqrt{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^m\theta \sin^{1-m}\theta \, \Delta(\theta) \, d\theta$$

$$= \Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{2-m}{2}\right)\left\{[1-(1-m)k]\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos\theta \, d\theta}{[\Delta(\theta)]^{2-m}} + (1-k)^{\frac{m}{2}}\right\}.$$

De ces formules on peut déduire plusieurs autres, qui donnent des relations entre les intégrales elliptiques.

En anglais.

2me Partie.

Jung (*G.*). — [M1*f*]. Recherches sur les systèmes linéaires de genre quelconque et sur leur réduction à l'ordre minimum. Mémoire II (291-327).

Mémoire faisant suite à celui du Tome XV, 1887-1888 de ces *Annali*, p. 277. Ici l'auteur ôte les restrictions que les points fondamentaux soient distincts, et qu'ils ne présentent que des singularités ordinaires. De cette manière vient aussi à manquer, pour les systèmes d'ordre minimum, la restriction $r_1 + r_2 + r_3 \leq \mu$, c'est-à-dire que la somme des trois plus hauts degrés de multiplicité des points fondamentaux ne soit pas plus grande que l'ordre. Étant D le nombre des intersections variables de deux courbes arbitraires du système, μ le genre, c' la dimension, et ε l'excès (*voir* le compte rendu du Mémoire précédent), ces quatre quantités sont des invariants pour tous les systèmes d'une même famille (que l'on peut déduire les uns des autres par des transformations Crémona). Puis M. Jung démontre des propriétés des systèmes où

$$r_1 + r_2 + r_3 > \mathrm{M},$$

M étant l'ordre, et applique ces propriétés à la réduction des systèmes à l'ordre minimum. On obtient deux classes de systèmes minima :

1° Systèmes minima d'ordre μ pour lesquels $r_1 + r_2 + r_3 \leq \mu$;
2° Systèmes minima pour lesquels $r_1 + r_2 + r_3 > \mu$;

les premiers se présentent aussi lorsqu'on suppose les points fondamentaux différents, et les singularités ordinaires comme dans le premier Mémoire. Les seconds ne pouvaient se présenter dans les hypothèses du premier Mémoire, et ici en est étudié le cas $r_1 = \mu - 2$. Après, l'auteur indique des systèmes dont l'ordre ne peut être abaissé par une (seule) transformation quadratique, et qui toutefois peuvent être abaissés par une suite de telles transformations. Il y a aussi des systèmes de la classe (2), où $r_1 < \mu - 2$, et qui ne peuvent être que de genre $p < 5$. Ceux-là aussi sont étudiés par l'auteur. Enfin il détermine tous ces systèmes minima de la classe (2) et des genres 0, 1, 2, 3, 4.

Brioschi (*F.*). — [B7*c* ref. A3*h*]. Principes d'une théorie de la transformation des équations algébriques (329-335).

L'auteur se propose de fonder la théorie de la transformation des équations sur la théorie des formes, en partant de certaines propositions démontrées par lui-même, et du théorème suivant dû à Hermite (*Sur l'équation du cinquième degré*).

Soit $f(x, y)$ une forme d'ordre n, et $\Psi(x, y)$ un de ses covariants de l'ordre $n - 2$; les coefficients de la transformée en y de l'équation $f(x, 1) + 0$, obtenue en posant

$$y = \frac{\Psi(x, 1)}{f'_x(x, 1)},$$

sont tous des invariants de $f(x, y)$.

Les deux propositions de l'auteur sont les suivantes :

Étant

$$x_r \; (r = 0, 1, \ldots, n-1)$$

une des racines de $f(x) = 0$, et

$$f(x) = (x - x_r)\varphi(x),$$

on a

1° Tout covariant d'ordre m et de degré p de $f(x)$, où au lieu de x on ait substitué x_r, peut s'exprimer en fonction entière et rationnelle de covariants d'ordre $m+p$ et de degré p de $\varphi(x)$.

2° Tout invariant de degré p de $f(x)$ peut s'exprimer par des covariants d'ordre p et de degré p de $\varphi(x)$.

Par cela la transformée en y de $f(x) = 0$ se présente comme une relation entre les invariants et les covariants de la forme $\varphi(x)$ d'ordre $n-1$; et l'auteur donne une méthode pour déterminer les valeurs des covariants de $f(x)$, pour $x = x_r$, et celle des invariants, en fonction des covariants et des invariants de $\varphi(x)$. Suit l'application à $n = 6$.

S. R.

ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE.

Troisième série, t. XXII, 1905 (1).

Pincherle (*S.*). — Sur les fonctions déterminantes. (8-67).

Laplace a le premier étudié le lien qui existe entre les coefficients d'une série entière et la fonction représentée par cette série. Posant

$$(1) \qquad \varphi(t) = \sum_n a(n)t^n,$$

il a appelé $\varphi(t)$ la *fonction génératrice* de $a(n)$ et $a(n)$, considérée comme fonction de l'indice n, la *fonction déterminante* de $\varphi(t)$. Après lui, Abel a consacré à la correspondance entre les deux fonctions un Mémoire célèbre, où la question est épuisée, au point de vue formel.

Depuis que la notion de fonction analytique s'est introduite dans la Science, nombre de géomètres ont cherché à déterminer, d'après les propriétés de la suite des coefficients $a(n)$, l'ensemble et la nature des singularités de la fonction $\varphi(t)$. Une mention spéciale est due, dans cet ordre d'idées, au Mémoire de M. Le Roy *Sur les séries divergentes et les fonctions définies par un développement de Taylor* (*Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, 1901).

(1) Voir *Bulletin*, t. XXIX$_2$, p. 191.

L'auteur obtient des résultats remarquables et en grande partie nouveaux, en cherchant à répondre à la question suivante : *Si les coefficients* $a(n)$ *de la série* (I) *considérés comme fonctions de l'entier n, appartiennent à des classes déterminées, à quelles classes appartient la fonction génératrice* $\varphi(t)$?

Dans le présent travail, M. Pincherle se place au point de vue inverse : supposant que la fonction génératrice appartienne à une classe donnée, il se demande ce qui en résulte pour la fonction déterminante. Il développe sous une forme systématique la correspondance entre $\varphi(t)$ et la fonction déterminante $a(n)$, en s'attachant à considérer comme fonction analytique d'une variable complexe non seulement la fonction $a(n)$, mais aussi une autre fonction (*fonction coefficiente*), qui lui est étroitement liée. Cette conception est l'une des idées essentielles de son Mémoire.

Mais c'est dans le concept de *correspondance*, ou d'*opération fonctionnelle*, qu'il a trouvé le principe directeur de ses recherches. Si l'on désigne par J l'opération qui, appliquée à la série (I), donne comme résultat le coefficient $a(n)$ du terme en t^n de cette série, c'est-à-dire si l'on pose

$$\text{(II)} \qquad J\varphi = a(n),$$

l'opération J jouit, par définition, des propriétés suivantes :

$$\text{(III)} \qquad \begin{cases} J(\varphi + \psi) = J\varphi + J\psi, \\ Jc\varphi = cJ\varphi, \\ J\left[\left(\frac{1}{t} - 1\right)\varphi(t)\right] = \Delta J\varphi, \\ J(t\Delta\varphi) = nJ\varphi. \end{cases}$$

Dans ces égalités, c est une constante par rapport à t et à n; Δ désigne une différence finie.

L'auteur a pu définir très simplement une opération qui jouit des propriétés (III) tout en donnant comme résultat, non plus une fonction de l'entier n, mais une fonction analytique et régulière pour toutes les valeurs d'une variable complexe x dont la partie réelle est plus grande qu'un nombre donné; c'est à l'étude de cette opération et de son inverse qu'il ramène la théorie des fonctions génératrices et de leurs déterminantes.

Le Chapitre I est consacré à l'étude de l'intégrale

$$\text{(IV)} \qquad \int_0^a \varphi(t)\,t^{x-1}\,dt,$$

où $\varphi(t)$ est supposée, d'abord simplement continue et, ensuite, dérivable.

Le Chapitre II traite de l'inversion de cette intégrale.

Le Chapitre III est consacré au cas où $\varphi(t)$ est une fonction analytique et à l'examen de certaines classes de fonctions $\varphi(t)$; on y retrouve, en particulier, la notion de polygone de sommabilité (Borel) et les conditions nécessaires et suffisantes déjà données par M. Nielsen, mais rendues plus simples pour le développement d'une fonction suivant les factorielles

$$\frac{1.2.3\ldots n}{x(x+1)\ldots(x+n)}.$$

Enfin, dans le Chapitre IV, l'auteur substitue à la fonction déterminante, représentée par l'intégrale (IV), une fonction entière qu'il appelle *fonction coefficiente* et dont l'étude lui permet de retrouver nombre des résultats obtenus par MM. Leau, Le Roy et d'autres géomètres. En outre, il fait connaître les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une fonction soit développable suivant les factorielles

$$\frac{(x-1)(x-2)\ldots(x-n)}{1.2.3\ldots n}.$$

Picard (Émile). — Sur la formule générale donnant le nombre des intégrales doubles distinctes de seconde espèce relatives à une surface algébrique. (68-100).

Dans ses recherches antérieures, l'auteur supposait que la connexion linéaire de la surface considérée $f(x, y, z) = 0$ était égale à 1 et, de plus, qu'aucun polynome entier en y ne vérifiait l'équation différentielle E à laquelle satisfont les périodes de l'intégrale abélienne arbitraire de seconde espèce

$$\int \frac{Q(x, y, z)\,dx}{f'_z}$$

relative à la courbe entre x et z

$$f(x, y, z) = 0,$$

$Q(x, y, z)$ étant un polynome en x, y, z qui s'annule le long de la courbe double. Il démontre ici une formule donnant dans tous les cas le nombre ρ_0 des intégrales doubles distinctes de seconde espèce relatives à une surface algébrique.

Il s'appuie, à cet effet, sur un théorème remarquable (§ I) exprimant les conditions nécessaires et suffisantes pour que la connexion linéaire d'une surface soit supérieure à un :

Pour qu'une surface ait r intégrales distinctes de différentielles totales de seconde espèce, il faut et il suffit que l'équation E *soit vérifiée par r polynomes en y linéairement indépendants.*

Après avoir établi cette proposition et l'avoir vérifiée directement dans le cas $p = 2$, M. Picard en expose une seconde démonstration qui fait voir comment les intégrales de seconde espèce se déduisent des polynomes vérifiant l'équation E.

Il détermine ensuite (§ II) le nombre des périodes de l'intégrale double

$$\iint \frac{P(x, y, z)\,dx\,dy}{f'_z},$$

le polynome $P(x, y, z)$ étant uniquement assujetti à passer par la courbe double. Si la surface possède r intégrales de différentielles totales de seconde espèce, ce nombre de périodes est égal à

$$N - 2p - (m-1) + r,$$

N désignant la classe de la surface, m son degré, p le genre d'une section plane arbitraire.

Ce résultat établi, l'auteur prouve (§ III) que le nombre des conditions, exprimant que l'intégrale double écrite ci-dessus est de seconde espèce, est précisément égal à $2p - r$.

Il est alors en possession de tous les éléments nécessaires pour déterminer le nombre ρ_0 des intégrales doubles distinctes de seconde espèce, et trouve

$$\rho_0 = N + d - 4p - (m - 1) + 2r - (\rho - 1),$$

d désignant le nombre des points doubles isolés sur la ligne double; quant à ρ, c'est le nombre des courbes algébriques irréductibles C tracées sur la surface et telles qu'il n'existe pas d'intégrale de différentielle totale de troisième espèce n'ayant d'autres courbes logarithmiques que tout ou partie des courbes C, mais telles que, si on leur adjoint une autre courbe algébrique irréductible quelconque de la surface, il existe une intégrale de troisième espèce n'ayant comme courbes logarithmiques que cette dernière courbe et tout ou partie des courbes C.

L'invariance du nombre ρ_0 donne lieu (§ V) à diverses remarques. Ainsi deux surfaces f et f' se correspondant point par point et n'ayant d'autres singularités qu'une ligne double avec points triples et des points doubles isolés, ρ_0 et r auront respectivement les mêmes valeurs pour ces deux surfaces. On aura donc, les lettres accentuées se rapportant à f',

$$N + d - 4p - (m - 1) - \rho = N' + d' - 4p' - (m' - 1) - \rho'.$$

M. Picard montre que, si, dans la substitution qui transforme f en f', il y a F points fondamentaux sur f et F' points fondamentaux sur f', on a nécessairement

$$\rho + F = \rho' + F'.$$

De là résulte, en vertu de ce qui précède,

$$N + d - 4p - (m - 1) + F = N' + d' - 4p' - (m' - 1) + F'.$$

C'est là une relation d'invariance remarquable entre deux surfaces qui se correspondent point par point.

La combinaison $N - 4p - (m - 1)$ qui y figure s'était déjà présentée dans les travaux de M. Nöther et plus récemment dans ceux de MM. Castelnuovo et Enriques.

Diverses applications (§ VI) terminent le Mémoire : l'auteur détermine notamment la valeur de ρ_0 pour la surface la *plus générale* de degré m ($m \geqq 4$). Comme, pour une telle surface, on a $\rho = 1$, on trouve

$$\rho_0 = (m - 1)(m^2 - 3m + 3).$$

Mais ρ n'est pas égal à 1 pour *toute* surface de degré m sans points multiples. Comme ρ_0, il dépend de la *nature arithmétique* des coefficients de la surface. Aussi la valeur $\rho_0 = 5$ que M. Picard obtient pour les surfaces hyperelliptiques générales peut n'être pas exacte pour les surfaces hyperelliptiques dont les périodes satisfont à une ou plusieurs relations *singulières* (au sens de M. Humbert).

Hadamard. — Recherches sur les solutions fondamentales et l'intégration des équations linéaires aux dérivées partielles. (Deuxième Mémoire). (101-141).

La solution fondamentale déterminée dans le premier Mémoire (*Annales de l'École Normale supérieure*, 1904) est appliquée ici à l'intégration des équations du second ordre qui appartiennent au type hyperbolique.

Les deux méthodes connues pour ces équations, méthode de Kirchhoff et méthode de M. Volterra (*Acta mathematica*, t. XVIII), ne font pas intervenir la solution fondamentale. Les expressions qu'elles introduisent, $\frac{f(r+at)}{r}$ (Kirchhoff) ou $\log \frac{t+\sqrt{a^2t^2-r^2}}{r}$ (Volterra), présentent toutes deux, outre le conoïde caractéristique, une singularité parasite, la ligne $r=0$ de l'espace à trois ou à quatre dimensions. En un mot, elles font intervenir d'autres éléments que ceux qui s'introduisent naturellement dans la question.

C'est cette circonstance qui explique les graves difficultés qu'on a rencontrées lorsqu'on a cherché (Coulon, d'Adhémar) à généraliser les méthodes précédentes.

L'auteur opère au contraire cette généralisation pour les équations à trois variables en partant de la solution fondamentale.

On intègre celle-ci le long d'une ligne (L), absolument comme on déduit de la quantité $\frac{1}{r}$ un potentiel de ligne. On obtient ainsi une solution tout à fait analogue à celle de M. Volterra, et au moyen de laquelle on peut procéder pour l'équation générale absolument comme il a fait pour l'équation des ondes cylindriques.

Il ne reste plus qu'à faire l'opération inverse de l'intégration suivant (L), c'est-à-dire à différentier suivant cette ligne. Si l'on pousse jusqu'au bout ce calcul de différentiation, la ligne (L) s'élimine du résultat, comme on devait s'y attendre. Mais on rencontre une difficulté nouvelle et il faut, pour parvenir au résultat, généraliser la notion d'intégrale définie.

Pour indiquer le principe de cette généralisation, on considère d'abord l'intégrale simple

$$(1)\qquad \int_a^b \frac{A(x)\,dx}{(b-x)^{1+\alpha}} \qquad (0<\alpha<1),$$

qui n'a pas de sens si $A(b)$ est différent de zéro. Il en est de même, pour $x=b$, de l'expression

$$(2)\qquad \frac{B(x)}{(b-x)^{\alpha}}.$$

Mais la somme de ces deux expressions peut être définie moyennant la condition

$$A(b)=\alpha B(b).$$

Elle peut alors, en effet, s'écrire

$$(3)\qquad \int_a^b \frac{A(x)-A(b)}{(b-x)^{1+\alpha}}\,dx + \left[\frac{B(x)-B(b)}{(b-x)^{\alpha}}\right]_{x=b}$$

et, si l'on suppose que les fonctions A et B satisfassent à la condition de Lipschitz, chaque terme de cette somme a un sens, et le second est nul.

L'expression (3) est donc indépendante de la fonction B; elle est entièrement définie quand on donne l'intégrale (1). On peut, en conséquence, parler sans ambiguïté, de *la partie finie* de l'intégrale infinie (1).

Ces considérations s'étendent aisément, d'une part, aux intégrales de la forme

$$(1)' \qquad \int_a^b \frac{A(x)}{(b-x)^{p+\alpha}}\,dx,$$

où p est un entier positif quelconque, et, d'autre part, aux intégrales multiples.

Dans le dernier cas, le rôle de l'expression (2) est joué par une intégrale de frontière.

Les symboles qui viennent d'être définis se prêtent très simplement à la différentiation. Si, en effet, l'intégrale (1), ou l'intégrale (1)', ou encore l'intégrale ordinaire

$$\int_a^b \frac{A(x)}{(b-x)^{\alpha}}\,dx$$

dépend d'un paramètre qui entre dans b, pour obtenir la dérivée de l'intégrale considérée ou de sa partie finie, il suffira de différentier sous le signe $\int$ en faisant varier b sous ce signe, mais sans tenir compte de la variation de la limite supérieure et de prendre la partie finie du résultat. Cette remarque s'étend aux intégrales multiples.

Les calculs de différentiation suivant la ligne (L) conduisent à des expressions de la nature de celles qui précèdent: on obtient des intégrales infinies, mais la partie finie de ces intégrales fournit le résultat cherché.

Duhem (*P.*). — Recherches sur la stabilité. (Troisième Partie). (143-217).

Suite des recherches dont les deux premières Parties ont paru dans le précédent Volume des *Annales de l'École Normale*. Cette troisième Partie a pour titre général : *La stabilité des milieux élastiques*.

Le premier Chapitre est consacré aux conditions suffisantes pour la stabilité initiale d'un milieu élastique. Il y est traité successivement des conditions suffisantes pour la stabilité initiale d'un milieu quelconque et des conditions suffisantes pour la stabilité initiale d'un milieu vitreux.

Le second Chapitre développe les conditions nécessaires pour la stabilité d'un milieu élastique. Voici les titres de ses subdivisions :

I. Remarques diverses sur les petits mouvements d'un milieu élastique.

II. D'une condition nécessaire pour la stabilité initiale d'un milieu quelconque, cristallisé ou vitreux.

III. Établissement de diverses formules qui serviront à discuter la stabilité initiale d'un milieu vitreux.

IV. D'une autre condition nécessaire pour la stabilité d'un milieu vitreux illimité.

V. Le postulat des petits mouvements.

VI. Modifications que le postulat des petits mouvements permet d'apporter aux propositions démontrées au n° I.
VII. Autre conséquence du postulat des petits mouvements : ni l'une, ni l'autre des deux vitesses de propagation au sein d'un milieu isotrope ne peut être imaginaire.

Le troisième Chapitre traite du déplacement de l'équilibre :

I. Du déplacement de l'équilibre en général.
II. Du déplacement isothermique de l'équilibre pour un milieu élastique affecté d'une déformation homogène.
III. Du déplacement isothermique de l'équilibre, en général, en un milieu élastique.
IV. Conséquence, relative à la stabilité de l'équilibre, de la condition établie au n° II.
V. Du déplacement isentropique de l'équilibre.
VI. Application des considérations précédentes à un milieu élastique très peu déformé.
VII. Application des conditions précédentes à un milieu vitreux peu déformé.

Cartan (*E.*). — Sur la structure des groupes infinis de transformations (*suite*). (219-308).

Ce Mémoire a pour but de donner une base nouvelle à la théorie de la structure des groupes de transformations continus définis par des systèmes d'équations aux dérivées partielles.

Il est divisé en quatre Chapitres : les deux premiers ont paru dans le précédent Volume des *Annales de l'École Normale.*

Dans le Chapitre III, il est question des différents prolongements possibles de la structure des groupes infinis; pour cette étude, on montre que le groupe peut être défini comme l'ensemble des transformations qui établissent entre un certain nombre d'expressions de Pfaff une substitution linéaire appartenant à un groupe linéaire donné.

Le Chapitre IV traite des groupes infinis qui dépendent de fonctions arbitraires d'un seul argument; il montre que ceux de ces groupes qui sont transitifs simples sont isomorphes au groupe général à une variable.

Guldberg (*Alf.*). — Sur les équations linéaires aux différences finies. (309-319).

Les analogies entre les équations linéaires aux différences finies et les équations différentielles linéaires ont été signalées depuis longtemps et elles ont donné lieu à de nombreux travaux.

Néanmoins, l'étude des *fonctions invariantes* ou *fonctions symétriques* des solutions des équations différentielles linéaires et de leur *transformation* n'avait point encore son analogue dans la théorie des équations aux différences finies. Le présent Mémoire a pour objet de combler cette lacune.

Dans le premier Chapitre, l'auteur considère les éléments $y_x^{(1)}, y_x^{(2)}, \ldots, y_x^{(n)}$ d'un système fondamental d'intégrales d'une équation linéaire aux différences

finies d'ordre n

$$y_{x+n} + a_x^{(1)} y_{x+n-1} + a_x^{(2)} y_{x+n-2} + \ldots + a_x^{(n)} y_x = 0;$$

les fonctions symétriques sont, comme pour les équations différentielles linéaires, des fonctions algébriques entières de $y_x^{(1)}, \ldots, y_x^{(n)}$ et de leurs valeurs successives, qui se reproduisent, multipliées par un facteur constant (dans le sens du calcul aux différences finies) quand on remplace $y_x^{(1)}, \ldots, y_x^{(n)}$ par les éléments $z_x^{(1)}, \ldots, z_x^{(n)}$ d'un autre système fondamental, c'est-à-dire quand on fait une substitution de la forme

$$y_x^{(i)} = C_{i1} z_x^{(1)} + C_{i2} z_x^{(2)} + \ldots + C_{in} z_x^{(n)} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

M. Guldberg démontre que *toute fonction symétrique* F *est égale à une fonction algébrique entière des coefficients de l'équation linéaire et de leurs valeurs successives, multipliée par une puissance du déterminant*

$$\begin{vmatrix} y_x^{(1)} & y_{x+1}^{(1)} & \ldots & y_{x+n-1}^{(1)} \\ y_x^{(2)} & y_{x+1}^{(2)} & \ldots & y_{x+n-1}^{(2)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_x^{(n)} & y_{x+1}^{(n)} & \ldots & y_{x+n-1}^{(n)} \end{vmatrix}.$$

Il applique ce résultat à la formation de la condition pour que deux équations linéaires aux différences finies aient une solution commune, et à celle de l'équation linéaire qui admet à la fois les intégrales de deux équations linéaires données.

Le Chapitre II contient la théorie de la transformation des équations linéaires aux différences finies, déduite du théorème précédent, et divers exemples.

Guldberg (*Alf.*). — Sur les équations linéaires aux différences finies. (Second Mémoire). (320-348).

J'expose, dit l'auteur, dans ce travail une théorie d'intégration des équations linéaires aux différences finies, qui est entièrement analogue à la célèbre théorie de MM. Picard et Vessiot sur l'intégration des équations différentielles linéaires. La proposition fondamentale en est la suivante :

A toute équation linéaire aux différences finies d'ordre n correspond un groupe continu fini de transformations linéaires homogènes à n variables, qui jouit des deux propriétés suivantes :

1° *Toute fonction rationnelle des intégrales qui a une expression rationnelle admet toutes les transformations de ce groupe;*

2° *Toute fonction rationnelle des intégrales invariante pour toutes les transformations de ce groupe a une expression rationnelle.*

Ce travail est divisé en trois Chapitres. Dans le premier Chapitre, je démontre le théorème cité qui est la base de toute cette théorie. Le deuxième Chapitre contient l'intégration de l'équation donnée au moyen d'équations auxiliaires, liées à la réduction progressive du groupe de transformations de l'équation. La méthode à laquelle on arrive donne la condition nécessaire et

suffisante pour qu'une équation soit intégrable par des quadratures, et de là résulte, en particulier, l'impossibilité d'intégrer, au moyen des quadratures, les équations linéaires générales supérieures au premier ordre. Le troisième Chapitre contient l'application de la méthode développée à l'équation linéaire du second ordre.

Boussinesq (*J.*). — Propagation des ondes le long d'une colonne liquide compressible, se composant de filets à vitesses inégales et contenue dans un tuyau élastique horizontal, sans tension longitudinale. (349-368).

Extrait de l'Introduction. — Resal me paraît avoir, le premier ou un des premiers, dans une courte Note du 27 mars 1876 (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris,* t. LXXXII, p. 698), soumis au calcul les mouvements que propage le long d'une colonne liquide l'élasticité du tube qui la contient, comme sont, par exemple, les battements du *pouls* dans les artères, les ondes longitudinales de l'eau remplissant le tube en caoutchouc de certains appareils de Marey pour l'enregistrement ou l'imitation de phénomènes physiologiques, enfin les *coups de bélier* provoqués, dans les tuyaux de conduite, par toute brusque variation de la vitesse d'écoulement et, par suite, de la pression. Comme Resal avait spécialement en vue la colonne liquide, sans écoulement, contenue dans un mince tube en caoutchouc généralement un peu plus long que la distance de ses deux extrémités, ou dépourvu de tension longitudinale, et d'ailleurs, incomparablement plus dilatable dans les sens latéraux, par les accroissements de la pression intérieure, que n'est compressible le liquide inclus, il a pu, tout à la fois, négliger les actions mutuelles des anneaux juxtaposés composant le tube, ou supposer, du moins avec une assez grande approximation, ces actions insensibles devant la tension des fibres circulaires des anneaux, et, de plus, admettre, d'une part, l'incompressibilité du liquide, ou la conservation des volumes fluides, d'autre part, le *parallélisme des tranches,* c'est-à-dire l'égalité des vitesses prises suivant l'axe par tout un tronçon élémentaire de la colonne, sous l'impulsion commune exercée à une extrémité, les frottements, qui tendraient à inégaliser ces vitesses, restant, comme on sait, négligeables, dans les mouvements d'un fluide ou brefs, ou périodiques, d'amplitude modérée. Resal obtient ainsi, pour le carré de la vitesse de propagation des ondes, le quotient par la densité ρ du liquide, de l'élasticité E de traction du tube, multipliée par le petit rapport de l'épaisseur ε de la paroi au diamètre intérieur $2R$....

M. l'ingénieur italien Alliévi a généralisé très heureusement, presque sans la compliquer, la formule de Resal (qui lui était d'ailleurs inconnue), en tenant compte de la compressibilité du liquide, comme il le fallait bien eu égard à la grande rigidité des tuyaux de conduite, mais en faisant encore l'hypothèse du parallélisme des tranches, peu admissible dans ces tuyaux où les filets fluides ont des vitesses assez notablement différentes, et en continuant enfin à admettre l'indépendance relative des anneaux circulaires contigus du tuyau.

Cette dernière supposition, quoique moins admissible pour un tel tuyau que pour un tube lâche et mince en caoutchouc, et qui ne serait pleinement justifiée que dans le cas d'une paroi à fibres *annulaires* résistantes, mais très extensible et très compressible *suivant sa longueur*, paraît inévitable dès

qu'on veut pouvoir traiter la question; car, s'il fallait tenir compte des actions mutuelles des anneaux, et, en conséquence, de celles qu'exerceraient à distance les uns sur les autres, par leur intermédiaire, les tronçons sous-jacents de la colonne liquide, les équations du mouvement de celle-ci ne seraient, sans doute, généralement plus réductibles à une seule équation aux dérivées partielles; et le problème deviendrait, ce semble, inabordable.

Mais il y a lieu de ne pas négliger les inégalités de vitesse des filets fluides; c'est ce que je me propose de faire ici, en développant d'ailleurs la théorie complète.

Note terminale. — Je viens d'apprendre que l'expression binome de M. Alliévi... avait été donnée dès 1878... par M. Korteweg, dans les *Annalen der Physik und Chemie* (t. V, p. 525 à 542).

Lindelöf (*Ernst*). — Sur les fonctions entières d'ordre entier. (369-395).

L'objet de ce travail est de retrouver et de compléter les propositions dont M. Wiman a récemment enrichi la théorie des fonctions entières d'ordre entier. L'auteur reprend cette théorie par des méthodes nouvelles, qui lui permettent de la présenter sous une forme plus simple et en même temps de préciser et de généraliser beaucoup les résultats obtenus antérieurement.

Toute son exposition est fondée sur un important théorème de M. Jensen qu'il établit en le rattachant aux propriétés du potentiel logarithmique et dont voici l'énoncé :

I. *Soit $f(x)$ une fonction entière, nulle à l'origine comme cx^m; soient a_1, $a_2, \ldots, a_n, \ldots$ ses zéros distincts de l'origine, rangés par ordre de modules croissants, et r une quantité positive comprise entre $|a_n|$ et $|a_{n+1}|$; on a*

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|f(re^{i\varphi})|\,d\varphi = \log\left|\frac{cr^{m+n}}{a_1 a_2\ldots a_n}\right|.$$

Il résulte de là, entre autres conséquences, que, $f(x)$ *étant une fonction entière, l'inégalité*

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|f(re^{i\varphi})|\,d\varphi > 0$$

est vérifiée dès que r dépasse une certaine valeur finie r_0 et, si l'on pose

$$F(x) = e^{G(x)} f(x),$$

$G(x)$ désignant une fonction entière quelconque, s'annulant à l'origine, on aura, à partir de la même valeur r_0,

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|F(re^{i\varphi})|\,d\varphi > 0.$$

Après ces préliminaires, M. Lindelöf considère une fonction entière $f(x)$ dont l'ordre *apparent* est égal à un *entier* positif μ. Son genre étant μ ou $\mu - 1$.

si $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ sont ses zéros distincts de l'origine, on peut poser

$$f(x) = e^{\alpha_0 x^\mu + \alpha_1 x^{\mu-1} + \ldots + \alpha_\mu} x^m \prod \mathrm{E}\left(\mu, \frac{x}{a_n}\right),$$

$\mathrm{E}\left(\mu, \frac{x}{a_n}\right)$ désignant le facteur primaire relatif au zéro a_n. Si $f(x)$ est de genre $\mu - 1$, on a identiquement

$$\alpha_0 + \frac{1}{\mu} \sum \frac{1}{a_n^\mu} = 0.$$

Adoptant les dénominations récemment proposées par M. Pringsheim pour classer les fonctions de cette espèce, l'auteur établit le théorème suivant :

II. *Si la fonction $f(x)$ appartient au type minimum d'ordre μ, les deux expressions*

$$\frac{n}{|a_n|^\mu}, \qquad \left| \alpha_0 + \frac{1}{\mu} \sum_1^n \frac{1}{a_n^\mu} \right|$$

tendent simultanément vers zéro lorsque n augmente indéfiniment. Réciproquement, si cette condition est vérifiée et si, d'ailleurs, l'exposant de convergence des zéros $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ est égal à μ, la fonction $f(x)$ appartient au type minimum d'ordre μ.

Si $f(x)$ est de type moyen (Normaltypus de Pringsheim), *ces deux expressions restent au-dessous d'une limite finie quel que soit n, mais ne s'annulent pas simultanément pour $n = \infty$; réciproquement, s'il en est ainsi, la fonction $f(x)$ est d'ordre μ et de type moyen.*

Enfin, si $f(x)$ est de type maximum, l'une au moins de ces deux expressions peut dépasser toute quantité fixée d'avance; réciproquement, s'il en est ainsi et si l'exposant de convergence des zéros est égal à μ, la fonction $f(x)$ appartient au type maximum d'ordre μ.

Du même ordre d'idées procède cette autre proposition :

III. *Étant donnée une fonction entière $f(x)$ d'ordre entier μ, si on la multiplie par une fonction quelconque $\varphi(x)$ de type ou d'ordre inférieur, le produit sera de même ordre et de même type que $f(x)$.*

Après avoir généralisé les propositions II et III, l'auteur passe aux théorèmes de MM. Picard et Borel qu'il précise par cet énoncé nouveau :

IV. *Étant donnée une fonction entière $f(x)$ d'ordre entier μ, on considère les équations de la forme*

$$f(x) = \frac{\varphi(x)}{\psi(x)}, \tag{1}$$

où φ et ψ sont des fonctions entières quelconques d'ordre inférieur à μ, ou bien d'ordre μ mais d'un type inférieur à celui de $f(x)$; on désigne par $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ les racines non nulles de ces équations, rangées par ordre de modules croissants.

Lorsque $f(x)$ est de type moyen, l'expression $n : |a_n|^\mu$ reste au-dessous d'une limite finie pour toute équation de la forme (1), *mais ne tend pas vers zéro lorsque n croît indéfiniment, sauf peut-être pour* une seule *de ces équations.*

Si $f(x)$ est de type maximum, il y a, au plus, une *équation* (1) *telle que l'expression $n : |a_n|^\mu$ reste au-dessous d'une limite finie quel que soit n; d'ailleurs l'expression $n : |a_n|^{\mu+\varepsilon}$ tend vers zéro pour toute équation* (1), *quelque petit que soit le nombre positif ε.*

Cette proposition est généralisée comme l'avaient été les propositions II et III. Le Mémoire se termine par divers théorèmes relatifs à la croissance régulière.

Raffy (*Louis*). — Recherches sur les surfaces isothermiques. (Première Partie). (397-439).

Dans ce premier Mémoire, l'auteur a principalement en vue, d'abord d'étudier une classe de surfaces jadis rencontrées par Ossian Bonnet, ensuite de rapprocher les unes des autres cinq classes de surfaces isothermiques par un caractère nouveau qui leur est commun et qui n'appartient qu'à elles.

Au préalable, il établit diverses relations générales sur lesquelles reposeront les recherches ultérieures. Il commence (§ I) par rappeler les formules au moyen desquelles M. Darboux a étudié les enveloppes de sphères à deux paramètres : la première nappe (S) d'une enveloppe de sphères étant rapportée à ses lignes de courbure ($\rho =$ const., $\rho_1 =$ const.) et ses rayons principaux étant R et R_1, on représente le rayon de la sphère enveloppée par

$$l = -\frac{\lambda}{\mu}, \tag{1}$$

et l'on assujettit λ et μ aux conditions

$$\frac{\partial\lambda}{\partial\rho} + R\frac{\partial\mu}{\partial\rho} = 0, \qquad \frac{\partial\lambda}{\partial\rho_1} + R_1\frac{\partial\mu}{\partial\rho_1} = 0, \tag{2}$$

en vertu desquelles les lignes de courbure se correspondent sur les deux nappes de l'enveloppe de sphères. A ces formules se rattache la condition

$$\frac{\lambda\left(\frac{1}{l^2} + \Delta_1 \log\lambda\right)}{\frac{1}{l} - \frac{1}{l_0}} = \text{const.},$$

par laquelle l'auteur exprime que la seconde nappe est une sphère de rayon l_0 (fini, nul ou infini), au moyen du paramètre différentiel Δ_1 relatif à l'élément linéaire de (S). De plus, *pour que les deux nappes de l'enveloppe aient leurs éléments linéaires proportionnels, sans être inverses l'une de l'autre, il faut et il suffit que l et λ vérifient l'équation*

$$\frac{1}{l^2} - \frac{1}{l}\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R_1}\right) - \Delta_2 \log\lambda = 0;$$

où le second paramètre différentiel Δ_2 *est relatif à l'élément linéaire de la première nappe*, qui est nécessairement isothermique en vertu d'un théorème dû à M. Darboux.

Si l'on appelle *sphère harmonique* d'une surface (S) en un point P la sphère tangente en P et qui a pour centre le conjugué harmonique de P par rapport aux deux centres de courbure principaux de (S) relatifs à ce point, on a cette proposition, due également à M. Darboux :

Pour qu'une surface (S) *soit isothermique, il faut et il suffit que ses sphères harmoniques touchent une autre surface* (Σ) *dont les lignes de courbure correspondent à celles de* (S).

Cette seconde nappe (Σ) n'est pas en général isothermique; c'est pourquoi M. Raffy recherche (§ II) les surfaces isothermiques dont les sphères harmoniques touchent une autre surface isothermique. Il prouve que, *si la correspondance entre les deux nappes est une inversion, les surfaces cherchées sont les inverses de celles dont les sphères harmoniques ont leurs centres sur un même plan* (non isotrope); *si la correspondance n'est pas une inversion, la seconde nappe de l'enveloppe des sphères harmoniques est un plan ou une sphère.*

Ayant ainsi obtenu les surfaces (Θ) de M. Thybaut qui correspondent au plan et leurs inverses qui correspondent à la sphère, l'auteur caractérise ces deux classes de surfaces par l'équation invariante

$$\frac{1}{4}\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{R_1}\right)^2-\frac{2}{R_1 R_2}+\Delta_2 \log\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{R_2}\right)=0,$$

où le paramètre Δ_2 est relatif à l'élément linéaire.

Abandonnant alors le système de coordonnées curvilignes formé par les lignes de courbure, M. Raffy rappelle (§ III) les formules d'Ossian Bonnet pour les surfaces rapportées à leurs lignes de longueur nulle ($\alpha=$ const., $\beta=$ const.), et les complète (§ V) en étudiant, à l'aide des variables (α, β), la *transformation* (*conforme*) *par normales parallèles* (Bour, Christoffel) propre aux surfaces isothermiques.

Le reste du travail est résumé dans ces deux extraits de l'Introduction.

I. Dans son célèbre *Mémoire sur la théorie des surfaces applicables*, O. Bonnet a recherché, entre autres, les surfaces qui admettent une série continue de déformations sans altération des courbures principales. L'une des classes de surfaces qui répondent à la question dépend de deux fonctions arbitraires; après les avoir définies intrinsèquement, l'illustre géomètre fait observer qu'elles ont la même généralité que les surfaces minima et s'en tient là.

Dans une Note publiée en 1893, je démontrai que *ces surfaces sont isothermiques*. En 1897, M. J.-N. Hazzidakis réussit à exprimer leurs coordonnées par des formules où les fonctions arbitraires figurent sous les signes d'intégration. Même après ce réel progrès, il y avait encore lieu de se demander comment ces surfaces sont engendrées et si, dans leur nombre, il en est de réelles.

Ces surfaces d'Ossian Bonnet, que j'appelle *surfaces* (B), sont caractérisées, comme on le verra (§ IV), par la propriété que leurs sphères harmo-

niques ont leurs *centres sur un même plan isotrope*. Il suit de là, d'abord, qu'*elles sont toutes imaginaires*, ensuite (§ VII) qu'*elles sont les inverses des inverses des surfaces minima*, la seconde inversion étant faite d'un pôle situé à distance nulle *du point* que l'on a pris comme pôle pour faire l'inversion des surfaces minima. (Cette *double inversion singulière*, qui n'avait, je crois, jamais été signalée, met en défaut le théorème classique de Liouville, suivant lequel deux inversions successives peuvent être remplacées par une seule, si l'on fait abstraction d'un déplacement). En raison de cette génération, les coordonnées des surfaces (B) s'expriment d'une manière entièrement explicite, au moyen de deux fonctions arbitraires dont les arguments sont les paramètres des lignes de longueur nulle.

Je démontre, en outre (§ VI), qu'*à toute surface* (B) *correspond une autre surface* (B) *dans la transformation conforme par normales parallèles*. Cette propriété remarquable d'être invariantes, quant à leur définition, relativement à la transformation précitée, appartient aussi (§ VI) aux surfaces que M. Thybaut a découvertes et étudiées, et qu'on peut définir comme ayant leurs sphères harmoniques tangentes à un même plan. Entre ces dernières surfaces, que j'appelle surfaces (Θ), et les surfaces (B), il existe donc une étroite affinité. Les unes comme les autres ont leurs sphères harmoniques tangentes à un même plan; si le plan n'est pas isotrope, on a les surfaces (Θ); si le plan est isotrope, il est plan asymptote des sphères harmoniques et contient leurs centres : on a alors les surfaces (B).

II. Les surfaces (B) et les surfaces (Θ) ont encore en commun (§ VI) cette propriété que *leur élément linéaire, multiplié par le carré de la demi-différence de leurs courbures principales, devient l'élément linéaire d'une sphère de rayon* 1. Cette propriété, d'ailleurs, se rencontre aussi (§ VII) chez les surfaces minima et se conserve dans l'inversion. Elle appartient donc :

1° et 2° Aux surfaces de M. Thybaut et à leurs inverses;
3° et 4° Aux surfaces minima et à leurs inverses;
5° Aux surfaces (B) d'Ossian Bonnet, dont les inverses sont ou des surfaces (B) ou des inverses de surfaces minima.

Tel est le nouveau caractère qu'il paraît curieux de retrouver dans les *cinq seules* classes de surfaces isothermiques dont on ait pu exprimer les coordonnées d'une manière *entièrement explicite* au moyen de *deux fonctions arbitraires*. Je prouve, en terminant, que ce caractère est *distinctif*, de sorte que les cinq classes de surfaces qui le présentent constituent un groupe à part dans l'ensemble des surfaces isothermiques.

Boutroux (*Pierre*). — Fonctions multiformes à une infinité de branches. (441-469).

Introduction. — Les transcendantes multiformes à une infinité de branches n'ont, pour ainsi dire, point été étudiées. C'est que, d'une part, une théorie complète de ces fonctions paraît impossible à faire, à cause de la multiplicité et de la diversité des éventualités dont nous prévoyons l'existence, et que, d'autre part, toutes présentent au premier coup d'œil de si inextricables complications qu'il faut renoncer à l'espoir d'obtenir à leur sujet cette moisson de

théorèmes, si beaux de précision et de simplicité, qui illustre la théorie des fonctions uniformes.

Mais, si les transcendantes multiformes ont le grave défaut de ne pas être simples, elles s'imposent en revanche à notre attention par le rôle immense qu'elles jouent en Analyse. Il suffira d'en donner un exemple. Considérons une équation différentielle de la forme

$$(1) \qquad y' = R(x, y),$$

R étant rationnel en x et y. On sait que la seule équation de cette forme dont les intégrales puissent être uniformes est l'équation de Riccati. Allant plus loin, M. Painlevé a donné une méthode permettant de déterminer toutes les équations (1) dont les intégrales ont un nombre fini de branches; cette propriété n'appartient qu'à un très petit nombre d'équations isolées. Ainsi, à part un nombre très restreint d'exceptions, les intégrales de l'équation (1) sont des fonctions multiformes à une infinité de branches. C'est dire qu'on ne saurait indéfiniment exclure ces fonctions de l'Analyse, sous prétexte que les questions qu'elles soulèvent sont plus ardues qu'élégantes.

En quoi consisteront ces questions? L'étude générale des fonctions qu'a instituée l'école de Weierstrass a le plus souvent été, si l'on peut dire, une étude bornée : étude dans l'entourage d'un point déterminé, étude au voisinage de conditions initiales données, s'il s'agissait d'équations différentielles. Aujourd'hui nous nous efforçons de connaître les transcendantes dans leur ensemble, d'étudier leur allure dans tout le plan et de trouver des formes analytiques qui les représentent tout entières, au lieu de n'en figurer qu'une portion tronquée. Pour diriger des recherches d'apparence aussi vague, il faut un fil conducteur. Or, ce fil conducteur, nous le trouvons dans la théorie des fonctions uniformes, en voyant par quel artifice on a réussi à s'élever des fonctions rationnelles aux transcendantes uniformes. Ayant affaire à des équations présentant, non plus un nombre fini, mais un ensemble infini de racines, les analystes ont cherché, en premier lieu, à déterminer les points-limites de cet ensemble, et, en second lieu, ils ont étudié la répartition, la condensation des racines autour de leurs points-limites. Ainsi nous est suggérée l'idée de recourir à une méthode analogue pour étudier les deux ensembles qui caractérisent une fonction multiforme : l'ensemble des points critiques, et l'ensemble des déterminations de la fonction pour une valeur quelconque de la variable. En même temps, nous devrons rechercher quel lien il y a entre ces deux ensembles, c'est-à-dire quelles sont les combinaisons de permutations qui donneront successivement naissance à toutes les déterminations de la fonction.

Le problème ainsi posé peut être abordé par plusieurs côtés. Ou bien l'on considérera des fonctions définies par un procédé particulier; on prendra, par exemple, des équations (1) et l'on se proposera d'étudier leurs intégrales. Ou bien l'on tentera de construire *a priori* une théorie des fonctions multiformes en partant des types les plus simples que l'on puisse concevoir. Ainsi, on supposera en premier lieu que les points critiques ou les déterminations de la fonction convergent vers des points-limites isolés en nombre fini, et, tout d'abord, vers un point-limite unique; de même que la théorie des transcendantes uniformes débute par l'étude des fonctions ayant un point d'indétermination unique, les fonctions méromorphes. Après quoi, on passera successivement en revue des types de fonctions de plus en plus compliqués.

C'est à ce second point de vue que je me suis placé dans ce travail. Je ne

prétends pas toutefois y donner une solution complète des problèmes que j'ai effleurés. On reconnaît vite, en effet, que, pour pouvoir traiter utilement ces problèmes, il faut faire certaines hypothèses qui, dans une théorie abstraite, ont nécessairement un caractère arbitraire. Comment justifier ces hypothèses, et, surtout, lesquelles choisir? Peut-être convient-il de surseoir à ce choix jusqu'à ce qu'on ait parcouru la première des deux voies que j'indiquais plus haut, et que l'on ait trouvé, dans la théorie des équations différentielles par exemple, une classification pratique des transcendantes multiformes, qui puisse servir de base à une classification théorique. C'est pour cette raison que, dans les paragraphes qui vont suivre, plusieurs questions seront simplement soulevées qu'il serait nécessaire d'approfondir.

J'établis, dans un premier paragraphe, une relation entre la distribution des points critiques et celle des déterminations de la fonction. Je suis amené à considérer une fonction que j'appelle *fonction limite* ou *branche limite de la fonction multiforme*. Je donne une condition suffisante pour que cette fonction limite soit uniforme.

Dans un second paragraphe, je montre comment on peut représenter par une relation entière les fonctions dont les déterminations convergent vers l'infini pour toute valeur de la variable. Je cherche moyennant quelles hypothèses cette représentation est possible.

J'aborde ensuite l'étude des fonctions définies par une relation implicite entière en x et y, supposée donnée *a priori*. Au sujet de ces fonctions se posent divers problèmes : étude de la distribution des points critiques, extension du théorème de M. Picard sur les fonctions entières. Je signale certains cas favorables où la solution de ces problèmes se trouve simplifiée.

En dernier lieu, je considère les fonctions qui admettent, relativement au théorème de M. Picard, la valeur « exceptionnelle » *zéro*, c'est-à-dire qui ne s'annulent jamais. Je montre que le module de la plus petite détermination d'une telle fonction obéit, au point de vue de la croissance, aux mêmes lois qu'une fonction méromorphe ne s'annulant jamais (c'est-à-dire l'inverse d'une fonction entière). Je signale enfin une classe spéciale de fonctions ne s'annulant pas, dont les diverses branches sont holomorphes au voisinage de $x=\infty$, et dont il est particulièrement facile d'étudier l'allure générale.

Picard (*Émile*). — Sur les équations linéaires aux dérivées partielles du second ordre. (471-474).

Remarques diverses complétant les travaux antérieurs de l'auteur sur l'équation linéaire

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=a\frac{\partial z}{\partial x}+b\frac{\partial z}{\partial y}+cz$$

du type hyperbolique (*Journal de Mathématiques*, 1890; Note ajoutée au Tome IV des *Leçons sur la théorie des surfaces*, par M. Darboux).

Riquier (*Charles*). — Sur l'intégration d'un système d'équations aux dérivées partielles auquel conduit l'étude des déformations finies d'un milieu continu. (475-538).

L'objet de ce Mémoire est l'étude du système

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 = \lambda_1(x, y, z),$$
$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 = \lambda_2(x, y, z),$$
$$\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2 = \lambda_3(x, y, z),$$
$$\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial z} = \mu_1(x, y, z),$$
$$\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial w}{\partial x} = \mu_2(x, y, z),$$
$$\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y} = \mu_3(x, y, z),$$

où u, v, w désignent trois fonctions inconnues et λ_1, λ_2, λ_3, μ_1, μ_2, μ_3 six fonctions données des trois variables indépendantes x, y, z.

Dans cette exposition systématique, nous signalerons, en premier lieu, la démonstration pour les systèmes que M. Riquier appelle *orthoïques* et *orthonomes* d'une règle de passivités simplifiée qui abrège bien des calculs; en second lieu, la détermination des éléments dont on peut disposer arbitrairement dans le choix des fonctions λ_i et μ_i pour que le système proposé soit intégrable, c'est-à-dire la détermination du degré de généralité du système formé par les conditions de possibilité : les fonctions λ_i et μ_i étant en même nombre que ces conditions, trois d'entre elles convenablement choisies (par exemple μ_1, μ_2 et μ_3) sont entièrement arbitraires.

Davidoglou (A.). — Étude de l'équation différentielle

$$\frac{d^2}{dx^2}\left[\theta(x)\frac{d^2 y}{dx^2}\right] = k\varphi(x)y.$$

(539-563).

Introduction. — L'équation différentielle dont l'étude fait l'objet de ce Mémoire se rencontre dans la théorie des vibrations des verges. Dans le cas où $\theta(x) = \text{const.}$, l'équation résultante a été étudiée dans ma thèse; on y a démontré l'existence d'une suite indéfinie de *valeurs remarquables* du paramètre k et c'est ce même problème que nous allons aborder dans le cas général. D'une manière précise, étant donné un intervalle ab, il sera démontré qu'il existe une suite infinie de valeurs de k, k_1, k_2, ... toutes positives et une suite correspondante d'intégrales $y_1(x)$, $y_2(x)$, ... telles que l'on ait

$$\frac{d^2}{dx^2}\left[\theta(x)\frac{d^2 y_i}{dx^2}\right] = k_i\varphi(x)y_i(x),$$

la courbe intégrale $y_i(x)$ étant doublement tangente à Ox en $x = a$ et $x = b$ et s'annulant $i - 1$ fois entre a et b.

La méthode employée est tout autre que celle dont je me suis servi dans ma

thèse : en particulier, il ne sera pas fait usage des constantes de Schwartz-Picard. Tout ce qui précède se rapporte au cas où la verge est encastrée en a et en b. Je termine par quelques remarques sur les solutions périodiques.

L. R.

JOURNAL DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

PUBLIÉ PAR LE CONSEIL D'INSTRUCTION DE CET ÉTABLISSEMENT.

IIe série, Cahier V; 1900 (1).

Caspari (*E.*). — Azimut, latitude et longitude par des hauteurs égales d'astres. (1-46).

Maillet (*Edm.*). — Sur les groupes de classe $N - u$ et de degré N au moins $u - 1$ fois transitifs. (46-78).

Dans la première division de ce Mémoire, l'auteur étudie les groupes G de classe $N - u$ et de degré N au moins $u - 1$ fois transitifs qui ne contiennent pas le groupe alterné, en distinguant ceux qui sont au moins u fois transitifs ($u \geq 3$) de ceux qui le sont $u - 1$ fois et $u - 1$ fois seulement.

La seconde division est consacrée aux groupes n fois transitifs de classe $N - u$ et de degré N.

La troisième traite des groupes $u - 1$ fois et $u - 1$ fois seulement transitifs de classe $N - u$ et de degré N.

Un résumé de ce travail a paru dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* en janvier 1899.

Lecornu (*L.*). — Sur l'équilibre d'élasticité du tore. (79-100).

On connaît depuis longtemps l'état d'équilibre d'un cylindre creux, circulaire et d'épaisseur constante fermé à ses deux extrémités et soumis intérieurement et extérieurement à des pressions normales et uniformes; tout au moins, on sait résoudre ce problème quand la longueur du cylindre est assez grande, par rapport aux dimensions transversales, pour que, dans la partie moyenne, chaque section annulaire perpendiculaire à l'axe éprouve une traction sensiblement parallèle à l'axe et de même intensité en tous les points.

Le cas d'un tore creux, d'épaisseur constante, peut être regardé comme une généralisation de celui du cylindre. On vérifie immédiatement que toutes les sections transversales travaillent dans des conditions identiques et sont solli-

(1) Voir *Bulletin*, t. XXVI_2, p. 140.

citées par des tractions rigoureusement normales. Mais il n'y a aucune raison pour que la traction ait la même valeur en tous les points de chaque section; il n'est pas non plus nécessaire que les sections conservent la forme circulaire.

A la vérité les *bandages pneumatiques* si usités maintenant sont des bandages complexes; mais leur étude doit être précédée par celle du bandage simple qui constitue un tore de composition uniforme.

C'est pourquoi M. Lecornu examine la déformation élastique d'une enveloppe en forme de tore, soumise intérieurement et extérieurement à des pressions données P_0 et P_1 ($P_0 > P_1$). Il admet que la déformation est assez faible pour qu'on puisse appliquer les formules ordinaires de l'élasticité. En outre, en désignant par R_0 et R_1 les deux rayons (intérieur et extérieur) de la section méridienne et par a le rayon moyen équatorial, il considère les rapports $\frac{R_0}{a}$, $\frac{R_1}{a}$ comme des quantités très petites, ce qui lui permet de pousser les calculs jusqu'au bout.

Quand a est infini, on est ramené au cas du cylindre de longueur indéfinie. Les résultats concernant le cylindre servent à M. Lecornu comme première approximation. Pour effectuer une seconde approximation, où il est tenu compte des premières puissances de $\frac{R_0}{a}$ et de $\frac{R_1}{a}$, l'auteur observe que les diverses inconnues du problème sont fonctions d'un certain nombre d'éléments indépendants, parmi lesquels figure le rayon a; si, laissant toutes choses égales d'ailleurs, on fait varier uniquement a, les inconnues peuvent être regardées comme des fonctions de cette seule variable et chacune d'elles peut se développer en série sous la forme

$$E(a) + \frac{A_1}{a} + \frac{A_2}{a^2} + \ldots,$$

$E(a)$ désignant une série entière en a et les A des coefficients indépendants de a. Supposant connue la fonction $E(a)$, tout revient à déterminer le coefficient A_1.

Appell (*P.*). — Sur l'équilibre d'un flotteur avec un chargement liquide. (100-117).

Extension de la méthode de M. Guyou pour l'équilibre d'un flotteur sans liquide intérieur. La discussion de la stabilité est faite par des moyens purement géométriques et ramenée à ce problème :

Étant données deux surfaces convexes, la surface (C) des centres de carène et la surface (G) lieu du centre de gravité totale du système formé par le flotteur et les liquides, trouver la plus courte distance de deux plans tangents parallèles menés respectivement à ces deux surfaces, de telle façon que les deux surfaces soient d'un même côté des deux plans.

M. Appell simplifie encore ce résultat en n'introduisant qu'une seule surface, au lieu de deux. Sa méthode s'applique même si le flotteur contient, outre les liquides intérieurs, des corps pesants suspendus par des fils à des points invariablement liés au flotteur ou, en général, des corps pesants dont les centres de gravité sont assujettis à décrire des surfaces fixes par rapport au flotteur.

Carvallo (*E.*). — Théorie du mouvement du monocycle et de la

bicyclette. (Première Partie : cerceaux et monocycle). (119-188).

Cette première Partie est consacrée au cerceau et au monocycle.

Le Chapitre I traite exclusivement du cerceau : cinématique du cerceau; équations de son mouvement; équilibre, stabilité, dérapage; discussion des états d'équilibre; compléments pratiques à la discussion.

Le Chapitre II est relatif au monocycle : équations différentielles de son mouvement; marche du cycle; équilibre; stabilité.

Cahier VI; 1901.

Carvallo (*E.*). — Théorie du mouvement du monocycle et de la bicyclette. (Deuxième Partie : théorie de la bicyclette). (1-118).

Le Chapitre I a pour objet la géométrie de la bicyclette : équations du problème; cas où le cadre est vertical; cas où le cadre n'est pas vertical.

Au Chapitre II sont abordées les propriétés cinématiques et statiques : cinématique de la bicyclette; application des formules à l'étude de l'équilibre au repos.

Les équations de Lagrange n'étant pas applicables aux paramètres choisis, l'auteur expose au Chapitre III de nouvelles méthodes : adaptation de la méthode de Lagrange à la mise en équations des problèmes du monocycle et du cerceau; méthode générale pour l'étude des problèmes de stabilité.

Au Chapitre IV est étudiée la dynamique de la bicyclette : équilibre avec les mains; équilibre sans les mains; stabilité de l'équilibre avec les mains; équations du mouvement dans un état infiniment voisin de la marche rectiligne; stabilité de l'équilibre sans les mains en marche rectiligne.

Andrade (*J.*). — A propos de deux problèmes de probabilités et errata à un Mémoire du 64e Cahier, 1894. (119-120).

Boulanger (*A.*). — Détermination des invariants différentiels fondamentaux attachés au groupe G_{168} de M. Klein. (121-146).

Introduction. — L'intégration algébrique des équations différentielles linéaires et homogènes du troisième ordre à coefficients rationnels et des systèmes

$$r = a_1 p + a_2 q + a_3 z,$$
$$s = b_1 p + b_2 q + b_3 z,$$
$$t = c_1 p + c_2 q + c_3 z,$$

dont l'intégrale dépend linéairement de trois constantes arbitraires et dont les coefficients a, b, c sont rationnels en x, y, peut être regardée comme une question parfaitement résolue, une fois calculés, pour chaque groupe discontinu fini de transformations homographiques, quatre invariants différentiels fondamentaux I, J, M, N, analogues à l'invariant schwarzien.

Ces invariants, signalés par M. Painlevé, sont définis par les relations

$$\mathrm{I}\nabla = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\frac{\partial u}{\partial x},$$

$$3\,\mathrm{M}\nabla = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\frac{\partial u}{\partial y} + 2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial u}{\partial x}\right),$$

où

$$\nabla = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y},$$

et où u, v sont les variables de la transformation, x, y les fonctions fondamentales invariantes attachées au groupe considéré.

J et N se déduisent respectivement de I et M en permutant à la fois (u, v) et (x, y).

Les quatre fonctions I, J, M, N rationnelles en (u, v) et invariantes par les substitutions du groupe, sont des fonctions rationnelles de x et de y. J'en ai donné précédemment le calcul explicite pour le groupe G_{216} de Hesse; je me propose de traiter maintenant le cas du groupe G_{168} de M. Klein.

En dehors de leur utilité dans le problème indiqué plus haut, ces invariants se présentent dans une foule d'autres questions (notamment en Géométrie projective). Leur détermination offre donc un certain intérêt.

Maillet (*Edm.*). — Sur les graphiques et les formules d'annonces de crues. (147-163).

Ribière (*C.*). — Sur divers cas de la flexion des cylindres à base circulaire. (165-192).

« De Saint-Venant, dit l'auteur dans son Introduction, a résolu le problème de l'équilibre d'élasticité des corps cylindriques et prismatiques dont une base est fixe et l'autre soumise à des forces données, aucune force n'agissant sur la surface extérieure. Il suppose que, dans l'intérieur du corps, les fibres longitudinales ne supportent aucun effort perpendiculaire à leur longueur. Pour cela, il est nécessaire que les forces extérieures soient réparties sur la base libre d'une façon déterminée....

» M. Karl Pearson a étendu la solution de Saint-Venant au cas où la pièce est soumise, non plus à une charge isolée, mais à son propre poids et à un système continu de charges sur sa face latérale. Sa théorie ne peut s'appliquer qu'au cas où les dimensions transversales sont petites par rapport à la longueur....

» M. Chree, reprenant les équations fondamentales de l'équilibre d'élasticité en coordonnées cylindriques, antérieurement établies par Lamé, a donné la forme analytique de solutions de ces équations par des séries à termes formés de trois facteurs contenant chacun une seule des trois coordonnées.

» Nous avons nous-même, dans un précédent travail, donné des solutions de ce genre pour les prismes rectangles. Nous avons pu résoudre le cas de prismes de cette forme, chargés sur leur face supérieure et encastrés à leurs extrémités ou, ce qui revient au même, reposant sur une série d'appuis équidistants. Les formules obtenues dans ce cas montrent que la répartition des efforts de flexion s'éloigne considérablement de celle que suppose la théorie usuelle, dès que la hauteur de la pièce dépasse le cinquième de la longueur.

Elles font ressortir la façon toute spéciale dont se comportent les pièces épaisses.

» Nous nous proposons, dans le présent travail, de résoudre de même et de discuter au point de vue mécanique le problème de l'équilibre d'élasticité d'un cylindre à base circulaire, horizontal et de longueur indéfinie, reposant de distance en distance sur des appuis également espacés et supportant à sa partie supérieure des charges verticales, symétriques, dans chaque intervalle, à la fois par rapport à la section méridienne et par rapport au méridien vertical. »

Cahier VII; 1902.

Cornu (*A.*). — Étude de l'absorption atmosphérique des radiations visibles par l'observation spectrale des faisceaux électriques de la tour Eiffel en 1889. (1-16).

Lecornu (*L.*). — Sur les volants élastiques. (16-27).

L'ingénieur français Raffard, mort en 1898, avait imaginé un volant dont le moment d'inertie était rendu automatiquement variable; mais il n'avait pas donné la théorie de son appareil (*volant isochrone*). M. Lecornu soumet la question à l'Analyse mathématique et arrive aux conclusions suivantes :

Dans tous les cas, par une application judicieuse du procédé de Raffard, on peut réellement améliorer les conditions de fonctionnement du volant d'une machine donnée, soit qu'on diminue le poids du volant sans diminuer la régularité, soit, au contraire, qu'on augmente la régularité en conservant le même poids au volant. Or, il est évidemment avantageux, au double point de vue des frottements et de la dépense d'installation, d'employer un volant aussi léger que possible.

Callandreau (*O.*). — Sur le calcul numérique des coefficients dans le développement de la fonction perturbatrice. (29-99).

Combebiac. — Calcul des triquaternions; nouvelle analyse géométrique. (101-219).

L'objet de ce Mémoire est d'établir une analyse géométrique se passant de tout système de référence.

« Les procédés exposés dans l'*Ausdehnungslehre* de Grassmann réaliseraient ce but, dit l'auteur, s'ils étaient susceptibles d'une réglementation absolument systématique, condition à laquelle ils ne satisfont pas, à notre avis.

» Le calcul des quaternions, au contraire, constitue une analyse géométrique dans le vrai sens du mot. Il est susceptible de s'assimiler, en les simplifiant, toutes les méthodes de la Géométrie analytique. Il se passe d'axes de coordonnées, mais il a besoin d'une origine, ce qui laisse subsister encore dans les formules des éléments étrangers aux questions traitées, sauf toutefois dans les

questions ressortant à la Géométrie différentielle, où l'origine disparaît complètement et où l'appareil analytique atteint toute la simplicité possible.

» C'est aux systèmes numériques complexes comprenant celui des quaternions que nous avons demandé la réalisation de notre but, et la solution nous a été fournie par le système numérique des triquaternions. »

Après avoir, dans un premier Chapitre, établi les principes du calcul des triquaternions (système numérique quaternionien à douze unités principales), M. Combebiac étudie (Chapitre II) les déplacements sans déformations. Il aborde ensuite (Chapitre III) la théorie des complexes linéaires et termine en appliquant (Chapitre IV) les triquaternions à la démonstration des propriétés fondamentales des surfaces du second degré.

Cahier VIII; 1903.

Maillet (Edm.). — Sur les lois des montées de Belgrand et les formules du débit d'un cours d'eau. (1-16).

Autonne (Léon). — Sur les substitutions crémoniennes de l'espace. (Premier Mémoire). (16-73).

Ce travail fait suite au Mémoire de l'auteur *Sur les formes quaternaires à deux séries de variables* qui a paru dans le *Recueil des Mémoires couronnés de l'Académie de Belgique* (t. LIX, 1901) et dont la terminologie et les notations seront conservées ici.

Les deux premiers Chapitres ont pour objet la construction d'une crémonienne s telle que, entre une série de coordonnées (x_i ou u_i) de l'élément (x, u) et une série de coordonnées (y_i ou v_i) de l'élément image (y, v) existent deux et seulement deux relations distinctes, obtenues en annulant deux formes bilinéaires biquaternaires. Il est prouvé que la crémonienne cherchée peut se mettre sous la forme

$$s = \left(\begin{array}{c|c} 11 & 11 \\ 11 & 11 \end{array}\right).$$

Au Chapitre III, l'auteur montre que les types

$$\left(\begin{array}{c|c} 11 & 11 \\ .. & .. \end{array}\right), \quad \left(\begin{array}{c|c} .. & .. \\ 11 & 11 \end{array}\right), \quad \left(\begin{array}{c|c} 11 & .. \\ .. & \bar{1}1 \end{array}\right), \quad \left(\begin{array}{c|c} .. & 11 \\ 11 & .. \end{array}\right)$$

ne fournissent aucune autre crémonienne que la précédente.

Ce Chapitre IV contient l'interprétation géométrique de la crémonienne s. On considère le faisceau des ∞ cônes-quadriques S qui touchent un plan donné D tout le long d'une droite fixe ($\mathfrak{D}$), tout en passant par une conique C, tracée sur un plan P; alors le sommet Q de S parcourt ($\mathfrak{D}$); si Q est connu, S l'est aussi; on peut alors construire l'élément image (y, v) d'un élément donné (x, u). La crémonienne s, multipliée devant et derrière par des collinéations conve-

nables, se confond avec une transformation de contact considérée incidemment par Sophus Lie.

Au Chapitre V se trouve la discussion de différents cas particuliers, qui ne fournissent pas de crémonienne.

Maillet (Edm.). — Sur les lignes de décroissance maxima des modules et les équations algébriques ou transcendantes. (75-95).

Si une fonction $f(z)$ monodrome aux environs d'un point a est différente de zéro en ce point et si $f^{(n)}(z)$ est la première des dérivées de $f(z)$ qui ne s'annule pas pour $z=a$, on sait que $f(z)$, aux environs de a, prend n fois toutes les valeurs possibles voisines de $f(a)$. Au point a, il y a alors n directions suivant lesquelles la décroissance de $f(z)$ est maxima. Ces lignes dont l'équation différentielle est

$$\frac{dP}{P} = \frac{dQ}{Q},$$

quand on pose

$$z = P + Qi,$$

sont étudiées par M. Maillet sous le nom de *lignes de décroissance maxima des modules.* Ces lignes aboutissent aux zéros, aux infinis de $f(z)$ ou aux limites du domaine de monodromie. On a, de plus, le théorème suivant :

Soit $f(z)$ une fonction monodrome dans tout le plan à distance finie et n'ayant d'autres points critiques à distance finie que des pôles : $f(z)$ aura forcément un zéro à distance finie, si l'on peut trouver une ligne de décroissance maxima des modules au moins le long de laquelle le module de $f'(z)$ ne tende pas uniformément vers zéro quand z s'éloigne à l'infini le long de cette ligne.

De là résultent comme conséquences immédiates le théorème de d'Alembert sur les racines des polynomes et l'existence d'une racine au moins dans un parallélogramme des périodes pour l'équation $f(z)=0$ quand la fonction $f'(z)$ est doublement périodique.

M. Maillet obtient ensuite un théorème analogue pour les grandes valeurs de $|z|$ relativement aux équations

$$f(z) + \varphi\left(\frac{1}{z}\right) = \alpha,$$

où $f'(z)$ est elliptique et où $\varphi\left(\frac{1}{z}\right)$ tend vers zéro avec $\frac{1}{z}$.

Il considère aussi les lignes de modules constants, qui sont les trajectoires orthogonales des lignes de décroissance maxima des modules.

Enfin, il retrouve et complète divers résultats qu'il avait précédemment fait connaître; d'où le théorème suivant :

Soit $f(z)$ une fonction quasi-algébrique

$$\sum_0^\infty c_n z^n$$

(les $c_n \neq 0$ décroissant suffisamment vite avec $\frac{1}{n}$). Cette fonction possède toujours, dès que n dépasse une certaine limite, au moins une racine de la forme

$$Y_n = -\frac{c_{n-1}}{c_n}(1 + \varepsilon_n),$$

ε_n étant d'autant plus petit que $\frac{c_n}{c_{n-1}}$ est plus petit : entre les points Y_n du plan des z on peut toujours trouver une infinité de couronnes circulaires, ayant pour centre l'origine, où le module de $f(z)$ croît au delà de toute limite quand on considère des couronnes de plus en plus éloignées. Les lignes de module constant déterminé μ limite ou bien ont tous leurs points à distance finie, ou bien environnent chacun des points Y_n de façon à ne pas se couper quand Y_n augmente indéfiniment; ce sont des lignes fermées.

d'Ocagne (Maurice). — Exposé synthétique des principes fondamentaux de la Nomographie. (97-158).

La Nomographie a, comme on sait, pour but l'étude de la représentation des équations à un nombre quelconque de variables au moyen d'éléments cotés figurés sur un plan ou sur plusieurs plans superposés, mobiles les uns par rapport aux autres.

Dans son *Traité de Nomographie,* M. d'Ocagne, s'adressant principalement à ceux qui peuvent avoir à effectuer des applications pratiques, avait eu soin de commencer par les cas les plus simples, les plus usuels, pour n'arriver que progressivement à la théorie exposée dans toute son ampleur.

Estimant qu'il y aurait plus d'intérêt pour les mathématiciens à suivre la marche inverse, M. d'Ocagne pose ici tout d'abord dans les termes les plus généraux le problème de la représentation graphique des équations, pour déduire ensuite de sa solution les diverses méthodes pratiques. Le présent exposé définit donc tous les modes de représentation plane applicables à des êtres géométriques à n dimensions.

Il renferme nombre de remarques et de constructions inédites; mais il présente surtout une classification nouvelle des types fondamentaux de monogrammes, fondée uniquement sur leur structure. M. d'Ocagne a réalisé cette classification en étudiant tous les modes possibles de répartition des éléments sans cote, ou *constants,* entre les divers contacts dont la simultanéité définit le mode d'emploi du nomogramme. Il a pu ainsi ramener tous les nomogrammes à vingt types canoniques, dont un à un seul plan et dix-neuf à deux plans, tous les autres pouvant être obtenus par combinaison de ceux-ci.

L. R.

BIBLIOTHECA MATHEMATICA.

Le journal d'histoire des Mathématiques *Bibliotheca mathematica* a été fondé en 1887 par M. G. Eneström. Les années 1887-1899 ont été publiées à Stockholm; à partir de l'an 1900, le journal est édité à Leipzig, comme auparavant sous la direction de de M. G. Eneström.

Pendant les années 1884-1886 paraissait un journal portant le nom *Bibliotheca mathematica* et rédigé aussi par M. G. Eneström. Ce journal contenait essentiellement des listes trimestrielles des publications récentes dans le domaine des Mathématiques, mais il y était aussi quelques très courtes Notes d'histoire des Mathématiques, dues pour la plupart au rédacteur (1). Les années 1884 et 1885 de ce journal ont paru en appendices aux *Acta mathematica*. Le journal fondé en 1887 a été publié tout à fait indépendamment des *Acta mathematica*. Pour distinguer les années du journal d'histoire des Mathématiques fondé en 1887 de celles du bulletin bibliographique publié en 1884-1886, celles-là portent sur les feuillets de titre l'indication : *Nouvelle série*. En

(1) Voici, du reste, les titres de ces quelques Notes :

Eneström (*G.*). — Notice sur un Mémoire de Chr. Goldbach, relatif à la sommation des séries, publié à Stockholm en 1718. (1884, 15-16).

Eneström (*G.*). — Notice sur une nouvelle édition de Diofantos, préparée par M. Paul Tannery. (1884, 47-48).

Eneström (*G.*). — Notice sur les versions latines des éléments d'Euclide, publiées en Suède. (1884, 79-80).

Eneström (*G.*). — Notice sur les premières Tables de logarithmes publiées en Suède. (1884, 121-124).

Eneström (*G.*). — Sur l'origine du symbole x employé comme signe d'une quantité inconnue. (1885, 41-44).

Favaro (*A.*). — Notice sur les manuscrits de Mathématiques de la Collection Libri-Ashburnham achetée par le Gouvernement italien. (1885, 44-46).

Eneström (*G.*). — Notice sur les écrits mathématiques d'auteurs étrangers

conséquence, les années à partir de 1900, où le journal a été essentiellement amplifié, portent sur les feuillets de titre l'indication : *Dritte Folge* (troisième série).

Dans ce qui suit, un astérisque signifie que l'article dont il s'agit

---

publiés en Suède ou traduits en suédois. (1885, 46-47, 92-94; 1886, 45-57, 92-95, 140-141).

Eneström (*G.*). — Notice bibliographique sur un Traité de perspective publié par Desargues en 1636. (1885, 89-90).

Valentin (*G.*). — Notice sur une bibliographie générale mathématique. (1885, 90-92; en allemand).

Günther (*S.*). — L'invention du *Baculus geometricus*. (1885, 137-140; en allemand).

De Marchi (*L.*). — Sur trois manuscrits de Maurolicio qui se trouvent dans la bibliothèque Vittorio Emanuele de Rome. (1885, 141-144, 193-195; en italien).

Eneström (*G.*). — Notice bibliographique sur un écrit de Condorcet intitulé : *Essais d'Analyse*. (1885, 191-192).

Cantor (*G.*). — Ludwig Scheeffer (1859-1885). Nécrologie. (1885, 197-199; en allemand).

Eneström (*G.*), *Tannery* (*P.*), *Boncompagni* (*B.*). — Questions et réponses. (1885, 48, 94, 144, 196, 199-200).

Boncompagni (*B.*). — Sur l'Histoire des Sciences mathématiques et astronomiques de M. Maximilien Marie. (1886, 43-45, 87-90).

De Marchi (*L.*). — Sur l'orthographe du nom du mathématicien Maurolicio. (1886, 90-92; en italien).

Günther (*S.*). — Albert Dürer, un des fondateurs de la théorie moderne des courbes. (1886, 137-140; en allemand).

Mansion (*P.*) et *Eneström* (*G.*). — Notes historiques sur la formule générale d'interpolation de Newton. (1886, 141-144).

Tannery (*P.*). — Sur la représentation des fractions chez les Grecs. (1886, 235-236).

Eneström (*G.*). — Sur une formule d'approximation des racines carrées donnée par Alkalsadi. (1886, 236-239).

Pringsheim (*A.*). — Notice historique sur l'édition originale de la *Behend und hübsch Rechnung* de Chr. Rudolff (1884, 239-244).

Tannery (*P.*), *Eneström* (*G.*), *Riccardi* (*P.*). — Questions et réponses. (1886, 47-48, 95-96, 144, 244).

n'est pas rédigé en français, et que, pour cette raison, le titre a été traduit en français.

Bibliotheca mathematica. Journal d'histoire des Mathématiques. Nouvelle série (1).

Première année (1887).

Avant-propos. (1-2).

Eneström (*G.*). — Aperçu des recherches récentes sur l'histoire des Mathématiques. (3-7).

**Günther* (*S.*). — La cycloïde était-elle connue dès le XVIe siècle? (8-14).

**Riccardi* (*P.*). — Note sur une édition du *Nuncius sidereus* de Galilée. (15-16).

Tannery (*P.*). — L'extraction des racines carrées d'après Nicolas Chuquet. (17-21).

**Allman* (*G.-J.*). — Sur le nom du théorème appelé *théorème du gnomon*. (22).

Eneström (*G.*). — Nouvelle Notice sur un Mémoire de Chr. Goldbach, relatif à la sommation des séries, publié à Stockholm en 1718. (23-24).

**Heiberg* (*J.-L.*). — Le mathématicien byzantin Léon. (33-36).

Tannery (*P.*). — Études sur Diophante. I-III. (37-43, 81-88, 103-108).

**Steinschneider* (*M.*). — Les fils de Mousa ben Schakir. (44-48, 71-75).

---

(1) Le titre est en français et en allemand. Outre des articles originaux (indiqués ci-dessus) chaque cahier contient des analyses d'ouvrages d'histoire des Mathématiques et une liste de publications récentes dans ce domaine.

**Favaro* (*A.*). — Huit années d'enseignement d'histoire des Mathématiques à l'Université de Padoue. (49-54).

**Günther* (*S.*). — Notice sur l'histoire de la Climatologie. (65-69).

**Hunrath* (*K.*). — Sur la signification du mot *algorismus*. (70).

**Christensen* (*S.-A.*). — La première détermination de la longueur d'une courbe. (76-80).

**Steinschneider* (*M.*). — Traductions arabes, hébraïques et latines de Geminus. (97-99).

**Wohlwill* (*E.*). — L'édition de Prague du *Nuncius sidereus*. (100-102).

Le Paige (*C.*). — Sur un théorème attribué à La Hire. (109).

Eneström (*G.*), **Baltzer* (*R.*), **Favaro* (*A.*), **Beman* (*W.-W.*), **Hunrath* (*K.*). — Questions et réponses. (32, 64, 96, 120).

Deuxième année (1888).

Bjerknes (*C.-A.*). — La tentative de Degen de généraliser le théorème d'addition d'Euler. (1-2).

Tannery (*P.*). — Études sur Diophante. IV. (3-6).

**Cantor* (*M.*). — Ahmed et son livre sur les proportions. (7-9).

Le Paige (*C.*). — Sur une traduction néerlandaise de la méthode de perspective de Girard Desargues et sur les *Leçons de ténèbres*. (10-12).

**Steinschneider* (*M.*). — Sur le mot *almanach*. (13-16).

Eneström (*G.*). — Sur trois petits Traités mathématiques attribués au savant suédois Peder Månsson. (17-18).

**Wohlwill* (*E.*). — Léonard de Vinci a-t-il connu la loi d'inertie? (19-26).

Mansion (*P.*). — Sur le Cours d'histoire des Mathématiques de l'Université de Gand. (33-35).

Mansion (*P.*). — Note historique sur la règle de médiation. (36).

**Weissenborn* (*H.*). — Sur les différents noms de l'instrument appelé *carré géométrique*. (37).

Eneström (*G.*). — Sur un point de l'histoire du problème des isopérimètres. (38).

**Loria* (*G.*). — Notices historiques sur la Géométrie énumérative. (39-48, 67-80).

**Steinschneider* (*M.*). — Iusuf ben Ibrahim et Ahmed ben Iusuf. (49-52, 111-117).

**Curtze* (*M.*). — Sur un théorème attribué à De La Hire. (65-66).

**Günther* (*S.*). — Sur une connexion singulière entre Pappus et Kepler. (81-87).

Narducci (*H.*). — Sur l'optique de Claude Ptolémée. (97-102).

Bobynin (*V.*). — De l'étude sur l'histoire des Mathématiques en Russie. (103-110).

Eneström (*G.*), *Académie danoise des Sciences*, *Mansion* (*P.*), **Beman* (*W-W.*). — Questions. (32, 63-64, 96, 120).

Troisième année (1889).

Eneström (*G.*). — Bibliographie suédoise de l'histoire des Mathématiques, 1667-1888. (1-14).

**Curtze* (*M.*). — Sur le *Liber de similibus arcubus* d'Ahmed ben Jusuf. (15-16).

**Suter* (*H.*). — Les thèses de mathématiques et de philosophie naturelle à l'Université de Leipzig, 1512-1526. (17-23).

**Loria* (*G.*). — Additions aux Notices historiques sur la géométrie énumérative. (23-27).

Eneström (*G.*). — Sur le premier emploi du symbole π pour 3,14159.... (28).

**Wolf* (*R.*). — Deux petites Notices sur l'histoire des Mathématiques au commencement du XVIIe siècle. (33-34).

**Steinschneider* (*M.*). — Sur quelques points de l'histoire des Mathématiques. (35-38).

**Riccardi* (*P.*). — Sur quelques Ouvrages italiens de perspective omis dans l'*Histoire de la perspective* de M. Poudra. (39-42).

Dickstein (*S.*). — Note bibliographique sur les études historico-mathématiques en Pologne. (43-51).

Eneström (*G.*). — Sur un théorème de Kepler équivalant à l'intégration d'une fonction trigonométrique. (65-66).

**Loria* (*G.*). — Notice sur quelques écrits relatifs aux polygones de Poncelet. (67-74).

**Christensen* (*S.-A.*) et *Heiberg* (*J.-L.*). — Notice bibliographique sur l'étude de l'histoire des Mathématiques en Danemark. (75-83).

**Holst* (*E.*). — Notice bibliographique sur l'étude de l'histoire des Mathématiques en Norvège. (97-103).

Bobynin (*V.*). — Quelques mots sur l'histoire des connaissances mathématiques antérieures à la science. (104-108).

**Favaro* (*A.*). — Le *Bullettino di bibliografia e di storia delle scienze matematiche e fisiche*, publié par D.-B. Boncompagni. 1868-1887. (109-112).

**Favaro* (*A.*). — Notice sur les sources bibliographiques de l'étude de l'histoire des Mathématiques en Italie. (113-115).

Henry (*Ch.*), **Institut vénitien des sciences*, *Eneström* (*G.*),

Mansion (*P.*), **Loria* (*G.*). — Questions et réponses. (32, 64, 96, 120).

Quatrième année (1890).

Eneström (*G.*). — Programme d'un cours universitaire d'histoire des Mathématiques. (1-10).

**Steinschneider* (*M.*). — Sur une traduction libre en latin de la *Saphea* de Zarkali. (11-12).

Vicuña (*G.*). — Bibliographie espagnole de l'histoire des Mathématiques. (13-21).

Eneström (*G.*). — Note historique sur la somme des valeurs inverses des nombres carrés. (22-24).

Vicuña (*G.*). — Sur quelques écrits mathématiques publiés en Espagne aux XVIe et XVIIe siècles. (33-36).

Eneström (*G.*). — Sur les bibliographies des sciences mathématiques. (37-42).

Jonquières (*E. de*). — Écrit posthume de Descartes intitulé : *De solidorum elementis*. Texte latin, revu et accompagné de quelques notes explicatives. (43-55).

**Riccardi* (*P.*). — Sur une nouvelle bibliographie mathématique italienne du XIXe siècle. (56).

**Steinschneider* (*M.*). — Sur les manuscrits mathématiques de la collection Amplonienne. (65-72).

**Günther* (*S.*). — Le premier emploi du *Baculus Jacobi* pour la détermination de la latitude d'un lieu. (73-80).

**Favaro* (*A.*). — Sur un traité anonyme sur l'Astrolabe dû à Prosdocimo de'Beldomandi. (81-90).

Teixeira (*F.-G.*). — Sur les écrits d'histoire des Mathématiques publiés en Portugal. (91-92).

**Suter* (*H.*). — Notice bibliographique sur les études d'histoire des Mathématiques en Suisse. (97-106).

**Steinschneider* (*M.*). — Sur quelques points de l'histoire des Mathématiques (continuation). (107-108).

Bobynin (*V.*). — Sur le procédé employé dans le papyrus de Rhind pour réduire des fractions en quantièmes. (109-112).

**Riccardi* (*P.*). — Sur le traité de Prosdocimo de'Beldomandi relatif à l'Astrolabe. (113-114).

Eneström (*G.*). — Questions. (32, 64, 96, 120).

Cinquième année (1891).

**Loria* (*G.*). — Notice sur la vie et les travaux de Felice Casorati. (1-12).

Bierens de Haan (*D.*). — Bibliographie de l'histoire des sciences mathématiques aux Pays-Bas. (13-22).

**Favaro* (*A.*). — Notice historique sur les applications de la spirale logarithmique. (23-25).

Eneström (*G.*). — Gumersindo Vicuña. (1840-1890) (33-34).

**Ball* (*W.-W.-R.*). — La classification de Newton des courbes cubiques. (35-40).

**Steinschneider* (*M.*). — Sur les manuscrits mathématiques de la collection Amplonienne (continuation). (41-52, 65-73).

**Halsted* (*G.-B.*). — Sur l'enseignement des Mathématiques à l'Université de Texas. (53).

**Cajori* (*F.*). — Aperçu historique de l'étude des Mathématiques aux Etats-Unis. (74-78).

Bobynin (*V.*). — Programme du cours de l'histoire des Mathématiques à l'Université de Moskwa. (79-88).

Eneström (*G.*). — Note historique sur les symboles qui servent à désigner des fonctions quelconques de variables données. (89-90).

Vivanti (*G.*). — Sur une classe de grandeurs infiniment petites considérée par Newton. (97-98).

**Loria* (*G.*). — Exposé de quelques recherches concernant l'existence de racines dans les équations algébriques. (99-112).

**Steinschneider* (*M.*). — Sur quelques points de l'histoire des Mathématiques (continuation). (113-116).

Eneström (*G.*), *Académie des Sciences de Madrid.* — Questions. (32, 64, 96, 119).

Sixième année (1892).

Bobynin (*V.*). — Sur l'œuvre des Grecs dans le développement des Mathématiques. (1-2).

**Suter* (*H.*). — Sur la traduction d'Euclide par Nassir ed-Din. (3-6).

**Steinschneider* (*M.*). — Sur quelques points de l'histoire des mathématiques (continuation). (7-8).

Vivanti (*G.*). — Notice historique sur la théorie des ensembles. (9-25).

**Segre* (*C.*). — Sur l'histoire du principe de correspondance et des systèmes de courbes. (33-47).

Dickstein (*S.*). — Sur les découvertes mathématiques de Wronski. (48-52, 85-90).

**Steinschneider* (*M.*). — Les traducteurs et les commentateurs arabes de l'*Almageste*. (53-62).

**Besthorn* (*R.-O.*). — Le commentaire de Simplicius sur les *Eléments* d'Euclide. (65-66).

**Favaro* (*A.*). — Études italiennes sur l'histoire des Mathématiques. (67-84).

**Loria* (*G.*). — Conjectures et recherches sur l'arithmétique des anciens Égyptiens. (97-109).

Bobynin (*V.*). — Progrès successifs des sciences mathématiques chez les peuples de l'Europe. (110-114).

Eneström (*G.*). — Questions. (32, 64, 96, 120).

Septième année (1893).

**Suter* (*H.*). — Sur l'histoire de la Trigonométrie. (1-8).

**Dickstein* (*S.*). — Sur les découvertes mathématiques de Wronski (continuation). (9-14).

**Favaro* (*A.*). — Sur une prétendue seconde édition de l'*Algèbre* de Rafaël Bombelli. (15-17).

Bobynin (*V.*). — Sur la propagation des signes numériques cunéiformes. (18-20).

**Weissenborn* (*H.*). — Sur le *Josephus sapiens* ou *Josephus hispanus* mentionné par Gerbert. (21-23).

**Valentin* (*G.*). — Les deux éditions des *Éléments* d'Euclide publiées en 1482. (33-38).

**Loria* (*G.*). — L'action présente et les problèmes actuels dans le domaine de l'histoire des Mathématiques. (39-46).

**Loria* (*G.*). — Nouvelles Notices sur le théorème fondamental de la théorie des équations algébriques. (47-50).

**Steinschneider* (*M.*). — Traductions en hébreu d'ouvrages mathématiques. (51-53).

**Riccardi* (*P.*). — Sur un manuscrit hébreu contenant quelques traités de Mathématiques et d'Astronomie. (54-56).

Steinschneider (M.). — L'histoire des Mathématiques chez les Juifs. (65-72, 105-112).

**Steinschneider (M.).* — Sur quelques points de l'histoire des Mathématiques (fin). (73-74).

**Zanotti Bianco (O.).* — Notice historique sur la variation des latitudes. (75-78).

**Loria (G.).* — Un nouveau document sur l'Arithmétique des Grecs et des Égyptiens. (79-89).

Zeuthen (H.-G.). — Note sur la résolution géométrique d'une équation du 3e degré par Archimède. (97-104).

**Valentin (G.).* — Un écrit rare sur la trisection d'un angle. (113-114).

**Riccardi (P.), Eneström (G.).* — Remarques et questions. (31-32, 64, 96, 120).

Huitième année (1894).

Vivanti (G.). — Note sur l'histoire de l'infiniment petit. (1-12).

**Curtze (M.).* — Sur le *Josephus sapiens* ou *hispanus* mentionné par Gerbert. (13-14).

**Günther (S.).* — Sur la lunette sans verre dans l'antiquité et au moyen âge. (15-23).

**Dickstein (S.).* — Sur l'histoire des Mathématiques au XVIIe siècle. (24).

Eneström (G.). — Quelques remarques sur l'histoire des Mathématiques en Espagne au XVIe siècle. (33-36).

**Steinschneider (M.).* — Les Mathématiques chez les Juifs (continuation). (37-45, 79-83, 99-105).

**Vacca (G.).* — Sur la première démonstration d'un théorème de Fermat. (46-48).

Dickstein (*S.*) — Sur les découvertes mathématiques de Wronski (continuation). (49-54, 85-87).

Bobynin (*V.*). — Sur les méthodes primitives qui ont servi à résoudre des questions arithmétiques. (55-60).

Eneström (*G.*). — Sur la part de Jean Bernoulli dans la publication de l'*Analyse des infiniment petits*. (65-72).

**Riccardi* (*P.*). — Sur quelques éditions de l'*Algorismus* de Sacrobosco. (73-79).

**Suter* (*H.*). — Sur le *Josephus sapiens*. (84).

**Heiberg* (*J.-L.*). — Sur le lieu de naissance de Serenus. (97-98).

**Ball* (*W.-W.-R.*). — Sur l'emploi d'un symbole spécial pour désigner le nombre incommensurable 3,14159.... (106).

**Curtze* (*M.*). — Sur l'histoire des Mathématiques aux XIVe et XVe siècles. (107-115).

**Curtze* (*M.*). — Sur l'histoire du *jeu de Joseph*. (116).

Eneström (*G.*), **Beman* (*W.-W.*). — Questions et réponses. (32, 63-64, 96, 120).

Neuvième année (1895).

**Curtze* (*M.*). — Sur l'histoire des Mathématiques aux XIVe et XVe siècles (fin). (1-8).

**Loria* (*G.*). — Sur Léon Battista Alberti. (9-12).

**Suter* (*H.*). — Sur l'histoire du *Baculus Jacobi*. (13-18).

**Steinschneider* (*M.*). — L'histoire des Mathématiques chez les Juifs (continuation). (19-28, 43-50, 97-104).

**Curtze* (*M.*). — Sur quelques points de l'histoire des Mathématiques. (33-42, 77-88, 105-114).

**Loria* (*G.*). — Desargues et la géométrie énumérative. (51-53).

**Valentin* (*G.*). — Les femmes dans les sciences exactes. (65-76).

**Braunmühl* (*A. von*). — L'enseignement de l'histoire des Mathématiques à l'Ecole polytechnique de Munich. (89-90).

Académie des Sciences de Madrid, *Eneström* (*G.*). — Questions. (32, 64, 96, 120).

Dixième année (1896).

**Curtze* (*M.*). — Sur l'histoire des traductions des *Eléments* d'Euclide au moyen âge. (1-3).

**Curtze* (*M.*). — Sur Jean de Gemunden. (4).

Dickstein (*S.*). — Sur les découvertes mathématiques de Wronski (fin). (5-12).

**Suter* (*H.*). — Encore une fois le *Baculus Jacobi*. (13-15).

**Kutta* (*M.*). — Géométrie avec une seule ouverture du compas. (16).

**Steinschneider* (*M.*). — L'histoire des Mathématiques chez les Juifs (continuation). (33-42, 77-83, 109-114).

**Curtze* (*M.*). — Une contribution à l'histoire de la Physique au xive siècle. (43-49).

**Künssberg* (*H.*). — A la mémoire de Louis Ofterdinger. (50-52).

Eneström (*G.*). — Le commentaire de Jacob Ziegler sur la *Saphea* de Zarkali. (53-54).

**Curtze* (*M.*). — Sur les instruments employés au moyen âge par les arpenteurs. (65-72).

Eneström (*G.*). — Note bibliographique sur les femmes dans les sciences exactes. (73-76).

Bobynin (*V.*). — Esquisse de l'histoire du calcul fractionnaire. (97-101).

**Steinschneider* (*M.*). — Johannes Anglicus et son *quadrans*. (102-104).

**Braunmühl* (*A. von*). — Contribution à l'histoire de la méthode dite *prosthaphérétique* dans la Trigonométrie. (105-108).

**Steinschneider* (*M.*), *Eneström* (*G.*), **Suter* (*H.*). — Remarques, questions et réponses. (31-32, 64, 96, 120).

Table générale des années 1887-1896.

Onzième année (1897).

Vaux (*C. de*). — Sur le sens exact du mot « al-djèbr ». (1-2).

Tannery (*P.*). — Magister Robertus Anglicus in Montepessulano. (3-6).

**Loria* (*G.*). — Versiera, visiera et pseudo-versiera. (7-12, 33-34).

**Steinschneider* (*M.*). — L'histoire des Mathématiques chez les Juifs (continuation). (13-18, 35-42, 73-82, 103-112).

Eneström (*G.*). — Sur la découverte de l'intégrale complète des équations différentielles linéaires à coefficients constants. (43-50).

Eneström (*G.*). — Sur les lettres de Léonard Euler à Jean I Bernoulli. (51-56).

**Berthold* (*G.*). — Sur la phrase : « eppur si muove » attribuée à Galilée. (57-58).

**Eneström* (*G.*). — Sur les travaux les plus récents dans le domaine de la bibliographie mathématique. (65-72).

**Suter* (*H.*). — Quelques contributions à l'histoire des mathématiciens et astronomes arabes. (83-86).

Eneström (*G.*). — Sur les neuf *limites* mentionnées dans l'*Algorismus* de Sacrobosco. (97-102).

**Braunmühl* (*A. von*). — Cours et séminaire d'histoire des Mathématiques à l'École polytechnique de Munich. (113-115).

Eneström (*G.*), *Cantor* (*M.*), *Vaux* (*C. de*). — Questions et réponses. (30-32, 64, 95-96, 120).

Douzième année (1898).

Vaux (*C. de*). — Une proposition du Livre des fils de Mousa sur les calculs approchés. (1-2).

Vaux (*C. de*). — Une solution du problème des deux moyennes proportionnelles entre deux droites données. (3-4).

**Steinschneider* (*M.*). — L'histoire des Mathématiques chez les Juifs (continuation). (5-12, 33-40, 79-89).

**Smith* (*D.-E.*). — Sur le cours d'histoire des Mathématiques à l'école normale de Michigan. (13-17).

Eneström (*G.*). — A propos de l'interprétation du titre *samielois* d'Albert Girard. (18).

Eneström (*G.*). — Sur quelques propositions de planimétrie énoncées dans un manuscrit norvégien du XIV[e] siècle. (19-22).

**Valentin* (*G.*). — Contribution à la bibliographie des écrits d'Euler. (41-49).

Eneström (*G.*). — Sur un point de la querelle au sujet de l'invention du calcul infinitésimal. (50-52).

**Braunmühl* (*A. von*). — Sur l'histoire du triangle polaire de la sphère. (65-72).

**Suter* (*H.*). — Sur deux manuscrits mathématiques arabes de la bibliothèque royale de Berlin. (73-78).

**Curtze* (*M.*). — Le traité de Levi ben Gerson sur la trigonométrie et le *Baculus Jacobi*. (97-112).

Eneström (*G.*). — Note historique sur une proposition analogue au théorème de Pythagoras. (113-114).

Eneström (*G.*), **Steinschneider* (*M.*), **Braunmühl* (*A. von*), **Curtze* (*M.*), **Wertheim* (*G.*). — Questions et réponses. (31-32, 64, 94-96, 119-120).

Treizième année (1899).

**Steinschneider* (*M.*). — L'histoire des Mathématiques chez les Juifs (fin). (1-9, 37-45, 97-104).

**Loria* (*G.*). — Un traité sur les courbes planes algébriques publié sans nom d'auteur. (10-12).

Pincherle (*S.*). — Pour la bibliographie de la théorie des opérations distributives. (13-18).

Eneström (*G.*). — Sur la découverte de l'équation générale des lignes géodésiques. (19-24).

Vaux (*C. de*). — Sur l'histoire de l'arithmétique arabe. (33-36).

Eneström (*G.*). — Remarque sur l'origine de la formule

$$i \log i = -\frac{1}{2}\pi.$$

(46).

**Stäckel* (*P.*). — Sur la bibliographie de la théorie des lignes parallèles (47-48).

**Gibson* (*G.-A.*). — L'*Analyst* de Berkeley et ses adversaires ; un épisode dans le développement de la théorie des limites. (65-70).

**Haller* (*S.*). — Contribution à l'histoire de la résolution de triangles sphériques à l'aide de projection stéréographique (71-80).

Bobynin (*V.*). — La marche successive dans la fusion des notions de la fraction et du quotient. (81-85).

**Suter* (*H.*). — Notices sur mathématiciens et astronomes arabes. (86-88, 118-119).

Eneström (*G.*). — Remarque sur l'époque où le mot *plus* a été introduit comme terme d'addition. (105-106).

**Stäckel* (*P.*). — Remarque sur la *Theorie der Parallellinien* de Lambert. (107-110).

Eneström (*G.*), **Cantor* (*M.*), **Steinschneider* (*M.*). — Questions et réponses. (32, 63-64, 94-96, 119).

BIBLIOTHECA MATHEMATICA. ZEITSCHRIFT FÜR GESCHICHTE DER MATHEMATISCHEN WISSENSCHAFTEN. *Dritte Folge* (1).

**Eneström* (*G.*). — Les buts d'un organe destiné à des recherches

(1). Outre des articles originaux (indiqués ci-dessus) chaque cahier contient : 1° des analyses d'ouvrages d'histoire des Mathématiques ; 2° une liste de publications récentes dans ce domaine : 3° une chronique.

d'histoire des mathématiques et à des questions actuelles dans le domaine des sciences mathématiques. (1-7).

**Hultsch* (*F.*). — Les séries pythagoriciennes pour les côtés et les diagonaux des carrés et leur transformation en une série double de nombres entiers. (7-12).

**Schmidt* (*W.*). — L'*Ephodikon* d'Archimède. (13-14).

Duhem (*P.*). — Archimède connaissait-il le paradoxe hydrostatique? (15-19).

Zeuthen (*H.-G.*). — Note sur la trigonométrie de l'antiquité. (20-27).

Vaux (*C. de*). — Notice sur un manuscrit arabe traitant de machines attribuées à Héron, Philon et Archimède. (28-38).

Tannery (*P.*). — Notes sur la Pseudo-Géométrie de Boèce. (39-50).

**Curtze* (*M.*) — Deux contributions à l'histoire de la Physique au moyen âge. (51-59).

Kucharzewski (*F.*). — Sur quelques niveaux du XVIe siècle. (60-63).

**Braunmühl* (*A. von*). — Le développement successif des notations dans la Trigonométrie. (67-74).

**Loria* (*G.*) — Les recherches inédites de Evangelista Torricelli sur la courbe logarithmique. (75-89).

**Heinrich* (*G.*). — Notice sur l'histoire de la formule de Simpson (90-92).

Bosscha (*J.*) — Les *Œuvres complètes de Christiaan Huygens*. (93-96).

Korteweg (*D.-J.*). — La solution de Christiaan Huygens du problème de la chaînette (97-108).

***Stäckel* (*P.*). — Intégration dans le domaine imaginaire. Une contribution à l'histoire de la théorie des fonctions. (109-128).

***Lampe* (*E.*) — Sur la biographie de Jacques Steiner. (129-141).

***Wölffing* (*E.*). — Sur l'état actuel de la théorie des coordonnées naturelles (142-159).

***Vivanti* (*G.*). — Liste bibliographique de la théorie des ensembles, 1893-1899. (160-165).

***Engel* (*F.*). — Sophus Lie. (166-204 avec portrait comme frontispice).

***Müller* (*F.*). — Charles-Emmanuel Gerhardt. (205-216).

***Günther* (*S.*) — Ferdinand Rosenberger (1845-1899). (217-224).

Eneström (*G.*) — H.-E. Wappler. (225).

***Gutzmer* (*A.*) — L.-G. Gasco. (225-226).

***Curtze* (*M.*) — Le 70e anniversaire de la naissance de Maurice Cantor. (227-231).

Mansion (*P.*) — Programme du cours d'histoire des Mathématiques à l'Université de Gand. (232-236).

***Valentin* (*G.*) — Les travaux préparatoires pour une bibliographie générale des Mathématiques. (237-245).

Laisant (*C.-A.*). — Sur l'état d'avancement du Répertoire bibliographique des sciences mathématiques. (246-249).

***Graf* (*J.-H.*). — La projetée bibliographie internationale des sciences. (250-257).

***Gutzmer* (*A.*), ***Whittaker* (*E.-J.*), ***Macfarlane* (*A.*), *Boyer* (*J.*), ***Eneström* (*G.*). — Congrès de mathématiciens en 1899 et 1900 (258-265).

Tannery (*P.*), ***Eneström* (*G.*), *Zeuthen* (*H.-G.*), *Braunmühl*

(*A. von*). — Petites remarques sur les *Vorlesungen* de M. Cantor. (265-273, 499-514).

**Steinschneider* (*M.*). — Robertus Castrensis. (273-274).

Eneström (*G.*). — Sur une brochure publiée en 1700 par Jacques Bernoulli (274).

**Schmidt* (*W.*). — Vitruve et les arpenteurs romains ont-ils puisé dans Héron? (297-318).

**Schmidt* (*W.*). — Les formules héroniennes pour les polygones sont-elles trigonométriques? (319-320).

**Curtze* (*M.*). — Documents pour l'histoire de la Trigonométrie au moyen âge. (321-416).

**Wertheim* (*G.*). — Sur la résolution de quelques problèmes dans le *Tractatus de numeris datis* de Jordanus Nemorarius. (417-420).

**Gerland* (*E.*). — Sur l'action de Leibniz dans le domaine de la Physique et de la Mécanique appliquée. (421-432).

**Pringsheim* (*A.*). — Sur l'histoire du théorème de Taylor. (433-479).

**Eneström* (*G.*) — Sur la bibliographie annuelle mathématique projetée par la *Royal Society*. (480-484).

**Lampe* (*E.*). — Le deuxième Congrès international des Mathématiciens à Paris, 6-11 août 1900. (485-495).

**Gutzmer* (*A.*), **Whittaker* (*E.-J.*). — Congrès de mathématiciens en 1900. (495-498).

**Kürschak* (*J.*) — Traduction moderne de la Mesure du cercle d'Archimède. (514-515).

Timtchenko (*J.*). — Sur un point du *Tractatus de latitudinibus formarum* de Nicolas Oresme. (515-516).

**Eneström* (*G.*), **Valentin* (*G.*), **Hagen* (*J.-G.*), **Stäckel* (*P.*), *Curtze* (*M.*). — Questions et réponses. (274-275, 516-517).

Deuxième Tome (1901).

**Eneström* (*G.*). — Historiographie littéraire et historiographie scientifique dans le domaine des Mathématiques. (1-4).

**Schmidt* (*W.*). — Sur l'histoire de l'isopérimétrie dans l'antiquité. (5-8).

Tannery (*P.*). — Le philosophe Aganis est-il identique à Geminus. (9-11).

**Suter* (*H.*). — Le traité d'arithmétique de Abû Zakarîjâ el Hassâr (12-40).

Tannery (*P.*). — Sur la *Practica geometriæ Hugonis*. (41-44).

Tannery (*P.*). — Sur le *Liber augmenti et diminutionis* compilé par Abraham. (45-47).

**Curtze* (*M.*) — Sur l'histoire de la mesure et de la division du cercle au xve siècle. (48-57).

**Steinschneider* (*M.*). — Les sciences mathématiques chez les Juifs, 1441-1500. (58-76).

**Heinrich* (*G.*). — Le traité *Vera circuli et hyperbolæ quadratura* de Jacques Gregory. (77-85).

**Braunmühl* (*A. von*). — Recherche historique sur les premiers travaux sur l'interpolation. (86-96).

**Braunmühl* (*A. von*). — Sur l'histoire de l'invention du théorème dit *de Moivre*. (97-102).

**Braunmühl* (*A. von*). — Sur l'histoire de la Trigonométrie au xviiie siècle. (103-110).

Stäckel (P.). — Contributions à l'histoire de la théorie des fonctions au XVIIIe siècle. (111-121).

Stäckel (P.). — Charles Peterson (1828-1881). (122-132).

Stäckel (P.). — Comment doit-on abrévier les titres des journaux mathématiques? (133-138).

Hatzidakis (N.-J.). — Sur quelques points de la terminologie mathématique. (139-140).

Congrès international d'histoire des sciences à Paris, 1900. (141-143).

Bosmans (H.), *Curtze (M.)*, *Eneström (G.)*, *Favaro (A.)*, *Koppe (M.)*, *Müller (F.)*, *Reuter (H.)*, *Tannery (P.)*, *Vacca (G.)*, *Wertheim (G.)*. — Petites remarques sur les *Vorlesungen* de M. Cantor (143-152, 351-360, 441-443).

Hultsch (F.). — Nouvelles recherches sur le calcul égyptien de quantièmes. (177-184).

Boll (F.). — Les catalogues d'étoiles de Hipparque et de Ptolémée. (185-195).

Björnbo (A.-A.). — Ménélaus d'Alexandrie a-t-il composé un catalogue d'étoiles fixes? (196-212).

Wertheim (G.). — La logistique de Jean Butéon. (213-219).

Favaro (A.). — Galilée et Simon Mayr. (220-223).

Koppe (M.). — Sur les méthodes d'approximation de Huygens pour le calcul de la circonférence du cercle et des logarithmes. (224-229).

Kutta (W.). — Intégrales elliptiques et intégrales d'autres espèces chez Wallis. (230-234).

Wölffing (E.). — Sur l'état actuel de la théorie des courbes cycliques. (235-259).

**Cantor* (*M.*). — Notice biographique sur Oscar Schlömilch. (260-281).

**Müller* (*F.*). — Sur la terminologie mathématique. (282-325).

**Eneström* (*G.*). — Bio-bibliographie des mathématiciens décédés en 1881-1900. (326-350).

**Schmidt* (*W.*). — La Physique et la Mécanique appliquée chez Philon de Byzance. (377-383).

**Wislicenus* (*W.-F.*). — Les cartes de la Lune de Langrenus. (384-391).

**Loria* (*G.*). — Eugène Beltrami et ses travaux mathématiques. (392-440 avec portrait comme frontispice).

**Hellmann* (*G.*). — Sur l'optique de Robertus Linconiensis. (443-444).

**Eneström* (*G.*), *Vacca* (*G.*), **Valentin* (*G.*), **Wertheim* (*G.*), **Sturm* (*A.*), **Beman* (*W.-W.*). — Questions et réponses. (151-153, 360-361, 444).

Troisième Tome (1902).

**Eneström* (*G.*). — Sur la division de l'histoire des Mathématiques en périodes. (1-6).

**Rudio* (*F.*). — L'exposé de Simplicius des quadratures du cercle par Antiphon et Hippocrate. (7-62).

**Björnbo* (*A.-A.*). — Sur deux manuscrits mathématiques du XIVe siècle. (63-75).

**Wertheim* (*G.*). — Une contribution à l'appréciation de Pierre-Antoine Cataldi. (76-83).

**Goldbeck* (*E.*). — L'atomistique de Galilée et ses sources. (84-112).

**Wertheim* (*G.*). — L'algèbre de Jean-Henri Rahn (1659) et sa traduction anglaise. (113-126).

**Loria* (*G.*). — Pseudo-versiera et quadratrice géométrique. (127-130).

**Valentin* (*G.*). — Sur une lacune apparente dans le sixième Tome du *Bullettino* de Boncompagni. (131-132).

**Wölffing* (*E.*). — Sur les abréviations des titres de journaux mathématiques. (133-136).

Bosmans (*H.*), **Eneström* (*G.*), **Schmidt* (*W.*), **Sturm* (*A.*), *Tannery* (*P.*). — Petites remarques sur les *Vorlesungen* de M. Cantor. (137-143, 238-242, 323-328, 405-408).

**Schmidt* (*W.*). — Encore une fois l'*Ephodikon* d'Archimède. (143-144).

Tannery (*P.*). — Du rôle de la musique grecque dans le développement de la mathématique pure. (161-175).

**Schmidt* (*W.*). — Sur l'histoire du texte des *Ochumena* d'Archimède. (176-179).

**Schmidt* (*W.*). — Léonard de Vinci et Héron d'Alexandrie. (180-187).

**Favaro* (*A.*). — Une lettre inédite de Tycho Brahé. (188-190).

**Vacca* (*G.*). — Notices historiques sur la mesure des angles solides et des polygones sphériques. (191-197).

**Schor* (*D.*). — Simon Stévin et le paradoxe hydrostatique. (198-203).

**Eneström* (*G.*). — Sur l'origine du terme *équation de Pell*. (204-207).

**Günther* (*S.*). — Le mathématicien et géophysicien François Zallinger (1743-1828). (208-225).

**Eneström* (*G.*). — Comment doit-on rédiger convenablement un annuaire des mathématiciens? (226-234).

**Müller* (*F.*). — Sur l'abréviation des titres de journaux mathématiques. (235-237).

**Eneström* (*G.*). — Sur un manuscrit de la trigonométrie de Jean Werner, récemment découvert. (242-243).

Tannery (*P.*). — Sur la sommation des cubes entiers dans l'antiquité (257-258).

**Suter* (*H.*). — Sur la Géométrie des fils de Mûsâ ben Schâkir. (259-272).

**Hayashi* (*J.*). — Sur les valeurs de π utilisées par les mathématiciens japonais des XVII[e] et XVIII[e] siècles. (273-275).

Loria (*G.*). — L'œuvre mathématique d'Ernest de Jonquières. (276-322 avec portrait comme frontispice).

**Schmidt* (*W.*). — Sur l'histoire de la chaudière dans l'antiquité. (337-341).

Tannery (*P.*). — Simplicius et la quadrature du cercle. (342-349).

**Suter* (*H.*). — Sur les auteurs indiqués dans le *Liber augmenti et diminutionis*. (350-354).

**Eneström* (*G.*). — Un oublié cossiste allemand du commencement du XVI[e] siècle. (355-360).

**Wölffing* (*E.*). — Sur l'état actuel de la théorie de la surface de l'onde de Fresnel. (361-382).

**Favaro* (*A.*). — Sur quelques singularités du *Bullettino* du prince Boncompagni. (383-385).

**Günther* (*S.*). — Auguste Heller. (386-394).

Eneström (*G.*). — Gustave Wertheim (395-402).

**Braunmühl* (*A. von*). — Cours et séminaire d'Histoire des

Mathématiques à l'École polytechnique de Munich en 1897-1902. (403-404).

**Suter* (*H.*). — Sur les prétendues transcriptions incorrectes des noms grecs par les traducteurs arabes. (408-409).

**Goldziher* (*K.*). — Weierstrass et le principe appelé *de Dirichlet*. (409-410).

**Wertheim* (*G.*), **Eneström* (*G.*), *Vacca* (*G.*), *Fehr* (*H.*), **Cantor* (*M.*), **Favaro* (*A.*). — Questions et réponses. (144-145, 243, 328, 410-412).

Quatrième Tome (1903).

**Eneström* (*G.*). — Sur l'histoire des Mathématiques traitée au point de vue du développement de la vie civilisée et au point de vue mathématique. (1-6).

**Schmidt* (*W.*). — Sur les niveaux et la construction de tunnels dans l'antiquité. (7-12).

**Rudio* (*F.*). — Pour la réhabilitation de Simplicius. (13-19).

**Suter* (*H.*). — Sur quelques noms d'auteurs, non encore identifiés, dans les traductions de Gérard de Crémone (19-27).

**Wallner* (*C.-R.*). — Les modifications de la notion d'*indivisible* depuis Cavalieri jusqu'à Wallis. (28-47).

**Loria* (*G.*). — Remarques sur l'histoire d'un problème appartenant apparemment à la Géométrie élémentaire. (48-51).

Pexider (*J.-V.*). — Aperçu de la littérature sur le théorème d'Abel. (52-64).

**Günther* (*S.*). — Maximilien Curtze. (65-81).

**Eneström* (*G.*). — Sur les buts d'une bibliothèque mathématique centrale. (82-85).

**Braunmühl* (*A. von*), **Eneström* (*G.*), **Grönblad* (*C.*), *Lambo* (*Ch.*), **Sturm* (*A.*). — Petites remarques sur les *Vorlesungen* de M. Cantor. (86-90, 205-210, 283-288, 396-401).

**Cantor* (*M.*). — Comment doit-on traiter l'histoire des Mathématiques? (113-117).

**Schmidt* (*W.*). — Sur l'exposé de Simplicius de la quadrature des lunules d'Hippocrate. (118-126).

**Suter* (*H.*). — L'auteur du traité : *Les fondements des Tables de Chowârezmî.* (127-129).

Björnbo (*A.-A.*). — Hermannus Dalmata comme traducteur d'ouvrages astronomiques. (130-133).

**Mayer* (*J.*). — L'astronome Cyprianus Leovitius et ses travaux. (134-159).

**Sturm* (*R.*). — Aperçu des travaux traitant des problèmes proposés par Steiner. (160-184).

**Macfarlane* (*A.*). — Pierre Guthrie Tait, sa vie et ses travaux. (185-200), avec portrait comme frontispice.

**Eneström* (*G.*). — Sur la rédaction convenable de titres d'articles mathématiques. (201-204).

**Eneström* (*G.*). — Sur les façons de traiter l'histoire des Mathématiques. (225-233).

**Schmidt* (*W.*). — Sur la forme de la *Groma* des arpenteurs romains. (234-237).

**Björnbo* (*A.-A.*). — Les anciens manuscrits mathématiques du couvent de Saint-Marc à Florence (238-245).

**Wallner* (*C.-R.*). — Sur l'origine de la notion de limite. (246-259).

**Schlesinger* (*L.*). — Nouvelles contributions à la biographie de Wolfgang et Jean Bolyai (260-270).

**Müller* (*F.*). — Sur des cours pour servir à l'introduction dans la littérature mathématique. (271-279).

**Vacca* (*G.*). — Congrès international d'histoire des sciences mathématiques et physiques à Rome en 1903. (280-283).

**Björnbo* (*A.-A.*). — Un cours complet de Mathématiques et d'Astrologie au moyen âge. (288-290).

**Schmidt* (*W.*). — Sur le mathématicien grec Dionysodore. (321-325).

**Björnbo* (*A.-A.*). — Sur un répertoire bibliographique des manuscrits mathématiques du moyen âge. (326-333).

**Favaro* (*A.*). — Sur le mathématicien crémonais Léonard Mainardi. (334-337).

Duhem (*P.*). — Léonard de Vinci et la composition des forces concourantes. (338-343).

**Eneström* (*G.*). — La correspondance entre Léonard Euler et Jean I Bernoulli. I. (344-388).

**Müller* (*F.*). — Sur la fondation d'une bibliothèque mathématique centrale. (389-391).

**Eneström* (*G.*). — Sur des expositions de la littérature des Mathématiques. (392-395).

**Eneström* (*G.*), *Bosmans* (*H.*), **Stäckel* (*P.*), *Lefebvre* (*B.*), **Wallner* (*C.-R.*). — Questions et réponses. (90-91, 210-212, 290-292, 402-403).

Cinquième Tome (1904).

**Eneström* (*G.*). — Sur le développement régulier et le développement irrégulier dans le domaine des Mathématiques. (1-4).

Tannery (*P.*). — Sur le symbole de soustraction chez les Grecs. (5-8).

**Eneström* (*G.*). — Jordanus Nemorarius est-il auteur du traité *Algorithmus demonstratus?* (9-14).

**Körner* (*Th.*). — La notion du point matériel dans la Mécanique du XVIIIe siècle. (15-62).

**Eneström* (*G.*). — L'histoire des Mathématiques et l'Enseignement universitaire. (63-67).

**Eneström* (*G.*), **Enkle* (*J.*), **Gräfe* (*F.*), **Müller* (*F.*). — Questions et réponses. (68-72, 200-208, 305-310, 407-414).

Zeuthen (*H.-G.*). — Sur l'Arithmétique géométrique des Grecs et des Indiens. (97-112).

**Wallner* (*C.-R.*). — Sur les points saillants du développement du calcul infinitésimal. (113-124).

Loria (*G.*). — Louis Cremona et son œuvre mathématique. (125-195), avec portrait comme frontispice.

**Eneström* (*G.*). — Est-il convenable que les articles des journaux mathématiques soient datés? (196-199).

**Hultsch* (*F.*). — Les calculs sexagésimaux dans les scholies sur les *Éléments* d'Euclide. (225-233).

**Gerland* (*E.*). — Sur l'invention de l'horloge à pendule. (234-247).

**Eneström* (*G.*). — La correspondance entre Léonard Euler et Jean I Bernoulli. II. (248-297).

**Eneström* (*G.*). — Quelles conditions doivent remplir les analyses d'ouvrages mathématiques? (298-304).

Loria (*G.*). — Un article de L. Cremona sur Giovanni Ceva. (311).

Duhem (*P.*). — Un ouvrage perdu cité par Jordanus de Nemore : le Philotechnes (321-325).

**Favaro* (*A.*). — Nouvelles recherches sur le mathématicien Léonard de Cremone (326-341).

Tosmans (*H.*). — Note sur la Trigonométrie d'Adrien Romain. (342-354).

**Braunmühl* (*A. von*). — Contributions à l'histoire du calcul intégral chez Newton et Cotes. (355-365).

**Hoffmann* (*E.*). — Le développement des problèmes divers sur les solides de la plus grande attraction. (366-397).

**Eneström* (*G.*). — Un nouvel ouvrage à l'appui de la propagation de connaissances de l'histoire des Mathématiques. (398-409).

**Eneström* (*G.*), **Rath* (*E.*), **Favaro* (*A.*), *Tannery* (*P.*). — Questions et réponses. (72-73, 208-210, 311-312, 414-416).

G. E.

ATTI DELLA R. ACCADEMIA DELLE SCIENZE DI TORINO.
Torino, C. Clausen, in-8°.

Tome XXXV, 1899-1900 (1).

Rosati (*C.*). — [$M_2 4d$]. Sur les surfaces de Véronèse et de Steiner. (12-19).

En employant la représentation du plan de coniques sur un espace S_5, l'auteur démontre des propriétés de ces deux surfaces. Par exemple : le lieu des pôles des cordes d'une quartique gauche située sur la surface de Steiner, par rapport aux coniques de cette surface passant par leurs points d'appui, est encore une surface de Steiner.

Levi (*B.*). — [$M_2 8$ ref. $M_2 1 b$]. Sur la transformation du domaine d'un point par une correspondance birationnelle entre deux espaces. (20-33).

---

(1) Voir *Bulletin*, t. XXVI_2, p. 32.

L'auteur démontre ici une proposition fondamentale, dont il s'est servi dans un autre travail (*Résolution des singularités ponctuelles des surfaces algébriques,* t. XXXIII), c'est-à-dire que, si deux variétés se transforment l'une dans l'autre par une correspondance birationnelle de l'espace, les points correspondants réguliers ont, sur les deux variétés et suivant des branches correspondantes, les mêmes caractères de composition.

De Francesco (*D.*). — [R8*b* ref. Q1]. Sur le mouvement spontané d'un corps rigide dans un espace de courbure constante. (34-38).

Les six équations de Heath [*On the Dynamic of a rigid body in elliptic space* (*Phil. Trans. of the R. S. of London,* 1884, Vol. CLXXV, 1re Partie, p. 316] admettent, outre les trois intégrales quadratiques trouvées par Heath même, une quatrième intégrale trouvée par l'auteur. Au moyen de cette intégrale et d'un théorème de M. Volterra, l'auteur trouve les six vitesses angulaires, représentées par les caractéristiques ω. Pour que la solution soit complète, il reste à trouver les six paramètres déterminant à chaque instant la position du corps. Pour cela, *voir* la note à la page 387. Le théorème de M. Volterra est le suivant :

Dans le mouvement spontané à caractéristiques indépendantes d'ordre ν, si, outre l'intégrale des forces vives, on connaît $\nu-3$ intégrales indépendantes du temps, et l'un d'eux est du deuxième degré (*dont l'équation déterminante ait les racines différentes*), *la détermination des caractéristiques se réduit aux quadratures* (*voir* ces *Atti,* t. XXXIII, 1897-1898, p. 474 : *Sur une classe d'équations dynamiques*).

Almansi (*E.*). — [T2*a*]. Sur la torsion des cylindres creux à épaisseur très petite. (39-53).

Lerch (*M.*). — [D1*c*]. Nouvelle formule pour la différentiation d'une certaine classe de séries trigonométriques. (54-59).

Si les quantités

$$c_1, \quad c_2, \quad c_3, \quad \ldots$$

sont telles que les sommes

$$C_\nu = c_1 + c_2 + \ldots + c_\nu$$

engendrent des limites finies et déterminées

$$\lim_{n=\infty} C_{mn+1} = A_1, \qquad \lim_{n=\infty} C_{mn+2} = A_2, \qquad \ldots, \qquad \lim_{n=\infty} C_{mn} = A_m,$$

et que les différences

$$C_{mn+\rho} - A_\rho = B_{mn+\rho}$$

satisfont à la condition que la série

$$\sum_{1}^{\infty} B_\nu e^{2\nu x\pi i}$$

soit uniformément convergente dans un certain intervalle $(x_0 \ldots x_1)$, tout intérieur à $(0 \ldots 1)$, la dérivée de la fonction

$$f(x) = \sum_{1}^{\infty} \frac{e^\nu}{\nu} e^{2\nu x\pi i} \qquad (x_0 \leq x \leq x_1)$$

aura pour valeur l'expression

$$f'(x) = \frac{\sin x\pi}{\sin m x\pi} 2\pi i \sum_{\rho=1}^{m} A_\rho e^{(2\rho+1-m)x\pi i} + 4\pi \sin x\pi \sum_{\nu=1}^{\infty} B_\nu e^{(2\nu+1)x\pi i}.$$

Guidi (C.). — [T2]. Sur un nouveau fleximètre et sur ses applications. (175-185).

Volterra (V.). — [R8*b*]. Sur les intégrales linéaires des mouvements spontanés à caractéristiques indépendantes. (186-192).

Critère pour reconnaître *a priori* l'existence de $\nu - 3$ intégrales linéaires des équations des mouvements spontanés à caractéristiques indépendantes d'ordre ν. La condition nécessaire et suffisante pour que les équations

$$p'_s = \sum_{r,k} e_{s,r,k} \frac{d(\mathrm{T}, \mathrm{F})}{d(p_r, p_k)}$$

admettent $\nu - 3$ intégrales linéaires est que les coefficients satisfassent aux équations

$$\sum_{k} e_{s,r,k} e_{s',r',k'} = 0.$$

S'il en est ainsi, ces équations s'intègrent par fonctions elliptiques. A la fin de cette Note, il y a un *erratum* relatif à l'autre Note : *Sur une classe d'équations dynamiques*, t. XXXIV, 1898.

Giudice (F.). — [Q1]. Sur la métrique des espaces de courbure constante. (193-218).

Exposition détaillée des principes, ayant principalement pour but de faciliter la lecture des Mémoires de Klein (*Math. Ann.*, 1871, 1873 et 1890).

Boggio (T.). — [T2*a*δ]. Sur l'équilibre des membranes élastiques planes. (219-239).

Déformation d'une membrane isotrope, soumise à des forces agissant au contour, dans le plan de la membrane, et en connaissant les composantes du déplacement en chaque point du contour. Les composantes du déplacement d'un point de la membrane peuvent s'exprimer par des intégrales définies, pourvu que l'on puisse faire la représentation conforme de l'aire de la membrane sur un cercle, par les formules

$$x' = p(x, y),$$
$$y' = q(x, y),$$

p, q étant des polynomes harmoniques de degré m.

De Francesco (*D.*). — [R8*b* ref. Q1]. Sur le mouvement spontané d'un corps rigide dans un espace de courbure constante. (387-399).

Note faisant suite à l'autre publiée dans ce même Tome à la page 34. Ici l'auteur complète la solution en trouvant les six paramètres qui déterminent en chaque instant la position du corps. Pour trouver ces six paramètres, on a six intégrales de Heath, mais elles ne sont pas indépendantes; l'auteur trouve les deux autres intégrales, nécessaires pour leur détermination.

Zanotti Bianco (*O.*). — [U7]. Sur quelques travaux récents italiens relatifs à la constitution physique de l'atmosphère, fondés sur les observations de James Glaisher. Contribution à l'histoire de la Météorologie. (405-427).

Tanturri (*A.*). — [$N_4$2 ref. Q2]. Un problème de Géométrie énumérative sur les variétés algébriques lieux de ∞^1 espaces. (427-442).

Nombre des hyperplans contenant le nombre maximum de S_k générateurs d'une variété algébrique (à $k+1$ dimensions), lieu de ∞^1 espaces S_k.

Scorza (*G.*). — [$M_1$2*e*]. Sur les correspondances (p, p) existant sur les courbes de genre p à modules généraux. (443-459).

Dans une correspondance (α, β), en indiquant par $u_1(x)$, ..., $u_p(x)$ les valeurs aux points x des p intégrales normales de première espèce de la surface riemannienne R, on a

$$\sum_{i=1}^{i=\beta} u_k(y^{(i)}) + \gamma\, u_k(x) = \pi_k \qquad (k = 1, \ldots, p),$$

où γ est un nombre entier, positif ou négatif, et π_k une constante indépendante de x. Le nombre γ est la *valence* de la correspondance. Si γ est positif, on a $\alpha + \beta + 2p\gamma$ coïncidences. Si γ est négatif $= -\gamma'$, deux points quelconques x

et x_1, comptés γ' fois chacun, et pris le premier avec les correspondants de x_1, et le second avec les correspondants de x, forment deux groupes de points corésiduels; et réciproquement. Une correspondance (p, p) de valence positive γ est *spéciale* lorsque tout point compté γ fois, avec ses p points correspondants, donne un groupe spécial (de manière que l'on ait $\gamma \leq p - 2$). Les correspondances (p, p) à valence négative $(= -1)$ sont ∞^p, et une telle correspondance est complètement déterminée lorsqu'on donne (arbitrairement) le groupe (non spécial) des p points correspondants à un point quelconque de la courbe. Il y a $2^{2p} - 2^{p-1}(2^p - 1) = 2^{p-1}(2^p + 1)$ correspondances (p, p) symétriques et dépourvues de coïncidences. Sur une courbe de genre 3, il y en a, par conséquent, 36, et sur une quartique plane ces 36 correspondances sont celles qui résultent déterminées par les 36 quartiques dont elle est covariante.

Tedone (*O.*). — [T2*a*]. Sur les équations des vibrations des corps élastiques en coordonnées curvilignes. (460-480).

Lauricella (*G.*). — [R5*aα*]. Sur les dérivées normales de la fonction potentielle de surface. (480-497).

L'auteur démontre que, dans le théorème fondamental sur ces fonctions, la condition que la densité soit continue est suffisante.

Boggio (*T.*). — [D5*c*]. Un théorème de réciprocité sur les fonctions de Green d'ordre quelconque. (498-509).

Étant G une fonction m-harmonique dans le champ S, et qui, sur la surface σ, satisfait aux conditions

$$\frac{\partial^i G}{\partial n^i} = \frac{\partial^i r^{2m-3}}{\partial n^i} \qquad (i = 0, 1, \ldots, m-1),$$

et en indiquant, par $G(P_0, P_1)$, la valeur en P_0 de la fonction ayant P_1 pour pôle et, par $G(P_1, P_0)$, la valeur en P_1 de la fonction ayant pour pôle P_0, on a

$$G(P_0, P_1) = G(P_1, P_0).$$

D'Ovidio (*E.*). — [V9]. Eugène Beltrami. Commémoration. (541-546).

Gabba (*L.*). — [U]. Éphémérides du Soleil et de la Lune pour l'horizon de Turin et pour 1901. (547-562).

Holmgren (*E.*). — [H11*c*]. Sur un théorème de M. Volterra sur l'inversion des intégrales définies. (570-586, en français).

Le théorème de M. Volterra est le suivant (ces *Atti*, t. XXXI, 1896 : *Sur l'inversion des intégrales définies*, Note IV) :

Considérons l'équation fonctionnelle

$$\text{(A)} \qquad f(y) = \int_0^y \varphi(x)\,\mathrm{H}(x, y)\,dx \qquad (0 < y < a),$$

où

$$f(y) = y^{n+1} f_1(y),$$

$$\mathrm{H}\,(x, y) = \sum_0^n {}_i\, a_i x^i y^{n-i} + \mathrm{H}'(x, y),$$

$$\mathrm{H}'(x, y) = \sum_0^{n+1} {}_i\, x^i y^{(n+1)-i} \mathrm{L}_i(x, y),$$

les a_i étant constantes. Si les $f_i(y)$ et $\mathrm{L}_i(x, y)$ et leurs dérivées premières par rapport à y sont finies et continues entre 0 *et a, et si* $\mathrm{H}(y, y)$ *ne s'annule dans* (0 ... a) *que pour* $y = 0$, *il existe une et une seule fonction φ finie et continue qui satisfait à* (A), *quand toutes les racines $\lambda_1, \ldots, \lambda^n$ de*

$$\text{(B)} \qquad \frac{a_0}{\lambda - 1} + \frac{a_1}{\lambda - 2} + \ldots + \frac{a_n}{\lambda - n - 1} = 0$$

sont finies, distinctes et ont leurs parties réelles positives. Si l'une ou plusieurs des racines de (B) *ont leurs parties réelles négatives et s'il existe une solution de* (A), *il en existe une infinité.*

L'auteur déduit de là quelques théorèmes. Par exemple :

L'équation (A), *dont l'équation correspondante* (B) *a r racines à partie réelle positive (les autres ayant leurs parties réelles négatives), a la solution générale de la forme*

$$\Phi(z) + \mathrm{C}_1 \Phi_1(z) + \mathrm{C}_2 \Phi_2(z) + \ldots + \mathrm{C}_r \Phi_r(z),$$

les Φ étant des fonctions réelles connues.

Camerano (L.). — [J2*d*]. L'étude quantitative des organismes et les indices de variabilité, de variation, de fréquence, de déviation et d'isolement. (650-666).

Aimonetti (C.). — [U]. Détermination de la gravité relative à Aoste, Grand Saint-Bernard, Courmayeur et Petit Saint-Bernard. (675-678).

Scorza (G.). — [$\mathrm{M}_1$2 ref. Q2]. Sur les courbes canoniques dans un espace linéaire quelconque et sur certains covariants quartiques qui leur appartiennent. (765-773).

Proposition, relative au cas du genre p quelconque (> 3), analogue à celle

qui est mentionnée plus haut à la fin de la Note précédente du même auteur (proposition relative aux quartiques) en supposant ici que l'on ait une courbe (canonique) de genre p et d'ordre $2p-2$ dans l'espace S_{p-1}.

Severi (*F.*). — [$N_4 2$]. Recherches sur les coniques sécantes des courbes gauches. (774-789).

S. R.

ATTI DEL R. INSTITUTO VENETO DI SCIENZE, LETTERE ED ARTI.
Serie 8ª.

Tome I, 1898-1899 (1).

Turazza (*D.*). — [V9]. Notice sur la vie et bibliographie relative à D. Turazza, par les soins de la présidence de l'Institut. (69-78).

Favaro (*A.*). — [V7]. En présentant le huitième Volume de l'édition nationale galiléienne. (35-41).

Favaro (*A.*). — [V7]. Sur les œuvres scientifiques de Galilée dans l'édition nationale, etc. (129-204).

D'Arcais (*F.*). — [H10*d*]. Un problème sur les fonctions biharmoniques et sa résolution pour un champ circulaire. (479-486).

Intégration de la double équation de Laplace étant données au contour les valeurs de la fonction et de son paramètre différentiel du deuxième ordre. On suppose que, dans le champ donné, la fonction soit continue, ainsi que ses dérivées des trois premiers ordres et que ses quatrièmes dérivées soient finies et intégrables.

Dell'Agnola (*C.-A.*). — [D4]. Extension d'un théorème de Hadamard. (Première Note, 525-539; deuxième Note, 669-677).

---

(1) Voir *Bulletin*, t. XXIII_2, p. 223.

Deux séries de puissances

$$\varphi(z)=\sum_0^\infty {}_n a_n z^n, \qquad \psi(z)=\sum_0^\infty {}_n b_n z^n,$$

étant données, la fonction analytique représentée par

$$f(z)=\sum_0^\infty {}_n a_n b_n z^n$$

ne peut admettre d'autres points singuliers que les points $\alpha\beta$, en indiquant par α et β deux points singuliers quelconques des deux fonctions $\varphi(z)$ et $\psi(z)$ respectivement. Ce théorème a été démontré par M. Hadamard dans les *Acta mathematica*, t. XXII, p. 55. M. Borel a donné de ce théorème une démonstration plus simple, fondée comme celle de Hadamard sur l'expression

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_\lambda \varphi(zx)\,\psi\left(\frac{1}{x}\right)\frac{dx}{x},$$

où la ligne λ sépare les singularités de φ et ψ, et il a aussi relevé un cas d'exception (*Bulletin de la Société mathématique de France*, t. XXVI). M. Hurwitz (*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, 1899) a montré comment on peut déduire de deux fonctions

$$\varphi(z)=\sum_0^\infty {}_n \frac{a_n}{z^{n+1}}, \qquad \psi(z)=\sum_0^\infty {}_n \frac{b_n}{z^{n+1}},$$

une autre fonction

$$f(z)=\sum_0^\infty {}_n \left[\sum_0^n {}_k \binom{n}{k} a_k b_{n-k}\right]\frac{1}{z^{n+1}},$$

dont les points singuliers sont $\alpha+\beta$. M. Pincherle (*Mem. dell' Accad. di Bologna*, 1899 et *Rendiconti della R. Accad. dei Lincei*, 1899) a étudié cette question au point de vue de la théorie des opérations fonctionnelles.

L'auteur généralise la méthode de M. Borel en considérant des intégrales

$$(1) \qquad f(z)=\int_\lambda \varphi(z,x)\,\psi(x)\,dx,$$

et en étudiant les conditions sous lesquelles ces intégrales représentent des fonctions analytiques uniformes des deux variables z et x, et la manière dont les singularités de cette fonction dépendent de celles de φ et de ψ. Il suppose que les singularités de φ (comme fonction de x) ainsi que celles de ψ forment un ensemble dénombrable, et que dans la ligne λ et au dehors on ait des singularités des deux fonctions. Puis (§ 2), il suppose que les singularités de φ soient définies par une équation algébrique

$$F(z,x)=0,$$

et que la ligne λ sépare les singularités des deux fonctions; alors, sous cette hypothèse, il démontre que l'intégrale (1) représente effectivement une fonction uniforme dont les singularités sont données par

$$F(z, \beta) = 0,$$

β étant un point singulier quelconque de ψ. Puis (§ 3) il montre comment on peut construire une classe de fonctions $\varphi(z, x)$ satisfaisant aux conditions du paragraphe 1, et de chacune desquelles on peut déduire, par l'opération (1), une infinité de fonctions uniformes, qui rentrent dans le cas général du même paragraphe, et dont les singularités sont analytiquement déterminées. Dans le paragraphe 4, il démontre le théorème de M. Borel :

Si α est un pôle d'ordre p pour $\varphi(z)$ et β un pôle d'ordre q pour $\psi(z)$, $\alpha\beta$ sera un pôle d'ordre $p+q-1$ pour $f(z)$,

en supposant que les singularités de $\varphi(z, x)$ soient définies par une équation algébrique, comme au paragraphe 2.

Dans la deuxième Note, l'auteur généralise le théorème de Hurwitz pour le cas où les fonctions données sont à singularités ponctuelles les plus générales. Enfin, il montre comment on peut obtenir une fonction dont les points singuliers sont les quotients de ceux des fonctions données.

Tome II, 1899-1900.

Dall' Acqua (A.). — [$N_2 3c$]. Recherches sur les congruences de courbes en une variété quelconque à trois dimensions. (245-252).

L'auteur indique par traits sommaires comment on peut définir les lignes asymptotiques et les lignes de courbure d'une congruence (même lorsque celle-ci n'est pas normale), et trouve par cela l'interprétation géométrique des invariants à trois indices et quelques propriétés relatives aux congruences géodésiques d'un complexe, c'est-à-dire à celles qui ont identiquement nulle la première variation de l'intégrale

$$s_h = \int_{t_0}^{t} \sqrt{\sum_{rs} a_{rs} \frac{dx_r}{dt} \frac{dx_s}{dt}}\, dt.$$

D'autres propriétés énoncées par l'auteur se rapportent aux *faisceaux* de congruences dans les complexes, et aux *étoiles* (doubles infinités) de congruences dans l'espace. Puis il établit les définitions de lignes de courbure et de lignes asymptotiques sur les complexes. L'expression

$$H = -\frac{1}{2}(\gamma_{311} + \gamma_{322}) = -\frac{1}{2} \sum_{rs} a^{(rs)} \lambda_{rs}$$

est la *courbure moyenne,* et l'autre

$$K = \gamma_{311}\gamma_{322} - \gamma_{312}\gamma_{321} = \frac{1}{2}\sum_{rs} A^{(rs)} a_{rs},$$

la *courbure totale.* Un élément qui a un rôle important dans ces propriétés, ainsi que dans celles relatives aux lignes asymptotiques, est l'invariant

$$A = \frac{1}{2}(\gamma_{312} - \gamma_{321}) = \frac{1}{2}\sum_{rst} \lambda_r \lambda_{st} \varepsilon^{(rst)},$$

le système $\varepsilon^{(rst)}$ étant défini par

$$\varepsilon^{(rst)} + \varepsilon^{(srt)} = 0,$$
$$\varepsilon^{(rst)} + \varepsilon^{(rts)} = 0,$$
$$\varepsilon^{(r,\, r+1,\, r+2)} = \frac{1}{\sqrt{a}};$$

l'auteur appelle cet invariant l'*anormalité* de la congruence, puisque la congruence est normale sous la condition $A = 0$.

Les asymptotiques d'un complexe sont réelles et distinctes, coïncidentes ou imaginaires, suivant que

$$A^2 - K \gtreqless 0.$$

Les surfaces

$$A \pm \sqrt{K} = 0$$

sont les *surfaces limites.* En partant d'un point limite, où les asymptotiques sont coïncidentes (angle 0) et en allant à l'autre point limite de la même λ où elles coïncident de nouveau (angle π) on trouve un point où l'angle est $\frac{\pi}{2}$ (*point moyen*). Le lieu de ces points est la *surface moyenne,* et l'on a le théorème :

Dans les points moyens d'une congruence est nulle la courbure moyenne du complexe orthogonal à la congruence. Par cela

$$H = 0$$

est l'équation de la surface moyenne.

La surface moyenne d'une congruence, lorsqu'elle est orthogonale à cette dernière, est une surface minima.

Ce théorème avait été démontré par M. Guichard (*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences,* 1891) pour une classe particulière de congruences.

Une recherche analogue à la précédente peut se faire aussi pour les lignes de courbure; on trouve ainsi les *surfaces extrêmes*

$$H \pm \sqrt{K} = 0.$$

Après quelques propriétés relatives aux congruences géodésiques et aux

congruences isotropes, l'auteur indique l'interprétation de la formule donnée par M. Ricci (*Mém. des Lincei,* 5e série, t. II)

$$\frac{dH}{ds_h} = 0 \qquad (h = 1, 2),$$

qui est la suivante :

Si une famille de surfaces isothermes a ses trajectoires orthogonales géodésiques, elle est formée par des surfaces à courbure moyenne constante.

Favaro (*A.*). — [V6]. Deux lettres inédites de Guidobaldo Del Monte à Giacomo Contarini. (303-312).

Favaro (*A.*). — [V9]. Raffaello Caverni. Notice commémorative. (377-379).

Historiographe de Galilée.

Boggio (*T.*). — [H10*d*]. Intégration de l'équation $\Delta^2\Delta^2 = 0$ dans une couronne circulaire et dans une couche sphérique. (497-508).

Après avoir déterminé les coefficients des développements de la fonction et de sa dérivée normale sur ces surfaces des deux sphères, l'auteur montre comment on peut réduire à celui-ci le problème analogue pour l'espace extérieur à deux sphères extérieures l'une à l'autre, et indique que l'on pourrait résoudre par une méthode semblable le problème plus général d'une fonction poliharmonique.

Au sujet des fonctions poliharmoniques de n variables, il démontre un théorème que l'on peut regarder comme l'inverse d'un théorème démontré par M. Volterra (Ces *Atti,* 1899) :

Si l'on a une fonction m-harmonique u de n variables $x_1, \ldots, x_n$, et si l'on fait l'inversion

$$(1) \qquad x'_i = \frac{x_i}{r^2} \qquad \left(r^2 = \sum_1^n {}_i\, x_i^2 ;\ i = 1, 2, \ldots, n\right),$$

la fonction

$$u' = \frac{u}{r^{2m-n}}$$

est encore m-harmonique par rapport aux variables $x'_1, \ldots, x'_n$.

L'auteur recherche la transformation la plus générale

$$(2) \qquad \begin{cases} x' = x'_i(x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ u'(x'_1, \ldots, x'_n) = \lambda(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, u(x_1, x_2, \ldots, x_n), \end{cases}$$

qui change une intégrale u de $\Delta^{2m} = 0$ en une intégrale u' de $\Delta'^{2m} = 0$, étant

$$\Delta^2 = \sum_1^n {}_i \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}, \qquad \Delta'^2 = \sum_1^n {}_i \frac{\partial^2}{\partial x_i'^2},$$

et trouve que les formules (2) se réduisent aux (1), et que

$$\lambda = \frac{1}{r^{2m-n}}.$$

Favaro (*A.*). — [V7]. Les observations de Galilée sur les planètes médicéennes du 7 janvier 1610 au 23 février 1613. (519-526).

Antoniazzi (*A.*). — [U]. Observations de planètes et de comètes, faites en 1897 et 1898. ([1]-[68]).

[Pagination spéciale pour les *Contributions de l'Observatoire,* etc.]

Levi-Civita (*T.*). — [H10*d* ref. P6*e*]. Fonctions harmoniques et transformations de contact. (671-675).

Dans les formules d'une transformation de contact

$$\begin{aligned} X &= f(x, y, p), & x &= x_1 + i x_2, \\ Y &= \varphi(x, y, p), & y &= y_1 + i y_2, \\ P &= \psi(x, y, p), & z &= p_1 + i p_2, \end{aligned}$$

où l'on suppose que les variables soient des quantités complexes, en séparant les parties réelles des parties imaginaires, on a une transformation entre deux systèmes de six variables réelles, qui a pour propriété caractéristique que, si les y_1, y_2 sont des fonctions harmoniques associées des variables x_1, x_2, les Y_1, Y_2 aussi le sont par rapport aux nouvelles variables X_1, X_2. Et, réciproquement, toute transformation ayant cette propriété rentre dans la classe susindiquée.

Favaro (*A.*). — [V7]. Supplément aux études sur la vie et les œuvres de Tite Live Burattini, Physique de Agordo du XVIIe siècle. (855-860).

Palatini (*F.*). — [N_1 1*b* ref. Q2]. Sur la représentation linéaire des complexes linéaires de droites d'un espace à quatre dimensions, par les points de l'espace à neuf dimensions. (861-869).

S. R.

MEMORIE della R. Accademia delle Scienze dell' Istituto di Bologna. Bologna. In-4° [1].

4e série, Tome X, 1889-1890.

Pincherle (*S.*). — [D2eα ref. H11c]. Sur quelques formes approchées pour la représentation de fonctions. (77-88).

On sait que, si l'on développe en fraction continue l'intégrale

$$\int_a^b \frac{\varphi(y)\,dy}{z-y},$$

et que $\frac{P_n(z)}{Q_n(z)}$ soit la n-ième réduite, on aura approximativement

$$\int_a^b \varphi(y)\,\psi(y)\,dy = A_1\,\psi(\alpha_1) + A_2\,\psi(\alpha_2) + \ldots + A_n\,\psi(\alpha_n),$$

les α_ν étant les racines (distinctes) de $Q_n(z)$, et

$$A_\nu = \frac{P_n(a_\nu)}{Q'_n(a_\nu)}.$$

De cette méthode pour le calcul numérique d'une intégrale (généralisation de celle de Gauss appelée *quadrature mécanique*), M. Pincherle a donné une extension qui permet de représenter approximativement des intégrales définies renfermant des paramètres variables, et, par suite, de résoudre aussi par approximation des problèmes fonctionnels. Il donne ainsi une représentation de la fonction

$$F(x) = \int_\lambda \varphi(y)\,\psi(x, y)\,dy, \tag{1}$$

lorsqu'on connaît $\varphi(y)$ et $\psi(x, y)$. Il résout aussi le problème réciproque : étant donnés $F(x)$ et $\psi(x, y)$, trouver la représentation la plus approchée de $F(x)$ sous la forme

$$\sum^n A_\mu\,\psi(x, a_\mu).$$

Pour cette résolution, il faut savoir déduire de (1) la fonction $\varphi(y)$ et l'auteur expose deux méthodes pour cette inversion de l'intégrale (1); par la

[1] Voir *Bulletin*, t. XVI$_2$, p. 5. Nous donnons ici la revue du Tome X, qui est le dernier de la 4e série, et qui avait été omis par erreur.

seconde de ces méthodes, il trouve

$$\varphi(y) = \sum A_\mu \Psi(a_\mu, z),$$

étant

$$F(x) = \frac{A_1}{x - \alpha_1} + \frac{A_2}{x - \alpha_2} + \ldots + \frac{A_n}{x - \alpha_n},$$

et $\Psi(y, z)$ étant la fonction *réciproque* de $\psi(x, y)$, c'est-à-dire telle que l'on ait

$$\int_\lambda \psi(x, y)\,\Psi(y, z)\,dy = \frac{1}{z - y}.$$

Il fait d'autres applications de la méthode : à la continuation analytique d'une fonction, aux équations différentielles linéaires et aux équations aux différences.

Righi (H.). — [T7*c*]. Sur les forces élémentaires électromagnétiques et électrodynamiques. (217-256).

La conclusion à laquelle arrive l'auteur est que l'on ne peut accepter que les formules de Laplace pour l'action entre un pôle et un élément de courant, et celle d'Ampère pour l'action entre deux éléments de courant, si l'on ne veut pas nier que l'action d'un élément de courant sur un élément magnétique soit identique à celle d'un élément de courant sur un autre, perpendiculaire à l'élément magnétique.

Donati (L.). — [T2*a*]. Illustration du théorème de Menabrea. (267-274).

Ruffini (E.-P.). — [$M_1 8g$]. Sur les courbes planes algébriques ayant puissance par rapport à tout point de leur plan, ou bien par rapport à quelques-uns de leurs points. (337-350).

Étant p une droite, conduite par un point O (pôle) et $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m$ les distances de O aux m points communs à p et à la courbe C_m

$$f(x, y) = 0,$$

l'auteur appelle *puissance* de la courbe, par rapport à O, le produit

$$\pi = \rho_1 \rho_2 \ldots \rho_m,$$

lorsque ce produit est indépendant de la direction de p et ne varie qu'avec la position du pôle. La condition pour que cela ait lieu est que la partie de l'équation, de degré le plus élevé, soit de la forme

$$a_0 (x^2 + y^2)^k,$$

c'est-à-dire que la courbe soit cyclique de l'ordre k. La puissance est alors

$$\pi = \frac{1}{a_0} f(x_0, y_0),$$

x_0, y_0 étant les coordonnées du pôle.

Il trouve aussi qu'une courbe ne peut avoir puissance par rapport à tous *ses* points. Elle le peut, par rapport à quelques-uns de ceux-ci, lorsqu'elle est de l'ordre $2k+1$ et cyclique d'ordre k; les points en question sont alors les points de contact de la courbe avec les tangentes parallèles à l'asymptote réel.

Saporetti (*A.*). — [U]. Troisième méthode pour découvrir, plus aisément qu'avec les autres méthodes, et avec moindre dépense, les instants du lever et du coucher de la Lune à Bologne, et avec une seule grande Table. (381-387).

Pincherle (*S.*). — [D2*f*]. Essai d'une généralisation des fractions continues algébriques. (513-538).

Étant données p fonctions analytiques $\sigma_0, \sigma_1, \ldots, \sigma_{p-1}$, l'auteur définit un algorithme qui conduit à une équation récurrente d'ordre p, et qui, pour $p = 2$, se réduit au développement de $\sigma_1 : \sigma_0$ en fraction continue. Les propriétés de cet algorithme sont analogues à celles des fractions continues, et son utilité consiste surtout en ce qu'à son aide on peut déterminer des polynomes rationnels $A_0, A_1, \ldots, A_{p-1}$, tels qu'on ait

$$A_0\sigma_0 + A_1\sigma_1 + \ldots + A_{p-1}\sigma_{p-1} = 0,$$

avec la plus grande approximation possible pour un degré donné des A. Suivent des applications.

Riccardi (*P.*). — [V9]. Essai d'une Bibliothèque mathématique italienne du XIX[e] siècle. (635-651).

Retali (*V.*). — [P6*f*]. Sur deux transformations planes quadratiques particulières. (653-671, une planche).

Les transformations sont les suivantes :

Ayant pris une conique fixe K^2 et un point fixe R :

1° A un point arbitraire P correspondent les deux points doubles de l'involution déterminée sur RP par les deux couples (R, P) et (K^2, RP);

2° A un point arbitraire P correspond le point séparé harmoniquement par R et par la polaire de P par rapport à K^2.

Canevazzi (*S.*). — [T2*a*]. Contribution à la théorie des systèmes élastiques. (673-686, une planche).

L'auteur commence par rappeler le théorème de réciprocité de Betti; puis il

démontre deux autres théorèmes analogues pour les systèmes élastiques articulés, et il les applique pour déterminer les déformations correspondantes à un nœud d'une charpente réticulaire, et les réactions produites par des liens du système. Enfin, il montre comment on pourrait arriver aux mêmes résultats en partant du théorème de Castigliano et de Menabrea relatif au travail de déformation.

Padova (*E*.). — [O5 ref. C4]. Sur la théorie générale des surfaces. (745-772).

Ayant d'abord rappelé les propriétés de la *dérivation covariante* de M. Ricci, l'auteur en fait l'application à la théorie des surfaces, en retrouvant les formules fondamentales de cette théorie.

5e série, Tome VII, 1897-1898-1899 (1).

Donati (*L*.). — [B12*c*]. Précis d'Analyse vectorielle. (11-34).

En employant l'opérateur (vecteur symbolique) d'Hamilton

$$\nabla = i\Delta_1 + j\Delta_2 + k\Delta_3 = i\frac{\partial}{\partial x} + j\frac{\partial}{\partial y} + k\frac{\partial}{\partial z},$$

l'auteur montre comment la méthode vectorielle peut s'appliquer à la transformation des intégrales dans l'espace. Puis il traite de la détermination d'un champ vectoriel. Le vecteur général A du champ peut se déterminer par les valeurs de $\nabla^2 A$ dans le champ et les valeurs de A et de $|n\nabla|A$ au contour, n étant le vecteur unitaire dans la direction de la normale intérieure et $|n\nabla|$ indiquant un produit intérieur qui, par cela, se réduit à une quantité scalaire. Mais on peut aussi donner une expression de A par des éléments indépendants des axes

$$A = -\nabla\chi + \{\nabla U\},$$

où

$$\chi = |\nabla P|, \qquad U = \{\nabla P\},$$

$$P = \frac{1}{4\pi}\int\frac{A\,d\tau}{\tau},$$

l'intégration est étendue au champ du vecteur, et { } indique un produit extérieur (quantité vectorielle); et l'auteur montre que les éléments

$$\theta = |\nabla A|, \qquad g = \{\nabla A\}, \qquad \varepsilon = |nA|, \qquad h = \{nA\}$$

sont suffisants pour la détermination du champ vectoriel. Ensuite, il trouve les conditions auxquelles doivent satisfaire ces éléments afin qu'ils puissent déterminer un champ vectoriel. Puis il ajoute quelques observations sur la repré-

(1) Voir *Bulletin*, t. XXII_2, p. 207.

sentation de A en fonction de χ et de U, qui décompose A en une partie potentielle et une partie solénoïdale.

Voir dans ce même Tome, à la page 427, une exposition plus complète des mêmes propriétés, par le même auteur.

Saporetti (*A*.). — [K20*f*]. Analyse de quelques cas singuliers géométriques, comparés avec les formes algébriques correspondantes. (213-221).

Riccardi (*P*.). — [V6-9]. Contribution des Italiens à l'histoire des Mathématiques pures et appliquées. (371-425).

Deuxième Partie d'un Mémoire publié dans ces *Memorie*, 5e série, t. VI, 1897, p. 755.

Donati (*L*.). — [B12*c*]. Sur les propriétés caractéristiques des champs vectoriels. (427-469).

L'auteur traite de nouveau les questions contenues dans le Mémoire précédent (page 11), en les complétant.

Benetti (*J*.). — [S3*c*]. Formules fondamentales d'application générale pour les turbines motrices et pour les pompes centrifuges élévatoires. (521-540).

Saporetti (*A*.). — [U ref. K20*f*]. Interprétation des lieux difficiles dans la théorie allemande des éclipses de Lune. (621-638).

Ce que l'auteur appelle la *théorie allemande* n'est autre chose que le *Handwörterbuch der Astronomie* de H. Kobold, et les *lieux difficiles* sont des formules de Trigonométrie sphérique.

Donati (*L*.). — [T7 ref. B12*c*]. Observations sur les équations de Hertz et sur le théorème de Poynting. (633-638).

L'auteur déduit, par le calcul vectoriel, des équations qui coïncident avec celles de Hertz, et cela pour un milieu caractérisé par un vecteur q, solution de l'équation

$$\frac{d^2q}{ds^2} = \omega^2\nabla^2 q,$$

et satisfaisant à la condition solénoïdale

$$|\nabla q| = 0.$$

Il en déduit aussi une équation représentant le théorème de Poynting. Après il montre la relation qu'il y a entre ces équations et le mouvement libre d'un milieu élastique isotrope et homogène, et conclut que les mouvements solé-

noïdaux libres des points du milieu donnent la représentation complète des équations de Hertz et du théorème de Poynting.

Tome VIII, 1899-1900.

Arzelà (C.). — [D2aγ]. Sur les séries de fonctions. (131-186).

Soit y_0 un point limite d'un groupe quelconque de nombres (y), et soit

$$G_0 = (y_1, y_2, y_3, \ldots)$$

une succession quelconque de nombres (y), tendant à la limite y_0. En considérant les variables comme coordonnées orthogonales d'un point dans le plan, prenons le groupe des droites

$$y = y_1, \quad y = y_2, \quad \ldots$$

dans l'intervalle $(a \ldots b)$, et sur chaque droite marquons des petits traits, distincts les uns des autres, en nombre fini, pouvant varier d'une droite à l'autre et même croître indéfiniment à mesure que y_s s'approche de y_0. La somme des petits traits $\delta_{1s}, \delta_{2s}, \ldots, \delta_{ns}$, marqués sur y_s soit d_s. Si, pour toute valeur $s = 1, 2, \ldots$, on a toujours $d_s \geq d$, nombre positif déterminé, il y a nécessairement, entre a et b, un point x_0 (au moins), tel que la droite $x = x_0$ rencontre un nombre infini de traits δ.

L'auteur démontre ce théorème d'une manière différente de celle qu'il avait suivie dans les *Rendiconti dei Lincei*, 1885 (*Un théorème sur les séries de fonctions*), puis il en développe plusieurs conséquences relatives aux fonctions de deux variables, et en particulier aux séries de fonctions d'une variable et à leur continuité. Particulièrement importante est ce que l'auteur appelle *convergence uniforme par traits* d'une série de fonctions continues

$$u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots,$$

qui a lieu lorsque, étant donnés un nombre σ arbitraire et un nombre m aussi arbitraire, on peut avec un nombre fini de traits, pris sur les droites

$$y = m + p_1, \quad y = m + p_2, \quad \ldots, \quad y = m + p_r,$$

et formant avec leur somme l'intervalle $(a \ldots b)$ de la variable x, former une ligne, en tout point (x, n) de laquelle on ait

$$R_n(x) \leq \sigma$$

(ici évidemment les valeurs de n sont entendues comme des coordonnées y). Cette espèce de convergence est la condition nécessaire et suffisante pour qu'une série de fonctions continues soit aussi continue.

La convergence uniforme ordinaire de la série porte que la fonction qu'elle représente, regardée comme fonction de x et de n, ait la continuité absolue en tout point (x, ∞).

Righi (*A.*). — [T3*c*]. Sur le phénomène de Zeemann dans le cas général d'un rayon lumineux incliné d'une manière quelconque sur la direction de la force magnétique. (263-294).

Arzelà (*C.*). — [D2$a\gamma$]. Sur les séries de fonctions. (701-744).

Suite du Mémoire précédent (page 131). Intégrabilité et dérivabilité des séries de fonctions. La condition nécessaire et suffisante pour l'intégrabilité de la série, lorsque les termes sont intégrables, est la convergence uniforme par traits *en général*. C'est la convergence par traits, mentionnée dans l'autre Mémoire, mais où l'on peut supprimer dans (a, b) un nombre fini de traits de somme inférieure à un nombre fini ε. L'intégrabilité étant supposée, l'auteur trouve la condition pour que la série des intégrales représente l'intégrale de la série. Si la somme $S_n(x)$ est inférieure à un nombre fixe, quel que soit x [dans (a, b)] et quel que soit n, la série intégrale est l'intégrale cherchée. S'il y a un groupe de points x, dans le voisinage desquels cette condition n'est pas vérifiée, la série intégrale est encore l'intégrale de la série, lorsque ce groupe est dénombrable et la série intégrale est continue. Il démontre des propositions semblables relativement à la dérivabilité, et ajoute une observation relative aux fonctions analytiques.

S. R.

BIBLIOTHECA MATHEMATICA. — Zeitschrift für Geschichte der mathematischen Wissenschaften. Herausgegeben von *Gustaf Eneström* in Stockholm. Dritte Folge, Leipzig, Teubner ([1]).

Tome VI (1905).

**Eneström* (*G.*). — Sur la valeur d'hypothèses historiques dans le domaine de l'histoire des Mathématiques. (1-8).

L'auteur débute par la remarque que, dans les recherches de l'histoire des Mathématiques, les hypothèses jouent un rôle plus important qu'on n'est porté à supposer; en effet, aussitôt qu'on se sert sans réserve d'une notice de seconde main, on émet l'hypothèse que la source est digne de foi. Un auteur critique essaie naturellement d'éviter au possible des hypothèses de cette sorte, mais très souvent il faut s'en servir, et M. Eneström fait voir par un exemple comment il est difficile de savoir si, pour ce qui concerne une notice de seconde

---

([1]) Voir *Bulletin*, XXX_2, 1906, p. 139.

main, on doit indiquer expressément ou non qu'elle ne doit pas être acceptée sans avoir été contrôlée.

M. Eneström passe ensuite aux hypothèses proprement dites, c'est-à-dire aux suppositions qu'on fait pour mettre en ordre ou compléter une série de faits dont il faut rendre compte. Sans hypothèses de cette sorte il est souvent impossible d'exposer en ordre chronologique les découvertes mathématiques, et, si l'on veut faire ressortir la filiation des idées dans le développement des Mathématiques, ces hypothèses sont absolument indispensables, du moins pour ce qui concerne les temps un peu reculés. Il en résulte immédiatement que l'emploi d'hypothèses historiques dans des recherches de l'histoire des Mathématiques est justifié, mais M. Eneström fait observer aussi qu'elles peuvent parfois être utiles, même dans des cas où elles ne sont pas indispensables.

D'autre part, l'usage des hypothèses n'est légitime que sous certaines conditions, dont M. Eneström signale, en premier lieu, celles que chaque hypothèse doit être qualifiée expressément non pas de fait mais de supposition, et qu'elle ne doit être émise qu'après un examen minutieux des faits qu'il faut expliquer; M. Eneström démontre par des exemples que même des éminents historiens des Mathématiques n'ont pas observé toujours ces règles. M. Eneström fait ressortir aussi que, dans toutes les conditions, les hypothèses ne doivent être employées qu'avec précaution et mesure, et il appelle l'attention sur les inconvénients qui résultent de leur usage immodéré. En particulier, il avertit de prendre garde contre des hypothèses générales, par exemple celle qu'un certain peuple a une aptitude spéciale de telle branche des Mathématiques.

Duhem (*P.*). — Sur l'*Algorithmus demonstratus*. (9-15).

Dans le Tome précédent (p. 7-14) de la *Bibliotheca mathematica*, M. Eneström avait montré combien étaient insuffisantes les preuves favorables à l'attribution usuelle de l'*Algorithmus demonstratus* (publié par Schöner en 1534) à Jordanus Nemorarius, et il avait demandé que de nouvelles recherches fussent faites au sujet de ce Traité d'Arithmétique. L'article de M. Duhem est une première tentative vers ce but. De fait, il a constaté que ce Traité est identique à l'*Algorismus magistri Gernardi in integris et minuciis*, dont on connaissait jusqu'ici deux manuscrits et dont il a découvert une autre copie anonyme du XIIIe siècle. M. Duhem est de l'avis que l'inconnu *magister Gernardus* n'est pas identique à Jordanus, et que l'*Algorithmus demonstratus* est postérieur au Traité d'Algorisme de Sacrobosco; probablement Gernardus était un contemporain de Campanus de Novare.

**Eneström* (*G.*). — La correspondance de Léonard Euler et de Jean I Bernoulli. III, 1739-1746. (16-87).

Les lettres de Jean I Bernoulli à Euler ont été publiées en 1843 par P.-H. Fuss, mais les lettres d'Euler étaient inédites jusqu'en 1904 où M. Eneström a commencé à les publier dans la *Bibliotheca mathematica*, en réimprimant les lettres correspondantes de Bernoulli et en y ajoutant des notes explicatives. Le troisième et dernier article contient cinq lettres d'Euler (1739-1741) et autant de lettres de Bernoulli; les lettres suivantes d'Euler sont perdues et, pour cette raison, M. Eneström n'a donné que des sommaires des lettres gardées de Bernoulli écrites pendant les années 1742-1746. Parmi les sujets de Mathéma-

tiques pures traités dans les lettres dont il s'agit ici, il faut signaler en premier lieu l'intégration des équations linéaires incomplètes à coefficients constants et la sommation $\sum_{x=1}^{x=\infty} \frac{1}{x^2 \pm n}$. En passant, quelques autres séries sont traitées et quelques formules pour l'intégration des fonctions algébriques par réduction sont indiquées. D'autre part, les lettres s'occupent aussi de plusieurs questions de Mathématiques appliquées, en particulier du mouvement de corps flottants et de l'Hydrodynamique.

***Schlesinger* (*L.*). — Sur la notion de fonction analytique chez Jacobi et son rôle dans le développement de la théorie des fonctions. (88-96).

M. Schlesinger fait ressortir que la notion de fonction analytique chez Jacobi ne coïncide pas avec celle de Weierstrass, parce que, pour Jacobi, la propriété fondamentale d'une fonction analytique est que l'ensemble des valeurs de la variable indépendante, pour lesquelles la fonction prend une même valeur, n'est pas condensé (*überalldicht*) pour chaque point du plan. De cette propriété fondamentale Jacobi pouvait conclure immédiatement que l'inversion d'une seule intégrale hyperelliptique n'est pas une fonction analytique et que, par conséquent, il faut prendre en considération deux intégrales hyperelliptiques pour que l'inversion soit une fonction analytique.

Cette notion de fonction analytique a été plus tard le point de départ de L. Fuchs dans ses recherches sur la généralisation du problème d'inversion d'intégrales et, pour cette raison, on peut dire que, dans une certaine mesure, la théorie moderne des équations différentielles linéaires tire son origine des travaux de Jacobi.

***Eneström* (*G.*). — Sur l'utilité de la fondation d'un dépôt de manuscrits de mathématiciens. (97-100).

Le but du dépôt dont il s'agit serait, selon M. Eneström, de réunir et garder les manuscrits laissés par des mathématiciens décédés. M. Eneström fait observer que ces manuscrits se perdent maintenant très souvent, bien qu'ils puissent être d'un grand intérêt pour l'avenir. En particulier, la correspondance scientifique d'un mathématicien décédé est anéantie non rarement, et pourtant elle peut contenir d'importants matériaux pour l'histoire du développement des théories mathématiques.

M. Eneström expose aussi dans son article, de plus près, comment le dépôt projeté serait institué et fonctionnerait, et il émet le vœu que la *Deutsche Mathematikervereinigung* se charge de la réalisation du projet.

***Eneström* (*G.*), *Favaro* (*A.*), *Grönblad* (*C.*), *Kürschák* (*J.*), *Rudio* (*F.*), *Sturm* (*A.*), *Suter* (*H.*). — Petites remarques sur la 2e édition des *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik* de M. Cantor. (101-111, 208-214, 305-321, 394-408).

Continuation de la série de remarques qui a commencé dans le Tome Ier de

la 3[e] série de la *Bibliotheca mathematica*. Le nombre de remarques nouvelles est de 90 à peu près.

Tannery (*P.*). — Sur la division du temps en instants au moyen âge. (111).

Au moyen âge l'heure fut parfois divisée en 22560 *instantia* ou *atomi*, et Tannery essaie d'expliquer cette division assez singulière. Il fait remarquer d'abord qu'une heure était égale à 40 *momenta*, de manière qu'il s'agit d'expliquer la subdivision d'un *momentum* en 564 *instantia*. Maintenant, $564 = 12 \times 47$ et, d'un autre côté, le nombre de mois du cycle de Méton était $235 = 5 \times 47$; Tannery en conclut qu'on a cherché à établir une commune mesure entre l'année julienne et le mois lunaire et que, à cet effet, on a introduit dans la subdivision de l'heure le facteur 47. Il mentionne aussi que l'opinion que le temps est composé d'éléments indivisibles semble avoir été transmise au moyen âge par Martianus Capella, mais que Bède semble avoir indiqué le premier le nombre 22560.

**Suter* (*H.*). — Sur la signification de l'expression *regula cæci*. (112).

Les mathématiciens arabes Qosta ben Luqa et Ibn el-Haïtam ont écrit des traités sur *el-talaqi*, et comme ce mot peut être traduit en latin par *cætus*, M. Suter émit l'hypothèse que ces traités s'occupent de la *regula cæci* dont le second mot est, selon lui, une altération de *cæti*. Cette hypothèse est, en quelque sorte, confirmée par le fait qu'au mot *el-talaqi* correspond, en langue turque, le mot *sikisch*, et que la *regula cæci* a été appelée *regula sikisch* par un écrivain du XVII[e] siècle.

**Björnbo* (*A.-A.*). — La *Theorica planetarum* de Walther Bryte. (112-113).

Il y a deux rédactions du traité *Theorica planetarum* attribué ordinairement à Gherardo de Sabbionetta, dont l'une est très courte et l'autre plus étendue. Celle-là, dont de nombreuses copies sont connues, est très probablement l'œuvre de Gherardo de Sabbionetta, tandis que celle-ci, qui a été jusqu'ici à peu près inconnue, doit être attribuée à Walter Bryte, conformément à l'indication expresse d'un manuscrit d'Oxford.

**Eneström* (*G.*). — Sur l'auteur ou le traducteur du Traité *Liber algorismi de pratica arismetrice*, publié en 1857 par Boncompagni. (114).

Parmi les copies du traité dont il s'agit quelques-unes sont attribuées tantôt à Joannes Hispalensis, tantôt à Gerardus Cremonensis, et quelques copies n'indiquent point de nom d'auteur ou de traducteur. De plus, la fin de l'édition de Boncompagni, qui contient un recueil d'extraits sans rapport avec le traité proprement dit, manque dans plusieurs manuscrits. Pour ces raisons, M. Eneström demande une recherche spéciale sur l'origine du traité.

***Wegener (A.). — Sur les œuvres astronomiques d'Alphonse X. (129-185).**

Après quelques brèves notices sur le roi Alphonse X (mort en 1284) et son temps, M. Wegener signale les ouvrages rédigés par celui-ci ou sur son ordre; la plupart de ceux ayant trait à l'Astronomie ont été publiés en 1863-1867 par M. Rico y Sinobas sous le titre *Libros del saber de Astronomia del rey d. Alfonso X*. Cette édition ne contient, à proprement dire, que deux Ouvrages, à savoir un manuel des instruments astronomiques et des Tables astronomiques. De fait, le manuel qui vient d'être nommé est une compilation de plusieurs petits Ouvrages, traduits en grande partie, sur l'ordre du roi, de l'arabe et remaniés après par le roi même ou par quelqu'un de ses collaborateurs. Le manuel a pour introduction un traité des constellations, traduit librement d'après un Ouvrage connu de l'astronome arabe el-Sufi. Les autres parties du manuel sont tirées de Kosta ben Luka, Zarkali et d'autres auteurs nommés ou anonymes; pour cette raison on a supposé, par un malentendu, qu'Alphonse X avait réuni à Cordova une commission d'astronomes; en vérité, il ne semble avoir eu à sa disposition que quelques traducteurs dont quelques-uns étaient en même temps astronomes. M. Wegener rend compte en détail des instruments décrits dans le manuel et il a l'occasion de corriger en même temps plusieurs malentendus d'autres historiens de l'Astronomie.

Quant aux Tables astronomiques d'Alphonse X, Rico y Sinobas en a retrouvé le texte original, mais les Tables mêmes semblent être perdues; celles publiées par Rico y Sinobas ne sont qu'une espèce de calendrier perpétuel et elles ne s'accordent point avec le texte. D'autre part, on possède des Tables astronomiques attribuées à Alphonse X et publiées plusieurs fois depuis 1483 jusqu'à 1641, mais ces Tables ont évidemment été remaniées au moyen âge, sans doute par le mathématicien Johannes de Saxonia (vers 1300), dont le nom est indiqué aussi dans les manuscrits et les éditions imprimées. M. Wegener examine de plus près les différences entre les Tables perdues mais décrites dans le texte original et les Tables publiées, et il trouve que ces différences sont assez essentielles; d'un autre côté, il ne lui a pas été possible d'expliquer pourquoi les Tables originales ont été remaniées.

***Eneström (G.). — Sur une règle de convergence indiquée par Euler. (186-189).**

On a avancé, d'une part (R. Reiff en 1889), que la règle de convergence de Cauchy $\lim_{n=\infty} |S_{m+n} - S_n| = 0$ pour la série $S_r = a_0 + a_1 + \ldots + a_r$ a été indiquée déjà en 1740 par Euler; d'autre part (A. Pringsheim en 1898), que la règle qu'Euler a indiquée en 1740 n'est qu'une règle de divergence. M. Eneström a examiné la question de plus près, et il a trouvé qu'Euler, dans le Mémoire dont il s'agit, affirme expressément que la série $S_r = a_0 + a_1 + \ldots + a_r$ converge si $\lim_{n=\infty} |S_{kn} - S_n| = 0$.

***Jourdain (Ph.-E.-B.). — La théorie des fonctions chez Cauchy et Gauss. (190-207).**

Le but principal de cet article est de faire ressortir que quelques-unes des

contributions les plus importantes de Cauchy à la théorie des fonctions se laissent entrevoir déjà dans son Mémoire célèbre de 1814, en particulier le théorème connu maintenant sous son nom. M. Jourdain met aussi en évidence les recherches correspondantes de Gauss remontant aux années 1811 et 1816, et fait observer que Cauchy ne pouvait préciser dûment la notion de fonction analytique parce que sa manière de voir était trop géométrique.

**Eneström* (*G.*). — Quelle est la source des solutions du problème de la duplication du cube enseignées par Leonardo Pisano et Jordanus Nemorarius? (214-215).

Leonardo Pisano a indiqué trois solutions et Jordanus Nemorarius deux solutions du problème de la duplication du cube; quelques-unes de ces solutions concordent mot pour mot soit entre elles, soit avec des solutions de la traduction latine de la Géométrie des fils de Mousa ben Schakir. Pour cette raison, M. Eneström demande une recherche particulière sur la source de toutes ces solutions.

Tannery (*P.*). — Un Traité grec d'Arithmétique antérieur à Euclide. (225-229).

Cet article est la première partie d'un écrit plus étendu, que Tannery avait commencé quelques semaines avant sa mort, mais que sa dernière maladie ne lui permit pas d'achever.

Dans son Traité *De institutione musica,* Boetius nous a conservé un fragment d'Archytas où il est prouvé qu'un rapport de la forme $(n+1):n$ ne peut être divisé en deux rapports égaux par l'intercalation d'aucun nombre. Tannery rend compte de cette démonstration et fait remarquer qu'elle suppose déjà développée une suite de théorèmes assez considérable sur un plan analogue à celui du septième Livre des *Elementa;* il en conclut l'existence, dès le temps d'Archytas, d'éléments arithmétiques similaires à ceux d'Euclide, et qu'Archytas a probablement contribué à améliorer. Quant à l'origine du fragment conservé par Boetius, Tannery est de l'avis que celui-ci n'avait pas recours au traité même d'Archytas, mais qu'il l'avait puisé dans l'*Arithmétique* actuellement perdue d'Apulée.

**Björnbo* (*A.-A.*). — Les manuscrits mathématiques de Saint-Marc à Florence. (230-238).

Continuation de l'article dont le commencement a paru dans le Tome IV (1903) du Journal. Ici deux manuscrits sont décrits, tous les deux du XIV[e] siècle et contenant des Traités d'Astronomie ou d'Astrologie.

**Björnbo* (*A.-A.*). — La traduction par Gérard de Crémone de l'*Algèbre* d'Alkhvarismi et des *Éléments* d'Euclide. (239-248).

1. M. Björnbo fait observer que le *Liber qui secundum Arabes vocatur algebra et almucabala translatus a magistro Giurardo Cremonense in toleto*

de arabico in latinum, publié en 1851 par Boncompagni, a reçu probablement un titre inexact. D'une part, ce Traité n'est guère une traduction de l'arabe, mais plutôt un Ouvrage compilé à l'aide de sources essentiellement arabes; d'un autre côté, Gérard de Crémone n'a guère rédigé le Traité, car il existe un autre Traité latin intitulé *Liber Maumeti filii Moysi Alchoarismi de algebra et almucabala*, publié par Libri, et à propos de ce Traité, qui est évidemment une traduction de l'arabe, un manuscrit indique comme traducteur précisément Gérard de Crémone. Enfin l'hypothèse que tous les deux Traités appartiennent à celui-ci est peu probable, parce que leur contenu est essentiellement le même. M. Björnbo est de l'avis que le Traité publié par Libri est bien traduit par Gérard de Crémone, mais que celui publié par Boncompagni n'a rien à faire avec celui-ci.

2. M. Björnbo a découvert une traduction des *Éléments* d'Euclide différente de celles d'Atelhart et de Campano, et probablement faite par Gérard de Crémone. Tous les manuscrits de cette traduction sont anonymes, mais on sait que Gérard de Crémone ne signait pas ses traductions, et M. Björnbo fait voir que la terminologie de la traduction anonyme concorde avec celle d'autres traductions de Gérard de Crémone.

**Hunrath* (*K.*). — Remarques sur la construction approximative de polygones réguliers chez Albert Dürer. (249-251).

Ces remarques se rapportent aux polygones réguliers à 13 et à 9 côtés. A propos de celui-là, il semble que la construction que Dürer voulut indiquer est une autre et meilleure que celle donnée par le texte de son Ouvrage. Quant à la construction de Dürer du polygone à 9 côtés, Schwenter l'a enseignée plus tard sans mentionner qu'elle se trouve déjà chez Dürer.

**Pringsheim* (*A.*). — Sur un critère de convergence d'Euler. (252-256).

M. Pringsheim reconnaît qu'Euler a proposé en 1740 une règle de convergence, mais il fait remarquer que la condition indiquée par Euler n'est pas suffisante, et que, par conséquent, le résultat juste auquel celui-ci est arrivé en s'en servant dépend du hasard. M. Pringsheim fait voir aussi comment on doit rectifier la règle d'Euler, qui devient alors identique avec la règle de Cauchy.

Zeuthen (*H.-G.*). — L'œuvre de Paul Tannery comme historien des Mathématiques. [Avec Introduction et Liste bibliographique par G. Eneström]. (257-304 + portrait).

L'introduction de M. Eneström contient une courte Notice biographique avec des renseignements plus détaillés sur les Cours d'histoire des Mathématiques professés par Paul Tannery en 1884 et 1885 à la Faculté des Sciences de Paris, et sur les circonstances attachées à la nomination en 1904 du titulaire de la chaire d'histoire des Sciences au Collège de France, où Paul Tannery ne fut pas nommé par le ministre de l'Instruction publique, bien qu'il eût été placé en tête de la liste de présentation.

M. Zeuthen commence son analyse de l'œuvre de Paul Tannery en faisant ressortir que celui-ci s'était occupé non seulement de l'histoire des Mathématiques, mais aussi de l'histoire générale des Sciences, et que, pour cette raison, il pouvait apprécier le développement des Mathématiques d'un point de vue plus étendu et plus général que ses collègues. D'un autre côté, Paul Tannery était non seulement historien, mais aussi en même temps mathématicien et philologue, et par là il lui était possible d'enrichir extraordinairement nos connaissances des détails de ce développement. Comme exemple de l'avantage d'un point de vue d'où l'on embrasse à la fois le développement de toutes les sciences, M. Zeuthen cite le Livre de Paul Tannery *Pour l'histoire de la Science hellène* (1887), qui contient une importante étude sur les recherches infinitésimales des Grecs avant Euclide et Archimède.

Dans l'exposition suivante M. Zeuthen s'occupe d'une manière détaillée des travaux de Paul Tannery ayant trait à l'histoire des Mathématiques grecques. D'abord il passe en revue ceux relatifs à l'Arithmétique et à l'Algèbre des Grecs, et fait remarquer comment sont nombreux les points où Paul Tannery en a complété ou corrigé nos connaissances; ainsi, par exemple, il a, pour ainsi dire, découvert une Algèbre géométrique employée par les mathématiciens grecs antérieurs à Euclide. Presque aussi importantes sont les recherches de Paul Tannery sur différents points de la Géométrie grecque, qu'il a réunies en grande partie en 1887 dans le livre *La Géométrie grecque,* et où il donne en même temps de nombreux documents nouveaux et révèle l'enchaînement des différentes découvertes des géomètres grecs antérieurs à Euclide. Paul Tannery s'est occupé aussi de l'Astronomie grecque et sur ce domaine nous lui devons une excellente exposition des doctrines enseignées par Ptolémée dans l'*Almageste* et de leurs sources.

Pour ce qui concerne les écrits de Paul Tannery sur l'histoire du moyen âge, M. Zeuthen en rend compte plus sommairement, et il consacre la fin de son article aux éditions des œuvres de Fermat et de Descartes, qui sont dues en premier lieu à Paul Tannery, ainsi qu'aux nombreux écrits de celui-ci ayant trait à ces deux éminents mathématiciens français du XVIIe siècle. En terminant, M. Zeuthen résume son jugement sur les Ouvrages de Paul Tannery par les mots suivants : « La lecture attentive des travaux de Paul Tannery est fort suggestive. A côté de leurs fruits directs, ils ont certainement porté déjà beaucoup de fruits indirects par leur influence sur d'autres écrivains, et ils en porteront de nouveaux, si les futurs historiens les lisent attentivement et ne se bornent pas à y chercher les résultats qui sautent le plus aux yeux. »

La liste bibliographique annexée à l'article de M. Zeuthen comprend les travaux de Paul Tannery sur les Mathématiques et sur l'histoire et la philosophie des Sciences mathématiques. M. Eneström y a indiqué aussi sommairement les analyses des Ouvrages d'autres auteurs publiées par Paul Tannery dans des journaux mathématiques et dont quelques-unes ont l'importance de travaux originaux. Du reste, les travaux sont rangés en ordre chronologique et le nombre total en est de 241.

**Suter* (*H.*). — Sur le Traité *De superficierum divisionibus* de Muhammed Bagdadinus. (321-322).

On avance ordinairement que le mathématicien anglais J. Dee a trouvé un manuscrit arabe contenant le Traité de Muhammed Bagdadinus sur la division

de figures rectilignes, et qu'il l'a traduit ensuite en latin. M. Suter fait observer que cette indication dérive, sans doute, d'un malentendu, et que Dee n'a que copié une ancienne traduction latine du Traité, due probablement à Gérard de Crémone.

***Hayashi* (*T.*). — Le problème des monnaies de Tait dans les Mathématiques japonaises. (323).

Il s'agit d'un problème connu où quatre francs et quatre sous sont placés sans ordre dans un même rang, et il est demandé de les déplacer successivement d'après certaines règles, de manière que les quatre francs se trouvent enfin au commencement et les quatre sous à la fin du rang. Ce problème a été proposé, en 1884, par Tait, mais il a été connu et traité en Japon dès le milieu du XVIIIe siècle.

**Eneström* (*G.*). — Sur une valeur approchée de $\cos x$. (323-324).

Les mathématiciens indiens ont enseigné une règle pour le calcul approché d'un polygone régulier équivalent à

$$\cos x = \frac{1 - \frac{2x^2}{5}}{1 + \frac{x^2}{10}} \qquad \text{ou} \qquad x^2 = 10\,\frac{1 - \cos x}{4 + \cos x}.$$

M. Eneström demande si ses formules ont été indiquées par quelque mathématicien de l'antiquité ou du moyen âge.

**Eneström* (*G.*). — Sur deux dénominations anciennes de la cinquième puissance d'une quantité. (324-325, 410).

Vers la fin du moyen âge on trouve deux noms pour x^5, à savoir : *sursolidum* et *primo relato,* dont le premier fut modifié plus tard en *surdesolidum* ou *supersolidum,* probablement parce qu'on ne comprenait pas le mot *sursolidum.* Jusqu'à présent il n'a été donné aucune explication satisfaisante de l'origine des deux dénominations.

**Haas* (*A.-E.*). — Sur l'originalité des doctrines physiques de Johannes Philoponus. (337-342).

Le but de cet Article est de montrer que Johannes Philoponus a tiré ses doctrines physiques, pour la plus grande partie, des Ouvrages de philosophes et astronomes plus anciens, en particulier pour ce qui concerne la chute, le mouvement et la pesanteur des corps. Comme ses prédécesseurs M. Haas signale Hipparque, Epicure, Lucrèce, Platon, Zenon et même Aristote.

**Loria* (*G.*). — Sur une transformation de contact chez Fermat. (343-346).

Il s'agit d'une transformation employée par Fermat qui n'est pas une transformation de contact proprement dite, mais qui lui est très semblable. Fermat part d'une courbe rectifiable $y_0 = f(x)$, et obtient par $n - 1$ transformations de la forme $x_1 = x$, $y_1 = \int_0^x \sqrt{1 + [f(x)]^2}\, dx$ une nouvelle courbe dont l'arc $S_{n-1} = \int_0^x \sqrt{n + [f(x)]^2}\, dx$ est aussi une fonction explicite de x. Comme courbe de départ, Fermat se sert d'une parabole et, suivant qu'on met son équation sous la forme $y^2 = 2px$ ou sous la forme $x^2 = 2qy$, on obtient différentes courbes rectifiables. M. Loria fait observer en terminant que le cas où la courbe transformée devient identique à la courbe de départ a échappé à l'attention de Fermat.

**Hayashi* (*T.*). — Les cercles magiques dans les Mathématiques japonaises. (347-349).

En Europe des cercles magiques ont été traités pour la première fois, en 1769, par B. Franklin, mais déjà vers le milieu du XVIIe siècle de telles figures ont été construites par les mathématiciens japonais. M. Hayashi rend compte des écrits s'y rapportant et de la méthode employée, en 1660, par Y. Isomura pour construire des cercles magiques.

**Jourdain* (*Ph.-E.-B.*). — Sur deux équations différentielles de la *Mécanique analytique* de Lagrange. (350-353).

M. Jourdain fait ressortir que Lagrange s'est occupé, au moins incidemment, du cas où, dans un problème de Dynamique, les équations de condition ne sont pas des différences exactes, et que la *Mécanique analytique* traite aussi des cas où les équations de condition contiennent explicitement le temps t.

**Rudio* (*F.*). — Wilhelm Schmidt (1862-1905). (354-386, avec portrait).

Cet article contient une Notice détaillée sur la vie et les Ouvrages d'histoire des Mathématiques de Guillaume Schmidt (né à Harderode le 25 août 1862, mort à Helmstedt le 7 août 1905), collaborateur actif de la *Bibliotheca mathematica* et connu en premier lieu comme éditeur de la nouvelle édition des Œuvres de Héron.

**Amodeo* (*F.*). — Sur le cours d'histoire des Mathématiques à l'Université de Naples. (387-393).

Depuis près de 30 années, des cours d'histoire des Mathématiques ont été professés en Italie, mais le premier cours régulier sur ce sujet a été institué en décembre 1905 à l'Université de Naples, où M. Amodeo en a été chargé par le Ministre de l'Instruction publique. Trois heures par semaine sont consacrées à ce cours, et M. Amodeo a l'intention de traiter complètement de l'histoire

générale des Mathématiques dans le courant de deux années. Il rend compte de son programme et de la fin de sa première leçon, où il a exposé en détail le but de son cours.

**Sós* (*E.*). — Sur l'histoire de la Géométrie naturelle. (408-409).

En vue de compléter la Notice de M. Wölffing sur l'état actuel de la théorie des coordonnées naturelles (*Bibl. math.*, 3e série, t. I, 1900), M. Sós rend compte de deux Ouvrages sur ce sujet, publiés en 1844 en langue hongroise par K. Taubner et V. Fest.

**Eneström* (*G.*). — Sur la découverte de la relation entre les racines et le terme connu d'une équation. (409-410).

On a attribué à J. Peletier (1560) la connaissance de cette relation, mais M. Eneström fait voir que cette attribution dépend d'un malentendu, et il demande si quelque mathématicien avant Viète a signalé la relation dont il s'agit.

**Eneström* (*G.*). — Sur l'origine de l'expression *ratio subduplicata*. (410).

Par cette expression, aujourd'hui presque incompréhensible, les mathématiciens des XVIIe et XVIIIe siècles désignaient que le rapport de deux quantités est égal à la racine carrée du rapport de deux autres quantités. M. Eneström est de l'avis que l'expression est due à Wallis, qui s'en est servi dans son Ouvrage *Mathesis universalis sive arithmeticum opus integrum* (1657).

G. E.

JOURNAL DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES.

5e série, Tome VII; 1901 (1).

Appell (*Paul*). — Remarques d'ordre analytique sur une nouvelle forme des équations de la Dynamique. (5-12).

L'auteur a montré (même Recueil, année 1900) qu'un système matériel est

(1) Voir *Bulletin*, t. XXIX$_2$, p. 204.

caractérisé par la fonction

$$S = \frac{1}{2} \sum m J^2,$$

où J est l'accélération du point de masse m. Si $q_1, q_2, \ldots, q_n$ désignent les paramètres dont les variations virtuelles sont arbitraires, S est une fonction quadratique de $q''_1, q''_2, \ldots, q''_n$. Pour un déplacement virtuel arbitraire du système, la somme des travaux des forces est

$$Q_1 \delta q_1 + Q_2 \delta q_2 + \ldots + Q_n \delta q_n;$$

dès lors les équations du mouvement s'écrivent

$$\frac{\partial S}{\partial q''_\alpha} = Q_\alpha \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, n).$$

M. Appell suppose ici que les liaisons ne dépendent pas du temps et que les coefficients de S ne contiennent que $q_1, q_2, \ldots, q_n$. Il établit les conditions auxquelles doit satisfaire la fonction S. Si l'on pose

$$S = \varphi_2 + \psi_1 q''_1 + \psi_2 q''_2 + \ldots + \psi_n q''_n,$$

φ_2 est une forme quadratique des q''_α; ses coefficients dépendent uniquemen des q_α; les ψ_α sont des formes quadratiques des q'_α et leurs coefficients dépendent aussi des q_α.

La force vive T du système est une forme quadratique des q'_α

$$T = \varphi_1(q'_1, q'_2, \ldots, q'_n),$$

qui a mêmes coefficients que φ_2,

$$\varphi_2 = \Sigma a_{ij} q''_i q''_j, \qquad \varphi_1 = \Sigma a_{ij} q'_i q'_j.$$

Cela posé, on doit avoir

$$\psi_1 q'_1 + \psi_2 q'_2 + \ldots + \psi_n q'_n = \frac{\partial \varphi_1}{\partial q_1} q'_1 + \frac{\partial \varphi_1}{\partial q_2} q'_2 + \ldots + \frac{\partial \varphi_1}{\partial q_n} q'_n,$$

quelles que soient les valeurs des q_α et des q'_α. L'expression commune des deux membres est une fonction E, homogène et du troisième degré par rapport aux q'_α.

A l'aide de cette forme, M. Appell calcule les termes correctifs des équations de Lagrange et trouve

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q'_\alpha}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_\alpha} = Q_\alpha + \Delta_\alpha,$$

en posant

$$\Delta_\alpha = \frac{\partial E}{\partial q'_\alpha} - 2\frac{\partial \varphi_1}{\partial q_\alpha} - \psi_\alpha.$$

On voit que les équations de Lagrange pourront s'appliquer au système, si les Δ_α sont tous identiquement nuls : c'est ce qui arrive quand le système considéré est assujetti à des liaisons qui peuvent toutes s'exprimer sous forme

finie et quand les paramètres q_α sont de véritables coordonnées (système *holonome*, d'après Hertz).

Maillet (*Edm.*). — Sur de nouvelles analogies entre la théorie des groupes de substitutions et celles des groupes finis, continus, de transformations de Lie. (13-82).

Extrait de l'Introduction. — De nombreuses analogies ont déjà été constatées entre la théorie des groupes de substitutions et celle des groupes finis, continus, de transformations de Lie, soit au point de vue de la théorie pure, soit au point de vue des applications....

De pareilles analogies sont évidemment très importantes : ... comme elles se présentent parfois également avec la théorie des groupes discontinus, elles font espérer (qu'on excuse cette hypothèse peut-être un peu prématurée et bien hardie) qu'on pourra établir un jour, à la base de ces diverses parties des Mathématiques, assez d'idées communes pour qu'un exposé général commun en soit possible.

C'est à ce point de vue que nous nous sommes placé dans la rédaction du Mémoire qui suit, composé de trois Notes....

Dans une première Note, *Sur des suites remarquables de sous-groupes d'un groupe de substitutions,* nous établissons... des propriétés de suites de groupes qui sont une extension des suites de composition de Galois et de M. Jordan.... Ces propriétés s'étendent aux groupes de transformations de Lie.

Dans une deuxième Note, *Sur la décomposition des groupes finis continus de transformations de Lie,* nous étudions les groupes de transformations échangeables. Nous montrons, ce que nous n'avons pu établir pour les groupes de substitutions, et ce qui ne serait peut-être pas vrai pour tous ces groupes, que les groupes de Lie à plus d'un paramètre sont toujours décomposables en un produit de deux sous-groupes.... Enfin, nous nous occupons des sous-groupes échangeables d'un groupe transitif en montrant le lien de ces recherches avec la Géométrie et la théorie des équations aux dérivées partielles.

Dans une troisième Note, nous revenons sur des définitions de Lie relatives à la transitivité des groupes en les précisant ou les complétant, de façon à pouvoir introduire de nouveaux énoncés semblables à ceux des substitutions pour les groupes plusieurs fois transitifs, et nous nous occupons de la classe des groupes transitifs. Nous montrons, par exemple, que le groupe dérivé d'un groupe régulier (*einfach transitiv*) simple et de son conjoint (*reciproke*) est primitif et de classe 1, et nous sommes conduit à des règles semblables à celles de la théorie des substitutions pour la détermination de ce que nous appelons provisoirement sa *classe géométrique* c, qui correspond à la classe des groupes de substitutions et peut remplacer la notion de classe C de Lie, car $c = \varphi(C)$, tout en correspondant à une idée plus précise.... Nous montrons, enfin, que la notion de classe (ou ordre) d'une transformation a une interprétation dans la théorie du contact des courbes.

Saurel (*Paul*). — Sur un théorème de M. Duhem. (83-90).

Un théorème bien connu, dû à Clebsch, a été généralisé par M. Duhem (même Recueil, année 1900) de la façon suivante :

On considère les trois équations simultanées aux dérivées partielles

$$(1)\qquad \begin{cases} f(u) + g(\Delta u) + \dfrac{\partial}{\partial x} h(\sigma) = 0, \\ f(v) + g(\Delta v) + \dfrac{\partial}{\partial y} h(\sigma) = 0, \\ f(w) + g(\Delta w) + \dfrac{\partial}{\partial z} h(\sigma) = 0, \end{cases}$$

où u, v, w sont des fonctions de x, y, z, t; on a posé

$$f = A_0 + A_1 \frac{\partial}{\partial t} + A_2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \ldots + A_n \frac{\partial^n}{\partial t^n},$$

A_0, A_1, ..., A_n étant des constantes,

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \qquad \sigma = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z};$$

enfin g et h sont deux opérateurs linéaires quelconques à coefficients constants.

Des équations (1) résulte l'*équation aux dilatations*

$$f(\sigma) + g(\Delta\sigma) + h(\Delta\sigma) = 0,$$

et aussi l'*équation aux rotations*

$$f(\omega) + g(\Delta\omega) = 0,$$

où ω désigne l'une quelconque des expressions

$$\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}, \qquad \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}, \qquad \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}.$$

Toute solution u, v, w des équations (1) peut être mise sous la forme

$$u = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z},$$
$$v = \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x},$$
$$w = \frac{\partial F}{\partial z} + \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y},$$

F étant une intégrale de l'équation aux dilatations, et P, Q, R trois intégrales de l'équation aux rotations, liées par la relation

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 0.$$

Tel est le résultat de M. Duhem, dont l'auteur expose une démonstration simple.

Jordan (*C.*). — Notice sur M. Ch. Hermite. (91-95).

Humbert (*G.*). — Sur les fonctions abéliennes singulières. (Troisième Mémoire). (97-123).

Ce travail fait suite aux deux Mémoires récemment publiés par l'auteur sous le même titre (même Recueil, 1899 et 1900).

Il a son point de départ dans la remarque suivante : les couples de périodes normales des fonctions abéliennes auxquelles conduit le problème de l'inversion relatif aux courbes de genre deux, sont du type

$$(1, 0); \quad (0, 1); \quad (g, h); \quad (h, g')$$

et, si g_1, h_1, g'_1 désignent les parties imaginaires de g, h, g', la quantité

$$h_1^2 - g_1 g'_1$$

est *essentiellement négative*. Dès lors, en effet, cette question se pose :

Existe-t-il des fonctions uniformes de deux variables, admettant quatre couples de périodes du type précédent *dans le cas où* $h_1^2 - g_1 g'_1$ *serait positif?*

Ces fonctions n'existent que si g, h, g' vérifient une de ces relations à coefficients entiers

$$Ag + Bh + Cg' + D(h^2 - gg') + E = 0$$

qui caractérisent les *fonctions abéliennes singulières* étudiées par M. Humbert dans ses deux Mémoires précédents.

L'auteur commence par rechercher les conditions d'existence de ces fonctions, qu'il appelle *fonctions quadruplement périodiques singulières*, réservant le nom de *fonctions* abéliennes singulières à celles pour lesquelles

$$h_1^2 - g_1 g'_1$$

est négatif, et il obtient leur expression par des quotients de fonctions intermédiaires d'une espèce nouvelle.

Il constitue ensuite la théorie de la transformation pour ces fonctions et des transformations *de degré négatif* pour les fonctions abéliennes singulières, ce qui lui permet d'établir un lien étroit entre ces deux classes de fonctions : les transformations de degré négatif font passer d'un système de périodes pour lequel $h_1^2 - g_1 g'_1$ est négatif à un système analogue pour lequel $h_1^2 - g_1 g'_1$ est positif, et réciproquement, de sorte que les fonctions quadruplement périodiques singulières et les fonctions abéliennes singulières se changent les unes dans les autres par ces transformations.

Ensuite vient l'examen des principales propriétés dont jouissent les nouvelles fonctions intermédiaires qui servent à exprimer les fonctions quadruplement périodiques singulières.

Enfin, M. Humbert étudie le cas où $h_1^2 - g_1 g'_1$ est nul ; il montre qu'il y a alors dégénérescence ou réduction du nombre des périodes.

Sautreaux (*C.*). — Mouvement d'un liquide parfait soumis à la pesanteur. Détermination des lignes de courant. (125-159).

Dans un travail précédent (*Annales de l'enseignement supérieur de Grenoble*, t. VII), l'auteur a établi qu'un point de la surface libre d'un liquide soumis à l'action de la pesanteur a des coordonnées (x, y) exprimées par les formules suivantes

$$2x = S(w),$$
$$2y = \int \sqrt{\frac{16}{gS(w)+2K} - S'^2(w)}\, dw,$$

où S désigne une fonction arbitraire de la quantité complexe $w = \varphi + i\psi$, et K la constante

$$g x_0 + \frac{1}{2} V_0^2,$$

x_0 étant l'abscisse du point où la paroi cesse et où commence la surface libre, V_0 la vitesse en ce point. Il s'est attaché spécialement à la détermination de la surface libre.

Dans le présent Mémoire, il se propose l'étude des trajectoires que parcourent les molécules fluides. Il fait cette étude, en assignant à la fonction $S(w)$ la forme particulière

$$S(w) = e^{-w} + \alpha \qquad (\alpha = \text{const.}).$$

Il suppose, en outre, que la force constante qui agit parallèlement à Ox, au lieu d'être la pesanteur même, soit une force constante d'accélération $g = 16$ (au lieu de 9,8); enfin que la somme $8\alpha + K$ soit égale à zéro.

Poincaré (H.). — Sur les propriétés arithmétiques des courbes algébriques. (161-233).

Les propriétés arithmétiques de certaines expressions et, en particulier, celles des formes quadratiques binaires, se rattachent aux substitutions linéaires à coefficients entiers et l'on sait quel parti a été tiré de l'étude de ces substitutions.

« On peut, dit M. Poincaré, supposer que l'étude des groupes de transformations analogues est appelée à rendre de grands services à l'Arithmétique. C'est ce qui m'engage à publier les considérations suivantes, bien qu'elles constituent plutôt un programme d'étude qu'une véritable théorie. »

En vue de rattacher éventuellement les uns aux autres plusieurs problèmes d'Analyse indéterminée, l'auteur établit une classification des formes ternaires d'ordre supérieur *à coefficients entiers* fondée sur le groupe des transformations birationnelles *à coefficients rationnels* que peut subir une courbe algébrique.

Deux formes ternaires à coefficients entiers (formes *rationnelles*)

$$f(x, y, z), \quad f_1(x, y, z)$$

sont regardées comme *équivalentes* ou appartenant à la même *classe*, si l'on peut passer de l'une à l'autre par une transformation birationnelle à coeffi-

cients rationnels ou, pour abréger, par une *transformation purement rationnelle*.

Toutes les droites *rationnelles* appartiennent à une même classe, qui comprend aussi toutes les coniques admettant un *point rationnel* (point à coordonnées homogènes entières) et toutes les cubiques rationnelles de genre zéro. M. Poincaré montre, de plus, que *toute courbe unicursale rationnelle est équivalente à une droite ou à une conique*.

Il retrouve ce résultat par la considération des *groupes rationnels*, ou groupes de points tels que toute fonction symétrique de leurs coordonnées soit rationnelle.

Puis il étudie la distribution des points rationnels sur les cubiques de genre 1. Si les points d'arguments elliptiques

$$\alpha, \quad \alpha_1, \quad \alpha_2, \quad \ldots, \quad \alpha_q$$

sont rationnels, il en sera de même de tous les points dont les arguments elliptiques sont compris dans la formule

$$\alpha + 3n\alpha + p_1(\alpha_1 - \alpha) + p_2(\alpha_2 - \alpha) + \ldots + p_q(\alpha_q - \alpha),$$

où n et les p sont entiers. Si cette formule donne tous les points rationnels de la cubique, les $q+1$ points d'arguments α, α_1, ..., α_q formeront un *système de points rationnels fondamentaux*. La valeur minima du membre $q+1$ sera le *rang* de la cubique, élément important pour la classification.

Les raisonnements faits sur les cubiques s'étendent à des courbes quelconques, de genre 1. Soit $f = 0$ une pareille courbe, de degré m, et soit δ le plus petit membre tel qu'il existe sur $f = 0$ un groupe rationnel de δ points : ce nombre divise m; il divise aussi le degré de toutes les courbes équivalentes à $f = 0$; il divise également le nombre des points d'un groupe rationnel quelconque de $f = 0$. Ce nombre caractéristique δ est un des éléments les plus importants de la classification des courbes rationnelles de genre 1.

M. Poincaré fait une étude approfondie de certaines transformations propres aux cubiques de genre 1 et introduit la notion de *sous-classe* : deux cubiques équivalentes sont rangées dans la même sous-classe si l'on peut les déduire l'une de l'autre par une transformation linéaire à coefficients rationnels (pas entiers).

Si l'on étend le domaine de rationalité en lui *adjoignant* les nombres qui forment la base d'un certain corps algébriques deux cubiques qui n'étaient pas équivalentes pourront le devenir; deux cubiques équivalentes qui étaient de sous-classes différentes pourront devenir de même sous-classe. D'où de nouveaux critères pour la classification des cubiques.

Après avoir étudié des cubiques dérivées de celles qui possèdent trois points d'inflexion rationnels en ligne droite, ainsi qu'un quatrième point rationnel, M. Poincaré termine par quelques indications d'où résulte la possibilité de construire, pour les courbes de genre supérieur, une théorie analogue à celle qu'il a développée pour les cubiques.

Jouguet. — Le théorème des tourbillons en Thermodynamique. (235-257).

On considère une masse fluide continue, animée d'un mouvement qui n'altère

pas sa continuité. Les composantes (u, v, w) de la vitesse d'une molécule sont des fonctions continues du temps t et des coordonnées (x, y, z) d'un point géométrique. Les molécules qui, au temps t_0, sont situées sur une courbe fermée C_0 forment constamment une courbe fermée C. On peut énoncer le théorème de Helmholtz en disant que l'intégrale curviligne

$$\int_C u\,dx + v\,dy + w\,dz$$

conserve à tout instant la même valeur.

La démonstration de ce théorème, applicable aux fluides dénués de viscosité, est soumise aux restrictions suivantes :

1° Les forces, tant intérieures qu'extérieures, qui existent sur chaque élément du fluide admettent un potentiel;

2° La pression est fonction de la densité seule.

« M. Duhem a montré, dit l'auteur, comment la Thermodynamique permet d'étudier le mouvement des fluides pour lesquels ces restrictions n'ont aucun sens. Nous nous proposons de rechercher ce que devient, dans sa théorie, le théorème de Helmholtz; nous continuerons à supposer nulle la viscosité. »

Lovett. — Sur la Géométrie à n dimensions. (259-303).

Ce Mémoire contient diverses applications de la théorie des groupes continus, finis et infinis, à la géométrie de l'espace à n dimensions.

I. L'auteur commence par construire la géométrie euclidienne de cet espace sur deux hypothèses qu'il énonce comme suit :

1° Soit l'espace une multiplicité de n dimensions: c'est-à-dire, soient n choses indépendantes nécessaires et suffisantes pour déterminer la position d'un élément de la multiplicité; ces n choses indépendantes sont nommées *les coordonnées de l'élément;*

2° Soit $\frac{n(n+1)}{2}$ le nombre de degrés de liberté d'une figure de la multiplicité dans la multiplicité; c'est-à-dire, soient $\frac{n(n+1)}{2}$ choses indépendantes nécessaires et suffisantes pour fixer la position d'un corps rigide; ces $\frac{n(n+1)}{2}$ choses indépendantes sont nommées *les paramètres de la figure.*

Les notions fondamentales de distance et de direction sont introduites au moyen de deux invariants : la notion de distance par rapport à deux éléments de l'espace, et la notion de direction par rapport à deux multiplicités les plus simples composées d'un nombre simplement infini de ces éléments. On peut alors dériver toutes les notions secondaires de la géométrie de l'espace à n dimensions par des extensions successives des notions primaires de l'espace ordinaire, aussi simples que sont les extensions du plan à l'espace ordinaire.

II. M. Lovett expose ensuite la géométrie des quadriques de l'espace à

n dimensions et définit les transformations de contact les plus générales qui transforment les plans en plans dans l'espace à plusieurs dimensions.

III. M. Zorawski a considéré (*Académie de Cracovie*, 1895) le groupe des mouvements euclidiens de l'espace (x, y, z); il a construit les extensions de ces transformations par rapport à toutes les dérivées de x, y, z considérées comme fonctions de deux variables indépendantes et déterminé les invariants du groupe prolongé. M. Lovett prolonge le groupe des mouvements de l'espace à $n+1$ dimensions par rapport aux dérivées partielles de ses coordonnées ponctuelles, considérées comme fonctions de n paramètres indépendants, sous l'hypothèse que les transformations laissent ces paramètres absolument invariants.

IV. Dans un Mémoire sur les invariants de déformation (*Acta mathematica*, t. XVI), M. Zorawski a appliqué la méthode de Lie à la détermination des invariants de déformation des surfaces dans l'espace euclidien ordinaire. Ces invariants ne doivent dépendre que des coefficients E, F, G de l'élément linéaire et n'être altérés par aucun changement de coordonnées curvilignes. On effectue un changement quelconque de coordonnées curvilignes. Si l'on calcule les nouvelles valeurs de E, F, G, les transformations ainsi définies constituent un groupe infini (*groupe de Gauss*). Si, de plus, on exprime, à l'aide de nouvelles variables, une ou plusieurs fonctions de point, on obtient des transformations dont l'ensemble forme un groupe (*groupe de Beltrami*) Les transformations qui s'appliquent aux quantités E, F, G et à l'équation d'une courbe tracée sur la surface constituent un troisième groupe (*groupe de Minding*). Enfin, en considérant à la fois les coefficients de l'élément linéaire, des fonctions de point et des équations de courbes, on a le groupe général. M. Zorawski, en appliquant la méthode de Lie, a retrouvé comme invariant de Gauss la courbure totale, comme invariants de Beltrami les paramètres différentiels connus, comme invariant de Minding la courbure géodésique.

M. Lovett s'est proposé de donner les règles pour déterminer les invariants de déformation de variétés dans un espace ponctuel à un nombre quelconque de dimensions (dans le cas où une déformation est possible). Le problème qui consiste à faire la $m^{\text{ième}}$ prolongation d'une transformation infinitésimale comporte une infinité de solutions. M. Lovett fait connaître trois groupes infinis qui généralisent, pour un espace quadratique à $n+1$ dimensions, les groupes de l'espace ordinaire que M. Zorawski a étudiés sous les noms *de Gauss, de Beltrami* et *de Minding*. Si l'on particularise ces nouveaux groupes pour un espace quadratique quelconque à trois dimensions, les groupes particuliers que l'on obtient sont de la même forme que les groupes de Gauss, de Beltrami et de Minding pour l'espace ordinaire. Il suit de là que la théorie de la déformation des surfaces de l'espace ordinaire, tous ses invariants et tous ses théorèmes s'appliquent immédiatement aux surfaces d'un espace quadratique quelconque, euclidien ou non euclidien, à trois dimensions, c'est-à-dire qu'on retrouve la théorie des formes quadratiques de différentielles; mais, en raison du théorème de Beez, il n'est pas toujours permis de parler de déformation.

Brunel (*G.*). — Sur les deux systèmes de triades de treize éléments. (305-330).

Introduction. — On appelle *système de triades* de $6n+1$ ou de $6n+3$ élé-

ments un ensemble de triades tel que chacune des duades que l'on peut former avec les éléments considérés apparaisse dans l'ensemble une fois et une fois seulement.

De tels systèmes existent pour toute valeur de n. Cette proposition a été établie par Kirkmann, puis sous une forme identique au fond, mais plus explicite, par Reiss.

Les résultats obtenus par M. Netto dans les *Mathematische Annalen* ne sont pas d'un caractère aussi général, mais fournissent dans certains cas des systèmes distincts de ceux que l'on obtient par l'emploi du procédé de Kirkmann-Reiss. M. H. Moore a établi ensuite l'existence des systèmes de triades pour toute valeur de n et a montré en particulier que, lorsque le nombre des éléments est supérieur à 13, il y a au moins deux systèmes de triades essentiellement distincts.

Dans le cas de 13 éléments, MM. Netto et H. Moore étaient portés à croire qu'il n'existait effectivement qu'un seul système de triades.

M. Jan de Vries a signalé l'existence d'un système de triades de 13 éléments, distinct de celui que M. Netto avait construit. Il ajoute qu'il n'est pas en état de prouver que les deux systèmes ainsi obtenus sont les seuls possibles.

Nous nous proposons d'établir ici que le système donné par M. Jan de Vries est identique au fond au système fourni par la construction de Kirkmann-Reiss.

Nous montrerons aussi qu'il n'y a en réalité, pour 13 éléments, que deux systèmes distincts.

Duhem (*P.*). — Sur la stabilité de l'équibre relatif d'une masse fluide animée d'un mouvement de rotation. (331-350).

« Lagrange a montré, dit l'auteur, qu'un système soumis à des forces qui dérivent d'un potentiel, et qui se trouve en équilibre absolu, est en équilibre stable lorsque le potentiel est minimum. Sa démonstration, fondée sur la considération des petits mouvements, ne prouve, en réalité, ni que cette condition soit nécessaire pour la stabilité de l'équilibre, ni qu'elle soit suffisante. Le caractère suffisant de cette condition a été établi d'une manière entièrement rigoureuse et très simple par Lejeune-Dirichlet; la démonstration est aujourd'hui classique.

» Les conditions de stabilité de l'équilibre relatif à une masse qui tourne d'un mouvement uniforme autour d'un axe ont été établies jusqu'ici par la seule considération des petits mouvements; cette méthode prête aux mêmes objections que la méthode suivie par Lagrange dans le cas de l'équilibre absolu.

» Nous nous proposons de trouver ici, par un artifice semblable à celui de Lejeune-Dirichlet, un caractère qui suffit, au moins sous certaines conditions, à assurer cette stabilité. »

Autonne (*Léon*). — Sur les groupes quaternaires réguliers d'ordre fini. Premier Mémoire : généralités et groupes décomposables. (351-394).

L'auteur appelle *substitution* n-aire (binaire, ternaire, quaternaire, etc.) la

substitution linéaire, homogène, entre les n variables z_j,

$$s_n = | z_j \quad \Sigma a_{jk} z_k | \qquad (j, k = 1, 2, \ldots, n),$$

et Π_n le problème qui consiste à construire les différents groupes d'ordre fini G_n contenus dans le groupe des s_n.

Il rappelle que le problème Π_2 a été résolu par MM. Klein, Gordan et Jordan, le problème Π_3 par M. Jordan.

M. Jordan a montré aussi que tous les G_n appartiennent à un nombre de types limité, pour n donné, et abordé la solution du problème Π_4.

M. Autonne estime que ce problème défiera encore longtemps les efforts des géomètres. Il apporte, par le présent travail, une contribution à l'étude de certains G_4 qu'il a nommés *réguliers* et qui ont la propriété caractéristique de posséder un *invariant absolu* commun : si l'on considère les z_j comme les coordonnées homogènes d'un point de l'espace, les quaternaires régulières ont pour invariant commun un certain complexe linéaire de droites (complexe *capital*).

M. Autonne donne d'abord quelques explications sur les groupes quaternaires G_n réguliers et d'ordre fini, puis il construit *tous les* G_4 *décomposables*, au sens de M. Jordan.

Humbert (*Georges*). — Sur la transformation ordinaire des fonctions abéliennes. (395-417).

La théorie de la transformation des fonctions abéliennes ordinaires comporte une interprétation géométrique simple qui conduit à d'intéressantes propriétés de la surface de Kummer. Dans le présent Mémoire, M. Humbert montre, inversement, que l'interprétation géométrique peut venir en aide à l'Analyse pour la recherche des trois équations, dites *modulaires*, qui lient les modules des fonctions abéliennes primitives et transformées.

Il commence par établir le théorème suivant :

Soit, sur la surface de Kummer, une courbe C *ne passant par aucun des seize points doubles; les coordonnées des points de* C *étant exprimées en fonction fuchsienne d'un paramètre* ξ, *si l'on désigne par* du *et* dv *les différentielles abéliennes qui répondent à la surface (dans le mode de représentation de M. Weber), par* ρ *une constante quelconque, on a, en tout point de la courbe* C,

$$du + \rho\, dv = \sqrt{\Theta(\xi)}\, d\xi,$$

$\Theta(\xi)$ *étant une fonction thêta fuchsienne holomorphe d'ordre deux, dont tous les zéros sont d'ordre pair de multiplicité.*

Appliqué aux courbes unicursales ce théorème prouve que :

Sur aucune surface de Kummer, il n'existe de courbe unicursale ayant au total moins de quatre branches simples en des points doubles de la surface.

L'auteur montre ensuite que :

Dans le cas elliptique, et dans ce cas seulement, on peut tracer sur la

surface de Kummer des courbes unicursales présentant, au total, quatre branches simples en des points doubles de la surface; ces courbes, au nombre de huit, passent chacune simplement par quatre points doubles.

Une unicursale, tracée sur une surface de Kummer non elliptique, doit présenter en tout, aux points doubles de la surface, six branches simples au moins.

Pour les courbes de genre *un* on peut établir qu'une telle courbe, en dehors du cas elliptique, présente en tout quatre branches au moins en des points singuliers de la surface.

Parmi les courbes de genre *deux* tracées sur la surface, M. Humbert ne considère que celles qui ne passent par aucun des seize points doubles. Il parvient à une représentation géométrique simple des transformations d'un ordre donné et des équations modulaires correspondantes, fournie par le théorème que voici :

Les surfaces d'ordre p, qui touchent une surface de Kummer en $2p^2-1$ points, c'est-à-dire la coupent suivant des courbes de genre deux et qui ne passent par aucun des points singuliers, se répartissent en autant de groupes qu'il y a de transformations ordinaires, non équivalentes, d'ordre p; chaque groupe est lié à une de ces transformations.

Les surfaces d'un groupe sont en nombre doublement infini et coupent la surface de Kummer proposée suivant des courbes de degré $4p$ et de genre deux qui ont les mêmes modules : ces modules sont ceux des fonctions abéliennes transformées, par la transformation qui correspond au groupe, des fonctions abéliennes liées à la surface de Kummer initiale.

Voici maintenant comment M. Humbert définit les transformations d'ordre trois et d'ordre deux :

I. *On considère deux triangles circonscrits à une même conique et l'on désigne par $a_1, a_2, \ldots, a_6$ les arguments des six côtés considérés comme tangents à la conique. Il y a quarante courbes unicursales du sixième ordre passant par les sommets des deux triangles et, en outre, bitangentes aux six côtés; $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_6$ étant les arguments unicursaux qui répondent aux six sommets sur une de ces courbes, les fonctions abéliennes des deux radicaux*

$$\sqrt{(x-a_1)\ldots(x-a_6)}, \quad \sqrt{(x-\xi_1)\ldots(x-\xi_6)}$$

sont liées par une transformation du troisième ordre. On obtient ainsi les quarante transformations non équivalentes de cet ordre.

II. *Soit donné un radical*

$$\sqrt{(x-a_1)\ldots(x-a_6)};$$

marquons sur une conique quelconque les six points qui ont pour arguments unicursaux les quantités $a_1, a_2, \ldots, a_6$ et joignons-les deux à deux par trois droites, de manière à former un triangle T *dont chaque côté contienne deux des six points et dont aucun sommet ne soit sur la conique. Il y a quinze pareils triangles.*

Prenons maintenant le triangle polaire de T *par rapport à la conique, soient* $b_1, b_2, \ldots, b_6$ *les arguments des six points où ses côtés coupent la courbe; les deux radicaux*

$$\sqrt{(x-a_1)\ldots(x-a_6)}, \quad \sqrt{(x-b_1)\ldots(x-b_6)}$$

donnent naissance à deux systèmes de fonctions abéliennes liées l'une à l'autre par une transformation du second ordre.

Aux quinze triangles T *correspondent ainsi les quinze systèmes qui dérivent du système primitif par une transformation quadratique.*

Maillet (*Edm.*). — Sur les racines des équations transcendantes à coefficients rationnels. (419-440).

L'auteur considère les équations algébriques ou transcendantes dont le premier membre est ce qu'il appelle une *série rationnelle,* c'est-à-dire une série convergente ordonnée suivant les puissances croissantes ou décroissantes de x, qui peut être une fonction entière, admettre des pôles ou même un point singulier essentiel, et dont les coefficients sont rationnels. Il établit que les solutions réelles de ces équations, exprimées dans un système de numération à base quelconque, ne peuvent présenter, dans la partie fractionnaire, des suites de zéros dont l'étendue croît trop vite.

Une propriété semblable a lieu pour les solutions imaginaires.

En terminant, M. Maillet prouve l'existence (non évidente *a priori*) d'une infinité de nombres réels ou imaginaires qui, quel que soit le système de numération dans lequel on les écrit, n'ont, après le $n^{\text{ième}}$ significatif différent de zéro, qu'un nombre de zéros limité en fonction de n, quel que soit n.

Tome VIII; année 1902.

Duhem (*P.*). — Sur la stabilité, pour des perturbations quelconques, d'un système animé d'un mouvement de rotation uniforme. (5-18).

« Dans un précédent travail, dit l'auteur, nous avons établi (même Recueil, année 1901), par une méthode imitée de Lejeune-Dirichlet, un criterium qui assure la stabilité de l'équilibre relatif d'un système animé d'un mouvement de rotation uniforme. Toutefois, le criterium que nous avons donné est soumis à une restriction : il suppose que la perturbation apportée au système ne modifie pas le moment par rapport à l'axe de rotation de la quantité de mouvement du système. Cette restriction est évidemment regrettable, car, les actions perturbatrices étant, en général, inconnues, il est difficile de savoir si la condition précédente est ou n'est pas vérifiée. Il est donc désirable d'affranchir le criterium précédemment trouvé de cette restriction embarrassante. C'est ce que nous nous proposons de faire dans le présent écrit. »

Voici le nouvel énoncé de M. Duhem :

Soit M_0 *une valeur du moment de la quantité de mouvement. Supposons*

que, pour toute valeur M, *suffisamment voisine de* M_0, *de la même quantité, on puisse énoncer les propositions suivantes :*

1° *A chaque valeur de* M *correspond un état d'équilibre* ε *dans lequel la somme*

$$\Phi = \mathcal{F} + \Omega + W$$

prend une valeur minimum parmi celles qu'elle peut prendre sans changement dans la valeur de M ;

2° *L'état* ε *varie d'une manière continue lorsque la valeur de* M *varie d'une manière continue.*

Dans ces conditions, l'état ε_0 *qui correspond à la valeur* M_0 *de* M *est stable même pour les perturbations qui altèrent le moment de la quantité de mouvement du système.*

Maillet (*Edm.*). — Sur une catégorie de fonctions transcendantes et les équations différentielles rationnelles. (19-57).

L'auteur s'est proposé de rechercher si les séries ordonnées suivant les puissances croissantes ou décroissantes de la variable x, et dont les exposants ou les coefficients satisfont à certaines conditions de croissance ou de décroissance, peuvent vérifier des équations différentielles rationnelles par rapport à la fonction inconnue et à ses dérivées, les coefficients de ces équations étant soit des polynomes entiers en x, soit des séries en $\frac{1}{x}$ ou x dont les coefficients satisfont à certaines conditions de croissance ou de décroissance.

Il obtient, entre autres, le théorème général que voici :

La fonction

$$\varphi = \frac{\theta_1}{x^{\psi_1}} + \ldots + \frac{\theta_n}{x^{\psi_n}} + \ldots,$$

où θ_n *est quelconque et* ψ_n *une fonction croissante de* n, *telle que*

$$\psi_{n+1} = \lambda \psi_n^{\mu_n}$$

(λ *fini et différent de zéro,* μ_n *croissant indéfiniment avec* n) *ne peut satisfaire à une équation différentielle rationnelle par rapport à* x, *à* y *et aux dérivées d'ordre quelconque de* y.

Les résultats de M. Maillet sont susceptibles d'extension aux séries de fractions rationnelles et aux fractions continues. Ils conduisent, en particulier, à cette propriété remarquable :

Il existe une infinité de fonctions (*parmi lesquelles sont les fonctions algébriques et les fonctions définies par les équations différentielles rationnelles*), *qui, développées aux environs d'un point ordinaire* x_0 *en séries de fractions rationnelles de la forme*

$$\varphi = P_0 + \frac{R_1}{Q_1} + \frac{R_2}{Q_1 Q_2} + \ldots + \frac{R_n}{Q_1 Q_2 \ldots Q_n} + \ldots,$$

(*la base* $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n, \ldots$ *étant formée de polynomes entiers en* x *arbitrairement choisis dont les racines ont leurs modules limités,* R_n *étant de degré supérieur à zéro et inférieur à celui de* Q_n *et* P_0 *un polynome*) *ne peuvent être telles que le terme de rang* $n+1$ *soit, par rapport au terme précédent, d'un ordre de petitesse supérieur à une certaine limite fonction des degrés des polynomes de base, quelle que soit la base choisie.*

Ces résultats doivent être rapprochés de ceux obtenus par Liouville et par M. Maillet (même Recueil, année 1901) concernant les nombres algébriques et les racines des équations transcendantes.

Zaremba (*S.*). — Sur l'intégration de l'équation $\Delta u + \xi u = 0$. (59-117).

On sait l'importance des problèmes qui consistent à déterminer, pour un domaine donné, l'intégrale de l'équation

$$(1) \qquad \Delta u + \xi u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \xi u = 0 \qquad (\xi = \text{const.}),$$

définie par les valeurs périphériques de l'intégrale elle-même ou par celles de la dérivée suivant la normale à la surface limitant le domaine considéré.

Ces problèmes sont des cas particuliers de ceux que traite ici M. Zaremba et que nous allons formuler d'après lui.

Soit μ celle des déterminations de $\sqrt{-\xi}$ dont la partie réelle est positive, et soit r la distance de deux points quelconques (x, y, z) et (x', y', z'). On sait que l'expression

$$\frac{e^{-\mu r}}{r}$$

est une intégrale particulière de l'équation (1). On désigne par σ et ϖ deux fonctions continues, définies sur une surface fermée (S) assujettie à certaines conditions très peu restrictives; on regarde x', y', z' comme les coordonnées d'un élément ds de la surface (S) et l'on considère les fonctions

$$(2) \qquad u = \int_S \sigma \frac{e^{-\mu r}}{r}\, dr,$$

$$(3) \qquad v = \int_S \varpi \frac{d}{dr} \frac{e^{-\mu r}}{r} \cos\psi\, ds,$$

où ψ représente l'angle formé par la normale intérieure à l'élément ds avec le rayon allant du point (x, y, z) à cet élément ds. En raison d'une analogie évidente avec les potentiels newtoniens, M. Zaremba les appelle *potentiel généralisé d'une simple couche de densité* σ et *potentiel généralisé d'une double couche de densité* ϖ, ayant pour nombre caractéristique le nombre μ. Il se donne une fonction continue φ, connue sur la surface (S) et désigne par λ un paramètre constant, mais susceptible de diverses valeurs.

Cela étant, il se propose de *déterminer un potentiel généralisé de simple*

couche u et un potentiel généralisé de double couche v vérifiant les équations

$$(4)\qquad \left(\frac{du}{dN}\right)_e - \left(\frac{du}{dN}\right)_i = \lambda\left[\left(\frac{du}{dN}\right)_e + \left(\frac{du}{dN}\right)_i\right] + 2\varphi,$$

$$(5)\qquad (v)_i - (v)_e = \lambda[(v)_i + (v)_e] + 2\varphi.$$

En attribuant au paramètre λ les valeurs $+1$ et -1, on est ramené aux problèmes classiques rappelés ci-dessus.

M. Zaremba fait une étude approfondie des fonctions u et v considérées comme fonctions du paramètre λ, en supposant ξ réel et non positif. Les résultats importants qu'il obtient étendent ceux qu'il avait antérieurement énoncés (*Acad. de Cracovie,* 4 mars 1901) et conduisent à une démonstration générale de la légitimité des méthodes classiques de Robin et de Neumann.

Suchar (*Paul-J.*). — Sur les équations différentielles linéaires de second ordre à coefficients algébriques. (119-134).

A la fin de son Mémoire *Sur les fonctions à multiplicateurs constants* (*Acta mathematica,* t. XIII) M. Appell a signalé certaines équations différentielles linéaires à coefficients algébriques, dont l'intégrale générale peut cesser d'être uniforme sur la surface de Riemann correspondant à une relation algébrique donnée, en deux sortes de points, savoir les points de ramification de la surface et les points où les coefficients de l'équation deviennent infinis. Il a fait sur ces équations les hypothèses suivantes :

1° L'intégrale générale reste finie dans le domaine de chaque point critique, quand on l'a préalablement multipliée par une puissance convenable de $z-\alpha$, si α est un point critique ordinaire, ou par une puissance convenable de $\zeta-\gamma$, après avoir fait dans l'équation la substitution

$$z-\alpha = (\zeta-\gamma)^m,$$

si α est un point de ramification d'ordre m;

2° L'équation fondamentale déterminante relative à ces points n'a que des racines entières.

Les équations différentielles ainsi définies se répartissent en trois espèces; M. Appell a appelé *équations de première espèce* celles dont l'intégrale générale est partout finie, *de deuxième espèce* celles dont l'intégrale générale n'a que des pôles, *de troisième espèce* celles dont l'intégrale générale a des points critiques logarithmiques.

Dans le présent Mémoire, M. Suchar forme les équations différentielles linéaires du second ordre qui appartiennent à la première espèce, la surface de Riemann étant supposée hyperelliptique.

Zoukis (*Aristide*). — Sur l'hexacoryphe complet. (135-168).

Introduction. — Dans le présent travail, nous nous occupons de l'hexacoryphe complet (ἕξ ≡ six, κορυφή ≡ sommet). En considérant les quinze arêtes de l'hexacoryphe et les quinze surfaces du second degré S^2 ayant pour directrices trois de ces droites, nous démontrons diverses propriétés de ces surfaces, et,

entre autres, cette propriété remarquable que ces surfaces, prises trois à trois de vingt manières différentes, passent par une même biquadratique. Ces vingt biquadratiques se rangent en dix couples et les courbes de chacun de ces couples constituent le lieu géométrique des points dont on peut projeter, sur un plan quelconque, comme trois fois homologues dans l'un ou l'autre de deux manières possibles, les deux triangles d'un des dix couples, qui, ayant pour sommets les six sommets de l'hexacoryphe, se trouvent situés sur deux de ses faces opposées.

En considérant ensuite les quarante-cinq cubiques suivant lesquelles se coupent, deux à deux, les quinze surfaces S^2, quand elles ont une directrice commune, nous sommes amenés à la considération de quarante-cinq nouvelles surfaces Σ^2 du second degré formant entre elles et avec les quinze surfaces S^2 certaines configurations remarquables.

Les équations des quinze surfaces S^2 et des quarante-cinq surfaces Σ^2 sont données au moyen des dix polynomes du second degré qui, égalés à zéro, représentent les divers couples de faces opposées de l'hexacoryphe. Ces dix polynomes sont liés entre eux par certaines identités dont l'étude est capitale pour l'étude que nous faisons.

Enfin, nous considérons quelques surfaces du sixième degré ayant pour points triples les six sommets de l'hexacoryphe et qui font une configuration semblable à celle des couples de faces opposées de l'hexacoryphe, des surfaces S^2 et des surfaces Σ^2.

Quelques-unes de ces surfaces ont, parmi d'autres propriétés, celle d'avoir leurs points associés en couples. Les droites déterminées par ces couples de points rencontrent toutes, suivant deux points, la cubique déterminée par les six sommets de l'hexacoryphe. Cette propriété établie, nous trouvons diverses distributions des droites de cette congruence en génératrices de surfaces du deuxième, du quatrième, jusqu'au dix-huitième degré.

Poincaré (*H.*). — Sur les cycles des surfaces algébriques. (Quatrième complément à l'*Analysis situs*). (169-214).

Les beaux travaux de M. Picard sur les surfaces algébriques ont mis en évidence l'importance de la notion des cycles à une, deux ou trois dimensions. M. Poincaré applique à cette question les principes qu'il a exposés dans son Mémoire sur l'*Analysis situs* et dans les deux premiers compléments de ce Mémoire, et complète sur divers points les résultats de M. Picard, notamment en ce qui concerne les cycles à trois dimensions et les cycles à deux dimensions. Pour les cycles à une dimension, l'auteur retrouve, par sa méthode, la théorie qui en a été faite par M. Picard.

Le contenu du présent Mémoire a été résumé par M. Poincaré dans une Note des *Comptes rendus*.

Duhem (*P.*). — Sur la stabilité de l'équilibre relatif. (215-227).

L'auteur revient sur son précédent Mémoire (même Volume, p. 5) : il a reconnu que le criterium de stabilité qu'il avait formulé pour une masse animée d'un mouvement de rotation uniforme est strictement équivalent à celui que M. Poincaré avait fait connaître antérieurement dans son Mémoire des *Acta mathematica* (t. VII, 1885).

De plus, il prouve par l'exemple d'un solide pesant, suspendu par un point fixe et tournant autour de la verticale, que *ce criterium n'est pas nécessaire* pour la stabilité de l'équilibre relatif.

Pirondini (Gem.). — Symétrie tangentielle par rapport à une surface de révolution. (229-251).

Σ étant une surface de révolution quelconque et A un point de l'espace, on coupe Σ par le plan méridien qui contient A. Du point A, on mène une tangente AA_0 à la section méridienne M ainsi obtenue et l'on prolonge cette tangente, d'une longueur $A_0A_1 = AA_0$, au delà du point de contact A_0; le point A_1 est dit le *correspondant* du point A. Le point A a autant de points correspondants A_1 que la ligne méridienne M admet de tangentes issues de A.

Cette construction, appliquée à chaque point d'une figure quelconque, constitue le transformation géométrique à laquelle l'auteur donne le nom de *symétrie* tangentielle par rapport à la surface de révolution Σ.

Quand la figure primitive est une surface S, la figure symétrique est, en général, une autre surface S_1. Quand la figure primitive est une ligne L_1, la figure symétrique est en général une ligne L_1; dans ce dernier cas, le lieu des points de contact A_0 des tangentes AA_0A_1 et de la surface Σ est une ligne A.

De là six problèmes que M. Pirondini traite, avec des exemples :

(A).	Connaissant	Σ et S,	déterminer	S_1;
(B).	»	S et S_1,	»	Σ;
(C).	»	Σ et L,	»	A et L_1;
(D).	»	Σ et A,	»	L et L_1;
(E).	»	L et A,	»	Σ et L_1;
(F).	»	L et L_1,	»	Σ et A.

De Séguier. — Sur les équations de certains groupes. (253-308).

« L'objet de ce travail, dit l'auteur, est l'extension de la méthode indiquée par M. Jordan (*Traité des substitutions*, p. 32) pour la recherche des groupes plusieurs fois transitifs, avec des applications aux groupes connus d'ordre

$$\frac{1}{2}p(p^2-1),\quad p^n(p^n-1),\quad p^n(p^{2n}-1).$$

J'ai été ainsi amené à reprendre et à compléter les recherches de Mathieu sur les groupes de degré $q = 2p+1$, q et p étant premiers.

Laurent (H.). — Sur les séries de polynomes. (309-328).

Le développement d'une fonction synectique en une série de polynomes se ramène en vertu de la formule de Cauchy

$$f(x) = \int \frac{f(z)}{z-x},$$

au développement de $\frac{1}{z-x}$.

Les méthodes employées pour ce dernier développement fournissent les polynomes ordonnateurs sous la forme d'intégrales assez difficiles à calculer.

M. Laurent se donne *a priori* ces polynomes ordonnateurs. Il prouve que :

Étant donnés des polynomes $P_0, P_1, P_2, \ldots$ *de degrés* 0, 1, 2, ..., *il existe des séries* $Q_1, Q_2, \ldots$ *à coefficients constants de la forme générale*

$$Q_i(x) = \frac{1}{x^i} + \frac{q_{i,i+1}}{x^{i+1}} + \frac{q_{i,i+2}}{x^{i+2}} + \ldots$$

qui satisfont formellement aux équations

$$\mathcal{L}\, Q_{i+1} P_j = 0 \qquad (i \neq j) \qquad \mathcal{L}\, Q_{i+1} P_i = 1;$$

ces séries ont leurs coefficients bien déterminés mais ne sont pas nécessairement convergentes.

Si l'on peut choisir les constantes $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots$ de manière à rendre convergente la série

$$\frac{\alpha_0}{P_0} + \frac{\alpha_0 \alpha_1}{P_0 P_1} + \ldots + \frac{\alpha_0 \alpha_1 \ldots \alpha_n}{P_{n-1} P_n} + \ldots,$$

déterminant les séries Q_i par des conditions analogues aux précédentes, on aura

$$\frac{1}{z - x} = P_0(x) \frac{Q_1(z)}{\alpha_0 \alpha_1} + P_1(x) \frac{Q_2(z)}{\alpha_0 \alpha_1 \alpha_2} + \ldots.$$

L'auteur développe diverses applications de cette formule.

Maillet (*Edm.*). — Sur les fonctions entières et quasi-entières. (329-386).

Introduction. — Dans ce Mémoire, nous étudions d'abord un certain nombre de propriétés nouvelles des racines des fonctions entières de genre fini; nous étendons ensuite un assez grand nombre de propriétés des fonctions entières et méromorphes aux fonctions que nous appelons *quasi-entières* et *quasi-méromorphes.*

I. *Fonctions entières.* — Nous reprenons d'abord, pour plus de clarté, la démonstration de quelques propriétés des fonctions entières. Nous établissons ensuite les résultats suivants :

1° Étant donnés un produit canonique de facteurs primaires d'ordre ρ, et un nombre positif arbitraire ε, si l'on décrit autour de chaque zéro un cercle de rayon η fini ($\eta \leq 1$ arbitraire), en tout point extérieur à ces cercles on a, pour $|z| = r$ assez grand, les inégalités

$$|G(z)| > e^{-r^{\rho+\varepsilon}}.$$

La même inégalité a lieu pour une fonction entière $f(z)$ quelconque, ρ désignant alors son ordre apparent;

2° Soient $f(z) = A_0 + A_1 z + \ldots + A_l z^l + \ldots$ une fonction entière d'ordre fini ρ' et

$$f_l(z) = A_0 + A_1 z + \ldots + A_l z^l.$$

Dès que l dépasse une certaine limite finie, à toute racine de $f_l(z)$, de module inférieur à $l^{\frac{1}{\rho'+\varepsilon}}$, correspond une racine de $f(z)$, les modules des deux racines différant d'aussi peu qu'on veut, pourvu que l soit assez grand;

3° Pour une fonction entière $F(z)$ d'ordre apparent ρ' fini les sommes des inverses des puissances $m > \rho'$ des racines se calculent comme pour un polynome par les formules de récurrence de Newton.

On en conclut diverses applications aux conditions de réalité des racines de $F(z)$, aux conditions pour que ces racines soient toutes positives ou négatives, à la détermination du facteur exponentiel de $F(z)$, aux fonctions entières simples, à l'invariance de certaines fonctions des coefficients de $F(z)$ quand on multiplie $F(z)$ par un facteur exponentiel.

II. *Fonctions quasi-entières et quasi-méromorphes.* — Une fonction monodrome $f(z)$, n'ayant dans le plan des z d'autres points critiques que ∞, a_0, ..., a_k (k fini), est développable en une série de la forme

$$f = \psi(z) + \psi_0\left(\frac{1}{z - a_0}\right) + \ldots + \psi_k\left(\frac{1}{z - a_k}\right),$$

$\psi(z)$, $\psi_0(z)$, ..., $\psi_k(z)$ étant des fonctions entières. Mais on peut aussi la mettre sous la forme

$$f = \varphi(z)\,\varphi_0\left(\frac{1}{z - a_0}\right)\cdots\varphi_k\left(\frac{1}{z - a_k}\right),$$

où $\varphi(z)$, $\varphi_0(z)$, ..., $\varphi_k(z)$ sont des fonctions entières; il y a réciprocité.

Nous montrons que, si $\psi(z)$, $\psi_0(z)$, ..., $\psi_k(z)$ sont d'ordres finis ρ, ρ_0, ..., ρ_k, il en est de même, respectivement, de $\varphi(z)$, $\varphi_0(z)$, ..., $\varphi_k(z)$. La condition nécessaire et suffisante pour que $f(z)$ soit alors à croissance régulière aux environs de $z = a_i$ est que $\psi_i(z)$ soit à croissance régulière (au sens de M. Borel). Quand $f(z)$ a ses ordres tous < 2, est réel et n'a qu'un nombre limité de racines imaginaires, la dérivée $f'(z)$ n'a qu'un nombre limité de racines imaginaires. Enfin, parmi les équations $f + \frac{\varphi_1}{\varphi} = 0$, où φ_1 et φ ont tous leurs ordres inférieurs à ceux de f, il y en a une au plus d'ordre réel inférieur à ρ_i pour $z = a_i$, et, *a fortiori*, d'ordres réels tous inférieurs à ρ, ρ_0, ..., ρ_k respectivement. Il y a des extensions au cas où $f(z)$ est d'ordre infini.

Quand $k = 0$, $a_0 = 0$, on peut établir pour les fonctions quasi-entières des propriétés correspondantes aux propriétés 1° et 2° ci-dessus.

Enfin, nous considérons les fonctions quasi-méromorphes $F(z)$, quotients de deux fonctions quasi-entières; si ρ et σ sont les ordres pour $z = \infty$ du numérateur et du dénominateur, τ le plus grand de ces deux nombres, nous disons que $F(z)$ est d'ordre τ pour $z = \infty$.

Cela posé, parmi les équations $F = \varphi$, où φ est une fonction quasi-méromorphe quelconque d'ordres tous inférieurs à τ, τ_0, ..., τ_k, il y en a une pour laquelle tous les ordres réels sont inférieurs à ceux de F. Il y en a au plus

deux, pour lesquelles les exposants de convergence des suites des modules des racines sont inférieurs à $\tau, \tau_0, \ldots, \tau_k$ à la fois.

Il est probablement possible d'étendre aux fonctions quasi-entières les théorèmes relatifs :

1° A la réalité des racines des dérivées des fonctions entières quand l'ordre est quelconque :

2° Aux racines des équations $F = \varphi$ (φ fonction entière quelconque d'ordre fini, F fonction entière donnée d'ordre infini) en suivant en partie la marche de M. Borel.

Nous laisserons provisoirement ces points de côté.

Auric. — Essai sur la théorie des fractions continues. (387-431).

L'auteur s'est proposé de généraliser la notion de fraction continue arithmétique, afin de l'étendre aux nombres négatifs et aux nombres complexes.

A l'égalité classique

$$a_i = A_i + \frac{1}{a_{i+1}},$$

où A_i représente l'*entier immédiatement inférieur* au nombre *positif* a_i, il substitue, à l'exemple de M. Minnigerode et de M. Hürwitz, la relation

$$a_i = A_i - \frac{1}{a_{i+1}},$$

où A_i est l'*entier le plus rapproché* du nombre *quelconque* a_i. Il y a avantage, en effet, à changer le signe du reste.

Examinant en premier lieu le cas des nombres réels, M. Auric ne s'en tient pas exclusivement à la formation des réduites; il considère les termes des réduites comme des fonctions numériques qu'il fait servir à l'étude des quotients complets : il établit des formules générales qui permettent d'obtenir un quotient complet en fonction de deux quotients complets quelconques, puis il étudie les variations de grandeur de ces quotients complets selon le rang qu'ils occupent, et celles des termes des réduites ordinaires, d'où se conclut leur convergence. Cette partie du Mémoire se termine par la démonstration du théorème de Lagrange sur le développement en fraction continue des irrationnelles du second degré.

Dans l'autre partie, M. Auric montre que sa théorie s'applique presque sans changement aux nombres complexes et permet de donner plus d'unité aux recherches de Dirichlet et de Dedekind.

Desaint (*L.*). — Théorèmes généraux sur les points singuliers des fonctions données par une série de Taylor. (435-451).

Voici l'énoncé par lequel l'auteur synthétise tous les résultats de son travail et la plupart de ceux qui ont été obtenus antérieurement dans cet ordre de recherches.

On considère un nombre quelconque de fonctions

$$F_1(z) = \Sigma a_1(n) z^n,$$
$$F_2(z) = \Sigma a_2(n) z^n,$$
$$\dots\dots\dots\dots,$$
$$F_p(z) = \Sigma a_p(n) z^n,$$

valables à l'intérieur d'un cercle de rayon supérieur à un et une fonction de p variables

$$f(x_1, x_2, \dots, x_p),$$

holomorphe au voisinage du point $x_1 = x_2 = \dots = x_p = 0$. *La fonction*

$$\Phi(z) = \Sigma f[a_1(n), a_2(n), \dots, a_p(n)] z^n$$

n'a pas d'autres points singuliers (sauf $z = 1$ *et* $z = \infty$*) que les points dont on obtient les affixes en multipliant entre elles, de toutes les manières possibles, les affixes des singularités des p fonctions* $F_1, F_2, \dots, F_p$, *chacune de ces singularités figurant un nombre quelconque de fois dans les produits ainsi formés.*

M. Desaint montre de plus que :

Si les p fonctions $F_1, F_2, \dots, F_p$ *ont leurs points singuliers situés sur un nombre limité de droites passant par l'origine et faisant avec l'axe des quantités réelles des angles commensurables avec l'angle droit, les points singuliers de* $\Phi(z)$ *sont situés sur un nombre limité de droites.*

La méthode qu'il a suivie s'étend aux fonctions de plusieurs variables.

Tome IX; année 1903.

Appell (Paul). — Sur quelques fonctions de points dans le mouvement d'un fluide. (5-19).

Dans l'étude analytique du mouvement des fluides, il y a lieu de mettre en évidence les expressions qui représentent des éléments géométriques ou cinématiques *indépendants du choix des axes,* car ce sont les seules qui puissent avoir une signification physique.

Ces éléments sont de deux sortes :

1° Des *vecteurs* définis en chaque point du fluide, comme la vitesse, l'accélération ou le tourbillon;

2° Des *quantités algébriques* ayant une valeur déterminée en chaque point $P(x, y, z)$ du fluide, comme la grandeur de la vitesse ou du tourbillon, comme le produit géométrique de la vitesse et du tourbillon.

A ces *quantités algébriques*, M. Appell donne le nom de *fonction du point* P et il étudie celles qui sont formées uniquement avec les neuf dérivées premières des composantes de la vitesse par rapport à x, y, z, savoir

$$\frac{\partial u}{\partial x},\quad \frac{\partial u}{\partial y},\quad \frac{\partial u}{\partial z};\qquad \frac{\partial v}{\partial x},\quad \frac{\partial v}{\partial y},\quad \frac{\partial v}{\partial z};\qquad \frac{\partial w}{\partial x},\quad \frac{\partial w}{\partial y},\quad \frac{\partial w}{\partial z},$$

u, v, w désignant les projections sur trois axes rectangulaires fixes Ox, Oy, Oz de la vitesse de l'élément fluide qui, à l'instant t, passe au point $P(x, y, z)$.

Ayant posé, comme dans la théorie de l'élasticité,

$$\varepsilon_1 = \frac{\partial u}{\partial x},\quad \gamma_1 = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z},\quad 2\xi = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z},$$

$$\varepsilon_2 = \frac{\partial v}{\partial y},\quad \gamma_2 = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x},\quad 2\eta = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x},$$

$$\varepsilon_3 = \frac{\partial w}{\partial z},\quad \gamma_3 = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y},\quad 2\zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y},$$

l'auteur considère les six expressions suivantes, qui ont des valeurs indépendantes du choix des axes et sont, par suite, des fonctions du point P,

(I) $\theta = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3,$

(II) $\delta = \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 - 4(\varepsilon_2\varepsilon_3 + \varepsilon_3\varepsilon_1 + \varepsilon_1\varepsilon_2),$

(III) $\varkappa = 4\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3 + \gamma_1\gamma_2\gamma_3 - \varepsilon_1\gamma_1^2 - \varepsilon_2\gamma_2^2 + \varepsilon_3\gamma_3^2,$

(IV) $\Omega^2 = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2,$

(V) $\varphi = \varepsilon_1\xi^2 + \varepsilon_2\eta^2 + \varepsilon_3\zeta^2 + \gamma_1\eta\zeta + \gamma_2\zeta\xi + \gamma_3\xi\eta,$

(VI) $\psi = (4\varepsilon_2\varepsilon_3 - \gamma_1^2)\xi^2 + \ldots + 2(\gamma_3\gamma_1 - 2\varepsilon_2\gamma_2)\zeta\xi + \ldots.$

Les trois premières dépendent seulement de la déformation ; ce sont les invariants élémentaires de la forme quadratique qui, égalée à zéro, définit le *cône des dilatations nulles*.

Les trois dernières dépendent, en outre, du tourbillon; la quatrième Ω^2 est le carré du vecteur tourbillon; la cinquième est égale au produit de Ω^2 par la vitesse de dilatation de l'élément fluide issu de P et dirigé suivant le vecteur tourbillon; la sixième, égalée à zéro, exprime que le tourbillon est sur le cône supplémentaire du cône des dilatations nulles.

Toute fonction des neuf dérivées de u, v, w par rapport à x, y, z, dont la valeur est indépendante du choix des axes, s'exprime au moyen des six fonctions fondamentales (I), ..., (VI).

M. Appell calcule les dérivées totales par rapport au temps des cinq premières fonctions fondamentales θ, δ, $\varkappa$, Ω^2, φ.

Beghin et *Rousseau*. — Sur les percussions dans les systèmes non holonomes. (21-26).

Les équations de Lagrange s'appliquent au mouvement d'un système holonome; mais elles ne sont plus valables quand certaines liaisons ne sont pas exprimables par des relations en termes finis, c'est-à-dire quand le système n'est plus holonome.

Les auteurs montrent que, même pour les systèmes non holonomes, on peut

conserver, dans la théorie des percussions, la forme d'équations déduite des équations de Lagrange.

Appell (*Paul*). — Remarques sur les systèmes non holonomes. (27-28).

Autre démonstration du théorème établi ci-dessus par MM. Beghin et Rousseau.

Beghin. — Extension du théorème de Carnot au cas où certaines liaisons dépendent du temps. (29-33).

Étant donné un système soumis à des liaisons sans frottement et ne dépendant pas du temps, le théorème de Carnot s'applique et peut s'énoncer ainsi :

Si les liaisons antérieures et les liaisons brusquement introduites subsistent après les percussions, la force vive perdue est égale à la force vive que posséderait le système, si chaque point était animé de la vitesse qu'il a perdue.

M. Beghin étend ce théorème, en le modifiant, aux systèmes dans lesquels les liaisons peuvent dépendre du temps, mais sont toujours assujetties à ne point produire de frottements.

Supposant que le système dépend, avant la percussion, de k paramètres indépendants $q_1, q_2, \ldots, q_k$, pendant la percussion, des n paramètres $q_1, q_2, \ldots, q_n$ ($n < k$) et que les liaisons introduites sont représentées, les unes par

$$q_{n+1} = 0, \qquad q_{n+2} = 0, \qquad \ldots, \qquad q_{n+r} = 0,$$

les autres par

$$dq_{n+r+1} = 0, \qquad \ldots, \qquad dq_k = 0,$$

on a pour expression de la force vive $2T$ du système

$$2T = 2\varphi(q'_1, q'_2, \ldots, q'_k) + \psi(q'_1, q'_2, \ldots, q'_k) + f,$$

φ étant une forme quadratique des q'_i, ψ une forme linéaire et f ne dépendant pas des q'_i. Dans ces conditions, *la perte subie par la fonction 2φ est égale à la force vive due aux vitesses perdues.*

Picard (*Émile*). — Sur l'impossibilité de certaines séries de groupes de points sur une surface algébrique. (35-41).

Démonstration de ce théorème :

Il est impossible qu'une surface algébrique présente des séries de groupes de n points dépendant de $2n$ paramètres et correspondant uniformément à des fonctions abéliennes (non dégénérescentes) de $2n$ variables $u_1, u_2, \ldots, u_{2n}$, si la surface n'est pas une surface hyperelliptique ($n = 1$).

La *correspondance uniforme* est entendue en ce sens qu'à un système de

valeurs des u_i ne correspond, en général, qu'un seul groupe de points et, à un groupe arbitraire de la série, ne correspond qu'un seul système des u_i, aux périodes près.

Humbert (G.). — Les fonctions abéliennes singulières et les formes quadratiques. (43-137).

Le Mémoire de M. Humbert a pour objet d'établir certaines liaisons remarquables entre la théorie des fonctions abéliennes singulières de genre deux et la théorie arithmétique des formes quadratiques. Il est divisé en trois Parties, dont les deux premières paraissent seules ici. Voici dans quels termes l'auteur les résume.

I. Dans la première, consacrée aux fonctions *simplement* singulières, c'est-à-dire à celles dont les périodes vérifient *une* relation singulière, nous montrons, en nous reportant à un résultat antérieurement établi par nous, que les solutions en nombres entiers de l'équation

$$x^2 - 4yz - 4tu = \Delta$$

se déduisent de l'une quelconque d'entre elles par des formules linéaires, qui fournissent en même temps des transformations en elle-même de la forme

$$x^2 - 4yz - 4tu.$$

Ce résultat met en évidence un groupe intéressant, isomorphe au groupe abélien, et qui est intimement lié aux propriétés de la forme quadratique.

Laissant ensuite de côté les questions purement arithmétiques, nous déterminons toutes les transformations qui n'altèrent pas une relation singulière donnée, ou qui changent l'une dans l'autre deux relations données, de même invariant; nous étendons ces formules aux transformations singulières du premier degré.

II. La seconde Partie est consacrée aux fonctions *doublement* singulières, dont les périodes satisfont à un système de *deux* relations singulières données. Nous faisons voir qu'à chaque système de cette nature correspond une classe de formes binaires positives, proprement ou improprement équivalentes entre elles, et que cette classe ne change pas quand on opère, sur le système proposé, une transformation ordinaire quelconque de degré un.

Inversement, les systèmes qui donnent naissance à des formes d'une classe donnée sont réductibles, par des transformations ordinaires du premier degré, à un nombre fini d'entre eux, nombre égal à l'unité dans un grand nombre de cas, que nous déterminons.

Au lieu des périodes, considérons les *modules* des fonctions abéliennes; ils sont liés par une ou deux équations algébriques, selon que les fonctions sont simplement ou doublement singulières. On peut ainsi faire correspondre à toute relation singulière, ou plutôt à son invariant entier, une surface algébrique; à toute classe de formes binaires positives, on fera de même correspondre une ou plusieurs courbes algébriques, dont les propriétés refléteront celles de la classe. Par exemple, si une classe représente un nombre, la surface dont ce nombre est l'invariant contient les courbes qui répondent à la classe, et réciproque-

ment; les propriétés de cette Géométrie des nombres et des formes sont étudiées et développées.

On détermine les groupes fuchsiens des courbes algébriques ainsi introduites; on établit qu'ils reviennent à des groupes découverts par M. Poincaré, et rattachés par lui aux transformations en elle-même d'une forme quadratique ternaire indéfinie.

Cette recherche montre que, dans des cas très étendus, les courbes qui correspondent à des classes de même déterminant et de même genre arithmétique ont le même genre géométrique et se correspondent point par point; de là, résulte une liaison bien inattendue entre les deux notions si dissemblables de genre, en Arithmétique et en Géométrie.

On fait voir ensuite que la correspondance univoque entre les courbes qui répondent à des classes du même genre est réalisée par des *transformations singulières du premier degré*, et l'on met en évidence le lien qui unit la théorie de ces transformations à celle des formes quadratiques ternaires.

Enfin, dans un ordre d'idées analogue à celui de la première Partie, on montre comment les résultats obtenus se rattachent à la représentation d'une forme binaire positive par la forme $x^2 - 4yz - tu$, déjà rencontrée précédemment.

Poincaré (*H.*). — Sur l'intégration algébrique des équations linéaires et les périodes des intégrales abéliennes. (139-212).

Ce Mémoire constitue le développement de deux Notes publiées par l'auteur en 1883 (*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. XCVII, p. 984 et 1189).

Il y est établi d'abord que, quand une fonction algébrique satisfait à une équation différentielle linéaire à coefficients rationnels, les intégrales abéliennes jouissent de propriétés remarquables et que leurs périodes sont liées par des relations curieuses. M. Poincaré fait voir, en passant, qu'étant donné un groupe fini H quelconque, on peut toujours trouver (sauf un nombre limité d'exceptions) un groupe fini de substitutions linéaires isomorphes à H et dont les coefficients soient entiers.

Il applique ses résultats à un groupe simple, étudié en détail par M. Klein, savoir le groupe de la résolvante de Galois pour l'équation modulaire du septième ordre, qui se compose, comme il est bien connu, de 168 substitutions.

M. Poincaré rappelle ensuite, avant de les employer à l'objet propre de ses recherches, les résultats contenus dans les Mémoires publiés récemment par M. Frobenius sur les caractères des groupes; il en rapproche d'autres résultats dus à M. Cartan et, en les comparant, éclaire l'une par l'autre les théories de ces deux auteurs.

Après diverses applications de ces théories, M. Poincaré revient sur l'exemple fourni par le groupe H_{168} de M. Klein, puis il donne en terminant la signification des groupes linéaires à coefficients entiers rencontrés plus haut et prouve que tout groupe fini contenu dans le groupe linéaire conserve une forme quadratique définie positive, ou bien une forme à indéterminées conjuguées.

Lindelöf (*Ernst*). — Sur l'application de la théorie des résidus au prolongement analytique des séries de Taylor. (213-221).

On considère une fonction $\varphi(z, \alpha)$ analytique par rapport à la variable complexe $z = \rho e^{i\psi}$, dépendant en outre d'un paramètre *réel et positif* α, à laquelle sont imposées les conditions suivantes :

1° ψ_0 et ψ'_0 étant deux angles positifs compris entre o et π, elle est holomorphe pour

$$-\psi'_0 \leqq \psi < \psi_0,$$

quel que soit ρ et pour $\rho = 1$, quel que soit ψ;

2° Pour $-\psi'_0 \leqq \psi < \psi_0$, on a

$$|\varphi(z, \alpha)| < e^{\rho K(\alpha)},$$

$K(\alpha)$ tendant vers zéro avec α;

3° Quand α tend vers zéro, $\varphi(z, \alpha)$ tend uniformément vers l'unité, dans toute portion du domaine où est vérifiée l'hypothèse 1°;

4° Pour n infiniment grand, on a

$$\lim |\varphi(n, \alpha)|^{\frac{1}{n}} = 0.$$

Sous le bénéfice de ces hypothèses, la série

$$(1) \qquad \sum_0^n \varphi(n, \alpha) x^n$$

représente une fonction entière de la variable x et cette fonction tend uniformément vers $\frac{1}{1-x}$, dans toute aire intérieure au cercle $|x| = 1$, lorsque α tend vers zéro.

A ce résultat, M. Lindelöf ajoute les deux suivants

I. *Le paramètre α tendant vers zéro, la fonction entière* (1) *tend uniformément vers $\frac{1}{1-x}$ dans toute aire finie intérieure au domaine* S *d'un seul tenant dont le contour est formé par les arcs des spirales logarithmiques*

$$r = e^{\omega \operatorname{tang} \psi}, \qquad r = e^{-\omega \operatorname{tang} \psi},$$

compris entre le point $x = 1$ et le premier point où ces spirales se coupent en dehors du cercle $|x| = 1$.

II. *Étant donnée une série de Taylor quelconque*

$$f(x) = \sum_0^\infty a_n x^n,$$

ayant un rayon de convergence fini et non nul, on considère le domaine S_1, *qu'une inversion ayant l'origine comme pôle fait correspondre à la portion du plan qui est extérieure au domaine* S; *on désigne par* (xS_1) *le domaine qu'on déduit de* S_1 *en multipliant géométriquement par* x; *enfin, on définit*

un domaine S_f comme ensemble des points x tels que $f(x)$ soit holomorphe à l'intérieur du domaine (xS_1). Lorsque α tend vers zéro, la fonction entière

$$\sum_0^\infty a_n \varphi(n, \alpha) x^n$$

tend uniformément vers la fonction donnée $f(x)$ dans toute aire finie intérieure au domaine S_f.

L'auteur détermine la forme géométrique des domaines S et S_f en faisant diverses hypothèses sur les angles ψ_0 et ψ'_0 et applique ses théorèmes au cas où la fonction $\psi(z, \alpha)$ a une forme particulière.

Ford (*Walter-B.*). — Sur la fonction définie par une série de Maclaurin. (223-232).

L'auteur considère la série de Maclaurin

$$(1) \qquad g(0) + g(1)z + g(2)z^2 + \ldots + g(n)z^n + \ldots$$

qui définit une fonction $f(z)$ de la variable complexe z dans un cercle de rayon r et démontre le théorème suivant :

Si, dans la série (1), *la fonction $g(w)$ de la variable complexe w est uniforme et analytique quand on la considère pour toutes les valeurs de w dont la partie réelle est positive; si, de plus, pour ces mêmes valeurs de w, il existe une constante c telle que, quand $|w|$ devient infiniment grand, on ait*

$$\lim |g(w)| < c,$$

la fonction $f(z)$ possède une branche [*dont la série* (1) *est une partie*] *uniforme et analytique dans tout le plan* (*fini*) *de la variable*

$$z = \rho(\cos\varphi + i \sin\varphi)$$

excepté les valeurs réelles et positives et cette branche est définie par la formule

$$f(z) = g(0) - \frac{i\sqrt{z}}{2} \int_{\infty}^{-\infty} \frac{g\left(\frac{1}{2} + iy\right)(-z)^y}{\cosh \pi y} dy,$$

où l'on suppose φ compris entre -2π et zéro.

Le Mémoire se termine par des applications de ce théorème à diverses formes analytiques de la fonction $g(w)$.

Duhem (*P.*). — Sur la stabilité et les petits mouvements des fluides. (233-328).

Le Chapitre I traite des *conditions qui suffisent à assurer l'équilibre d'un fluide.*

§ 1. La recherche de ces conditions ne relève pas exclusivement du calcul des variations.
§ 2. En un état d'équilibre stable, le potentiel total est un minimum absolu. Cas du fluide homogène et incompressible.
§ 3. Cas du fluide isothermique soumis à des actions extérieures newtoniennes.
§ 4. Cas du fluide homogène et compressible, soumis à des actions extérieures non newtoniennes.
§ 5. Cas du fluide entropique.

Le Chapitre II contient une *étude cinématique des petits mouvements des fluides.*

§ 1. Étude cinématique des petits mouvements quelconques.
§ 2. Petits mouvements pendulaires d'un corps fluide.

Le Chapitre III est consacré à une *étude dynamique des petits mouvements des fluides.*

§ 1. Considérations générales.
§ 2. Équations des petits mouvements pour un fluide homogène et incompressible.
§ 3. Équations des petits mouvements au sein d'un fluide homogène, compressible, isothermique, soumis à des actions newtoniennes et non newtoniennes.
§ 4. Équations des petits mouvements au sein d'un fluide entropique.

Le Chapitre IV traite des *conditions qui sont nécessaires pour la stabilité de l'équilibre d'un fluide.*

§ 1. Cas du fluide incompressible.
§ 2. Cas du fluide homogène, compressible, isothermique, soumis à des actions extérieures newtoniennes ou non newtoniennes.
§ 3. Cas du fluide entropique soumis à une pression uniforme et constante.
§ 4. Remarque générale.

Au Chapitre V sont étudiées *les oscillations pendulaires des corps fluides.*

§ 1. Équations générales qui régissent les oscillations pendulaires propres des corps fluides.
§ 2. Relation entre le problème précédent et un problème de calcul des variations. Cas des fluides incompressibles.
§ 3. Relation entre le problème des petits mouvements pendulaires d'un corps fluide et un problème de variations. Cas des fluides compressibles.

Borel (Émile). — Contribution à l'analyse arithmétique du continu. (329-375).

Extrait de l'Introduction. — Toutes les Mathématiques peuvent se déduire

de la seule notion de nombre entier;... les notions fondamentales où intervient l'idée de limite... sont définies successivement à partir du nombre entier....

On peut se placer à un point de vue plus strictement arithmétique... on ne fait jamais intervenir dans chaque question qu'un *nombre limité de nombres entiers* au moyen desquels tous les éléments de la question sont explicitement définis ...

Si l'on considère ainsi un nombre (rationnel, algébrique ou transcendant) caractérisé par un certain nombre d'*entiers* et par certaines *opérations*, il est clair qu'on est conduit à regarder ce nombre comme d'autant plus compliqué que ces entiers sont plus *nombreux* et plus *élevés* et ces opérations plus *nombreuses*. La complication de chaque nombre peut être ainsi caractérisée numériquement;... le nombre ou symbole qui mesurera cette complication sera dit la *hauteur* du nombre....

Ce Mémoire est consacré exclusivement aux nombres rationnels et à leur emploi pour l'approximation des incommensurables *quelconques*. Parmi les résultats nouveaux qui y sont renfermés, je citerai notamment le suivant :

Il est possible de déterminer a priori *une infinité d'intervalles* (A_n, B_n) *tels que* A_n *et* B_n *augmentent indéfiniment avec* n *et tels que,* x *étant un nombre incommensurable quelconque compris entre* o *et* 1, *il existe des nombres* p_n, q_n *vérifiant les inégalités*

$$\left|\frac{p_n}{q_n} - x\right| < \frac{1}{q_n^2\sqrt{5}}, \qquad A_n < q_n < B_n.$$

Plusieurs des résultats de ce Mémoire ont été obtenus comme conséquences d'un principe très simple dont je voudrais dire quelques mots...; on sait que $n+1$ points sont sur l'axe Ox et que leurs abscisses sont toutes comprises entre o et n; il faut prouver que, parmi ces points, il en est deux au moins dont la distance est inférieure à un (en excluant le cas où les abscisses seraient o, 1, 2, ..., $n-1$, n).... Au lieu de diviser l'intervalle o, n en intervalles fixes indépendants des nombres x_0, x_1, ..., x_n, sur lesquels on raisonne, on considère des intervalles formés à partir de ces nombres eux-mêmes. Lorsqu'il n'y a qu'un *nombre limité* d'intervalles les deux méthodes sont, au fond, équivalentes. Il en est tout autrement lorsqu'il y en a un nombre illimité.... On peut caractériser cette différence de méthode en disant que l'on construit le continu au moyen de petits intervalles entourant des points isolés, au lieu d'arriver à ces points par la subdivision indéfinie de l'étendue donnée d'avance; la construction en est faite, si l'on peut ainsi dire, du dedans et non plus du dehors....

Ces diverses recherches ont une même conclusion générale : la rapidité de l'approximation des nombres incommensurables par des nombres rationnels est en relation simple avec la *hauteur* de ces nombres, telle que nous l'avons définie tout à l'heure. C'est là un principe dont l'importance, à la fois théorique et pratique, me paraît devoir être considérable.

Pech (*Robert*). — Extrait d'une lettre à M. Jordan. (376).

Correction à une équation de Schröter, publiée dans le *Journal de Mathematiques* en 1858.

Lerch (*M.*). — Sur le nombre des classes de formes quadratiques binaires d'un discriminant positif fondamental. (377-401).

Les formes binaires à coefficients entiers

$$ax^2 + bxy + cy^2,$$

qui appartiennent au même discriminant

$$D = b^2 - 4ac,$$

se répartissent en un nombre fini de classes, qu'on désignera par Cl(D), en supposant que D soit un déterminant *fondamental*, c'est-à-dire tel qu'il ne lui corresponde que des formes dont les coefficients *a*, *b*, *c* sont sans diviseur commun.

I. En vue d'obtenir une formule faisant connaître le nombre Cl(D), l'auteur commence par établir la relation

$$\lim \left[\sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{1}{(w+n)^{1+\rho}} - \frac{1}{\rho} \right]_{\rho=0} = - \frac{\Gamma'(w)}{\Gamma(w)},$$

qui est due à M. Kinkelin; dans cette relation Γ est l'intégrale eulérienne de seconde espèce, Γ' sa dérivée et ρ tend vers zéro par valeurs positives.

Considérant ensuite la série de Malmsten,

$$F(x, s, u) = \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} \frac{1}{[(x+m)^2 + u]^{\frac{s}{2}}},$$

M. Lerch en rapproche une formule bien connue dans la théorie des fonctions elliptiques, savoir

$$\sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} e^{-\frac{i\pi}{\omega}(x+m)^2} = \sqrt{\frac{\omega}{i}}\, \vartheta_3(x \mid \omega),$$

et, après diverses transformations, arrive, en appliquant le théorème de M. Kinkelin, à la formule remarquable

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} + \frac{\Gamma'(1-x)}{\Gamma(1-x)} = \Gamma'(1) - \log 4\pi + \log a \\ - \int_0^a \vartheta_3(x \mid iz) \frac{dz}{z} \\ - \int_a^\infty \frac{\vartheta_3(x \mid iz) - 1}{z}\, dz, \end{aligned} \right.$$

où *a* est une quantité positive, et qui rattache les fonctions ϑ aux fonctions Γ.

D'après les résultats dus à Dirichlet, la détermination du nombre Cl(D)

dépend de la solution fondamentale de l'équation de Fermat

$$T^2 - DU^2 = 4,$$

c'est-à-dire de la solution composée des plus petits entiers T, U. Désignant par E(D) la quantité

$$\frac{T + U\sqrt{D}}{2},$$

par $\left(\frac{D}{m}\right)$ le symbole de Legendre, généralisé par Kronecker, et posant

$$\alpha = \sqrt{\frac{\pi}{D}},$$

M. Lerch parvient, à l'aide de la relation (1), au résultat cherché, qu'il met sous la forme suivante

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned} \mathrm{Cl}(D)\log E(D) = {} & \frac{2}{\alpha}\sum_{m=1}^{m=\infty}\left(\frac{D}{m}\right)\frac{1}{m}\int_{m\sqrt{\alpha u}}^{\infty} e^{-x^2}\,dx \\ & + \sum_{m=1}^{m=+\infty}\left(\frac{D}{m}\right)\int_{\frac{m^2\alpha^2}{u}}^{\infty} e^{-x}\,\frac{dx}{x}, \end{aligned}\right.$$

où u représente une quantité positive arbitraire.

Les applications numériques de cette formule seraient pénibles. Aussi l'auteur lui fait-il subir une modification qui rend facile le calcul du nombre Cl(D), même si la valeur de D est assez considérable, pourvu que l'on connaisse avec une certaine approximation le coefficient log E(D). Ainsi pour D = 9817, sachant (A. Martin) que l'entier $\frac{T}{2}$ se compose de 97 chiffres, on trouve très rapidement Cl(D) = 1.

Le Roux (*J.*). — Recherches sur les équations aux dérivées partielles. (403-455).

Le Chapitre I traite des *fonctions d'une infinité de variables :* utilité de la considération des fonctions d'une infinité de variables; éléments variables dont dépendent les intégrales d'un système d'équations aux dérivées partielles; propriétés fondamentales des solutions; domaine restreint dans un champ d'une infinité de variables; fonctions d'une infinité de variables, fonctions convergentes; séries normales; calculs sur les fonctions uniformément convergentes, séries dont les termes sont des fonctions uniformément convergentes; fonctions analytiques; propriétés des dérivées.

Au Chapitre II sont étudiées *les fonctions qui dépendent d'une infinité de constantes arbitraires :* définition des ensembles de fonctions; ensembles linéaires, fonctions primaires; propriétés des fonctions d'un ensemble linéaire et homogène; équations primaires; caractéristiques; changement du complexe caractéristique; indices caractéristiques et complexe caractéristique de l'ensemble; équations aux dérivées partielles de l'ensemble; solutions d'un système

linéaire d'équations aux dérivées partielles; ensembles non linéaires; ensembles dont chaque élément comprend plusieurs fonctions.

Au troisième et dernier Chapitre, l'auteur considère *les groupes généraux et les fonctions génératrices :* forme des systèmes; le groupe G_1; invariants du groupe G_1; le groupe G; transformation des variables initiales; le groupe K; conditions auxquelles doivent satisfaire les transformations infinitésimales du groupe K; fonctions génératrices des transformations infinitésimales; transformations infinitésimales correspondant à une fonction génératrice donnée, groupe de Darboux; détermination de l'ensemble des fonctions génératrices; expression générale des fonctions génératrices; expressions générales des transformations infinitésimales; remarques sur l'ensemble des fonctions génératrices; ensembles fondamentaux de fonctions génératrices; transformations équivalentes; l'accolade de Lie; propriétés des accolades de Lie.

L. R.

FIN DE LA SECONDE PARTIE DU TOME XXX.

TABLES

DES

MATIÈRES ET NOMS D'AUTEURS.

TOME XXX; 1906. — SECONDE PARTIE.

TABLE ALPHABÉTIQUE

DES MATIÈRES.

RECUEILS ACADÉMIQUES ET PÉRIODIQUES DONT LES ARTICLES ONT ÉTÉ ANALYSÉS DANS CE VOLUME.

TABLE DES NOMS D'AUTEURS

PAR ORDRE ALPHABÉTIQUE.

FIN DE LA TABLE DE LA SECONDE PARTIE DU TOME XXX.

PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS,
37835 Quai des Grands-Augustins, 55.